image
not
available

image
not
available

image
not
available

image
not
available

image
not
available

image
not
available

image not available

Braunschweig. **PROSPECTUS.** Mai 1854.

Der

Messknecht und sein Praktikum.

Ein

populäres und universelles

Mess- und Berechnungs-

Brieftascheninstrument und Taschenhandbuch

zur vereinfachten und selbständigen Erledigung

der im bürgerlichen, technischen und wissenschaftlichen Leben vorkommenden und ohne specifische Hülfsmittel schwer oder gar nicht ausführbaren

Arbeiten der gesammten Mathematik.

Für Gelehrt und Ungelehrt

in allen Gebieten der Praxis, vornehmlich in denen der Staats-, Land- und Forstwirthschaft; des Militär-, Ingenieur-, Maschinen- und Fabrikwesens; Strassen-, Eisenbahn-, Berg-, Hoch- und Wasser-Baues u. s. w.

sowie für gewerbliche und humanistische

Schulen aller Art.

Von

Max. Rob. Pressler,

Professor der mathematischen Wissenschaften an der Königl. Sächsischen Akademie für Forst- und Landwirthe zu Tharand.

Zweite

gänzlich umgearbeitete und bedeutend vervollkommnete Auflage.

Mit 483 in den Text eingedruckten Holzschnitten und dem fertigen Messknechts-Instrumente.

8. Fein Velinpap.

Preis: elegant in englisch Leinen gebunden 2 Thlr. 12 Ggr.; in Schweinsleder (wirklichem Pergament) 2 Thlr. 16 Ggr.

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

Ein Universalwerkzeug mathematischer **Gymnastik** für die Schule; ein Universalwerkzeug mathematischer **Praxis** fürs Leben; mit einem Schlage die Beseitigung aller der zahlreichen namhafteren Hindernisse, die dem wirklichen **Gebrauche der Mathematik** entgegenstehen: dies ist das Wesen und das Ziel des heutigen Messknechts; — eines Werkes, das der ausübenden Mathematik eine neue Epoche, namentlich im bürgerlichen Leben, zu bereiten ver-

mag, sobald es seine bedeutungsvolle und merkwürdige Aufgabe nicht minder sinnreich und glücklich löst, als sie originell und kühn an sich erscheint. Verhält sich die gegenwärtige Gestalt dieser im edleren Sinne wahrhaft populären und praktischen Universalmathematik fürs Haus zu dem ersten Messknechtswerke in der That wie der kultivirte Fruchtbaum zum einfachen Pflänzling; und war schon dieser letztere geeignet, das Interesse vieler Stände und Schulen in einer solchen Weise zu erregen, dass die bedeutende Auflage noch vor Beginn der zweiten Ostermesse sich vergriff: so dürfen wir dasselbe jetzt der Beachtung des grossen, ganzen Publikums nur um so zuversichtlicher empfehlen. Denn wer zunächst nur die zwischen Vorwort und Inhaltsverzeichniss stehende „vorläufige Instrumentserläuterung" in ihren 100 Beispielen überblickt und dabei mit gerechtem Staunen das, was selbst schon der mathematisch ungeschulte Mann mit diesem Hülfsmittel zu leisten vermag, gewahrt — zu schweigen von seinen Arbeiten in den Händen eines mathematisch Sachverständigen; wer ferner aus dem Vorworte des Herrn Verfassers die Einsicht gewonnen, wie sehr sein Messknecht in Bezug aufs Leben in der Schule als ein vorzüglicher Turnapparat und wie dazu geschaffen erscheint, die Liebe und Fähigkeit zur Mathematik, zu ihrem Studium wie zu ihrem Gebrauche, in höchst willkommener Weise zu fördern; und wie derselbe in Bezug aufs Leben **ausserhalb** der Schule in gleichem Grade geeignet ist, die bislang so schmerzlich entbehrte und bis jetzt so mangelhaft vorhandene Einwirkung und Thätigkeit der Mathematik in allen Zweigen des bürgerlichen und technischen Lebens in ihr Urrecht einzusetzen: der wird im Hinblick auf das Geniale und Praktische dieses glücklichen Gedankens und seiner eben so glücklichen Verkörperung gewiss mit uns sich einverstanden erklären, dass dies Werkchen der Mathematik im Leben wie in der Schule eine wohnlichere Stätte bereiten und als ein unvergleichlicher Arbeits- und Bildungsapparat mit offenen Armen werde aufgenommen werden von allen Altern und allen Ständen, die nur etwas mathematische Bethätigung haben; von allen Schülern und allen Erziehern, die nur etwas Werth auf mathematische Gewandtheit legen; von Allen überhaupt, die an einer bedeutenden Erleichterung und Verallgemeinerung der im bürgerlichen Leben so vielfach nützlichen ausübenden Mathematik nur einiges Interesse haben.

Denn mit dem Knechte in der Brieftasche und den einfachen Hauptlehren seines Praktikums im Kopfe ist sein Herr im Stande:

alle erheblichen Fragen der Maasskunde zu beantworten; durch Aufsuchung der Reciproken jede Division, durch blosse Ablesung und einfache Multiplication jede Quadrat-

wurzelausziehung zu ersparen; auf gleich einfache Weise alle Fragen der Zins-, Diskont- und Renten-, also überhaupt der ganzen Finanzrechnung schnell zu erledigen; die Chorden und Bogen, Sinusse und Cosinusse, Tangenten und Secanten aller Winkel, die Grösse der Kreis- und anderer Flächen, den Inhalt der Kreis- und anderer Körper und Gefässe nach Decimal- wie nach Duodecimalmaass, nach Kubikzollen und Kubikfussen, wie nach Trocken- und Flüssigkeits-Hohlmaassen anzugeben; ohne weitere Hülfsmittel alle Rechnungen der Holzkubirung, der Feld- und Forstvermessung, der Baum- und Waldschätzung, der Vieh-Lebend- und Schlacht-Gewichtsmessung, und ebenso die wesentlichsten Rechnungs- und Schätzungsarbeiten der mechanischen Physik, technischen Mechanik und Maschinenlehre auszuführen; — als z. B. die auf Kenntniss der Dichtigkeits-, Wärme- und Heizungsfaktoren, der Geschwindigkeit, Grösse und Arbeit der Thier-, Luft-, Dampf- und Wasser-Kräfte und Maschinen, der Reibungs- und Fuhrwerkswiderstände, der Materialienfestigkeit beruhenden u. s. w. u. s. w. —
und zwar aller Orten, wo ihn solche Fragen treffen, und ohne dass er darauf vorbereitet zu sein braucht; nur dass man ihm die etwa noch nöthigen durch unmittelbare Messungen zu erhebenden Grössen überliefere.

Zu eben diesen letztgenannten Erhebungen und Messungen bedurfte es aber bisher eines ganzen Zeughauses von mathematischen Geräthschaften. Dieses ganze Zeughaus aber macht dies geniale Hülfsmittel ebenfalls entbehrlich, sobald man ihm nur noch zwei bis drei unbedeutende Kleinigkeiten — ein Band, einen Stab, ein Schräubchen, ein paar Visirnadeln — zum Succurs giebt. Denn mit diesen geringfügigen Gehülfen im Bunde, zum grössten Theile selbst ohne sie, ist der Knecht zugleich ein umfassendes Messinstrument: ein Metermaass; ein Universalzollstab; ein Zeichnungsmaassstab; ein Transporteur; ein Horizontal- und Höhen Winkelmesser; ein Rechtwinkelabstecker (Winkelkopf); eine Nivellirwage; ein Höhen- und Tiefenmesser; natürlich auch in Folge aller dieser Eigenschaften ein ziemlich vielseitiges Aufnahmeinstrument; bei Sonnenschein eine durch ganz Deutschland brauchbare, bis auf wenige Minuten, wenn man will, bis auf die einzelne, richtig zeigende Taschenuhr u. s. w., u. s. w.

Die messende und rechnende Welt würde dem Herrn Verfasser gewiss schon in vollem Maasse dankbar sein müssen, wenn sein Verdienst dabei auch kein anderes wäre, als das einer eben so raffinirten als mühsamen Zurechtlegung des in der mathematischen Wissenschaft und Kunst bereits vorhandenen Materials. Mit diesem an sich allein vollberechtigten Motive seiner Existenz begnügt sich aber der neue Messknecht noch nicht, sondern fügt diesem Verdienste bei Innehaltung einer auch dem Nichtmathematiker möglichst zugänglich gemachten und dabei doch möglichst geistigen Popularität noch das von

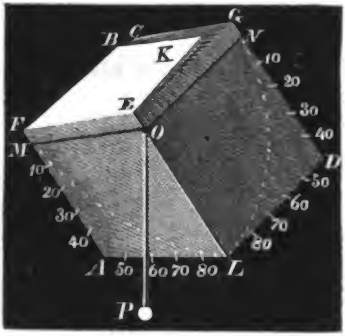
namhaften Vereinfachungen und Vervollständigungen in der Theorie und Praxis vieler der abgehandelten Zweige hinzu; wie denn z. B. das ganze sechste und siebente Buch als neue und glückliche Bereicherungen der Forst- und Landwirthschaftsmathematik werden erkannt werden. Diese Fülle und Universalität seiner Leistungen, verbunden mit einer überraschenden, selbst zu rein wissenschaftlichen Arbeiten ausreichenden Genauigkeit sehr vieler derselben (siehe sub *B* der erwähnten Instrumentserläuterung); dabei die einzige Einfachheit und Führlichkeit seines Gebrauches, wie die eben so einzige Fügsamkeit seiner Form, in Folge deren er nach wie vor in einer Seitenkammer der Brieftasche sein kompendiöses Lager aufzuschlagen und seinen Herrn ohne die geringste Belästigung als ein treues Factotum aller Wegen und aller Orten zu begleiten vermag — diese ganze ächte Popularität seines Wesens machen den mit so bescheidenem Namen und so bescheidenen räumlichen und wissenschaftlichen Ansprüchen auftretenden Messknecht zu einer in der Geschichte der Mathematik ihres Gleichen suchenden Erscheinung und zu einer Errungenschaft, welche dem gewöhnlichsten Praktiker eben so wie dem Gelehrten vom Fach, der Schule eben so wie dem Leben in gleich bedeutungsvoller Weise zu gut kommt; der Schule: als ein Universalwerkzeug mathematischer Gymnastik —, dem Leben: als ein Universalwerkzeug mathematischer Praxis.

In so fern nun „der Messknecht und sein Praktikum" sich zur allgemeinsten Einführung sowohl innerhalb der Gebiete des geschäftlichen Lebens als derer der Schulen ganz vorzüglich eignet, und in so fern der Herr Verfasser gegen die Verlagshandlung den ausdrücklichen Wunsch nach einem dieser populären Natur entsprechenden möglichst populären Ladenpreise ausgesprochen: hat sich die Verlagshandlung entschlossen, den Verdiensten und Mühen des Herrn Verfassers dadurch ein Gegenstück zu liefern, dass sie den Preis dieses nicht ohne viele Kosten und Schwierigkeiten herzustellen gewesenen Werkes von 50 Bogen 8°, mit dem fertigen Instrumente, elegant in englisch Leinen gebunden zu nur 2 Thlr. 12 Ggr., in Schweinsleder (wirklichem Pergament) zu 2 Thlr. 16 Ggr. netto ansetzt; und dabei — einem ferneren Wunsche des Herrn Verfassers gemäss — Willens ist, allen jenen Schulen und Vereinen, welche den Messknecht bei sich einführen und partienweise direkt von ihr beziehen wollen, gern noch besondere vortheilhafte Zugeständnisse zu machen.

Der

Messknecht und sein Praktikum.

Wir bitten, vor Allem die sub *A* Seite XXII zur vorläufigen Orientirung aufgestellten Beispiele durchzugehen, dabei aber Acht zu haben, dass man bei Formirung des Knechtes zum Visirwürfel



die rechte Oberecke *EC* **nie über** die linke *EB* zu legen versuche.

Der

Messknecht und sein Praktikum.

Ein
populäres und universelles
Mess- und Berechnungs-
Brieftascheninstrument und Taschenhandbuch
zur
vereinfachten und selbständigen Erledigung
der
im bürgerlichen, technischen und wissenschaftlichen Leben vorkommenden und ohne specifische Hülfsmittel schwer oder gar nicht ausführbaren
Arbeiten der gesammten Mathematik.

Für
Gelehrt und Ungelehrt
in
allen Gebieten der Praxis, vornehmlich in denen der Staats-, Land- und Forstwirthschaft; des Militair-, Ingenieur-, Maschinen- und Fabrikwesens; Strassen-, Eisenbahn-, Berg-, Hoch- und Wasser-Baues; u. s. w.
sowie
für gewerbliche und humanistische
Schulen aller Art.

Von
Max. Rob. Pressler,
Professor der mathematischen Wissenschaften an der Königl. Sächsischen Akademie für Forst- und Landwirthe zu Tharand.

Zweite
gänzlich umgearbeitete und bedeutend vervollkommnete Auflage.

Mit 483 in den Text eingedruckten Holzschnitten und dem fertigen Messknechts-Instrumente.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1854.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Wie viele Tausende studiren Mathematik! Wie viele Hunderte davon bedürfen ihrer im Leben! Wie wenige von Allen machen — und wie wenig — Gebrauch von ihr!

Man hat die Schuld dieses beklagenswerthen Missverhältnisses zum Theil den Schulen zur Last gelegt. Und nicht mit Unrecht. Denn ohne Zweifel ist die fruchtbringendste und darum rationellste Unterrichtsmethode diejenige, welche sich nicht scheut, die Wissenschaft populär und praktisch zu machen, um durch ihr Herniedersteigen zu dem Anfängerstandpunkte der Schule und zu den reellen Bedürfnissen des Lebens beide, Schule und Leben, nach und nach und um so sicherer zu ihrem (der Wissenschaft) erhabenen Standpunkte philosophischern Dichten und Trachtens hinaufzuheben. Und ist die mathematische Pädagogik auch im Allgemeinen weiser geworden, so tritt doch immerhin diese vernünftigste Methode noch gar zu selten und — aus unmännlicher Furcht vor den unverständigen Vorwürfen wissenschaftlicher Pedanten — noch gar zu zaghaft auf. Gewiss weniger im Mangel an Einsicht als in der Furcht vor jener befangenen Kritik ist es zu suchen, dass wir in den mathematischen Schulstuben und Schulbüchern noch gar zu häufig, statt jener herablassenden und echt pädagogischen, einer Lehrweise begegnen, welche davon auszugehen scheint, nicht als ob die

Mathematik zur methodischen Entwickelung des Geistes und zur Anwendung im Leben, sondern als ob sie nur ihres absolutesten Selbst's und ihrer abstraktesten Natur wegen unter den Unterrichtsfächern sich befände; nicht als ob man mathematische Denker zu bilden, sondern als ob man dergleichen schon vor sich hätte; nicht als ob Liebe und Fähigkeit zum Weiterstudium und zum Gebrauch im Leben zu erzeugen, sondern vielmehr davon abzuschrecken, die Aufgabe wäre; — eine Behandlungsweise, deren weitere Folge es ist, dass die Schüler, mit Ausnahme einiger von Geburt aus philosophisch organisirter Köpfe, unsere so herrliche, so interessante und so nützliche Wissenschaft als unendlich schwer und unerreichbar, als unendlich trocken und seelenlos, selbst als unnütz, betrachten und nur allzu gern mit der mathematischen Schule zugleich auch die ganze mathematische Wissenschaft hinter sich lassen und nur mit Frösteln und wie an den schwarzen Schatten ihres Studiumlebens daran zurückdenken. Dass auf solche Weise weder Sinn noch Fähigkeit für einen nützlichen Gebrauch der Mathematik erworben und ins Leben mitgenommen werden könne, ist selbstverständlich. Und ebenso selbstverständlich liegt darin für alle mathematische Pädagogen die klarste Aufforderung, ihre Wissenschaft, die Mathematik, leichter und lebendiger, populärer und praktischer zu behandeln. Die Ansicht der alten Schule, dass man dadurch nur der Seichtheit der mathematischen Bildung und dem Versanden der mathematischen Wissenschaften Vorschub leiste, ist ein ganz und gar irriges Vorurtheil. Die Tiefen und Strömungen unserer Wissenschaft haben im Gegentheil mehr Anziehungskraft als nöthig ist, damit Jeder, der einmal Muth und Geschick fürs seichtere Fahrwasser gewonnen hat, sich gar bald weiter zu wagen die Sehnsucht erhält. Und so würde gerade das Gegentheil von dem, was die alte Schule befürchten zu müssen glaubt, die wohlthätige Folge einer weniger schweren und trocknen Behandlung sein.

Mit der allgemeineren Betretung dieses zweckmässigen Unterrichtsweges wäre indess unserer Sache allein noch

nicht geholfen. Denn dass wir im Leben so wenig fruchttragende Mathematik finden, liegt zum anderen, vielleicht zum hauptsächlicheren Theile auch in der eigenthümlichen Natur der Mathematik selber; vermöge welcher sie, als zumeist in abstrakten Begriffen, Bedingungen und Gebieten beruhend, schwerer als andere Wissenschaften in den Verstand und ins Gedächtniss eindringt; schwerer sich in Fleisch und Blut des geistigen Leibes verwandelt, und leichter, nur allzu leicht, dem Bewusstsein wieder entschwindet. Dazu kommt, dass bei allen nur einigermaassen über die elementarste Gewöhnlichkeit hinausgehenden Arbeiten der angewandten Mathematik in der Regel mehrere Gebiete ihres umfassenden Reiches zugleich betheiligt und oft mehrfache arithmetische, geometrische, physikalische, mechanische und sonstige technische Verhältnisszahlen, Gesetze, Formeln und Tabellen gleichzeitig erforderlich sind, bei deren Herzuschaffen und Zurechtlegen für Den, der nicht immer in der Mathematik lebt und arbeitet, immer erst so viel nachzusinnen und nachzusuchen, im Gedächtnisse und im Bücher-Schranke so vielerlei Blätter umzuwenden, so viele Gedankenprocesse von Neuem durchzumachen und also auch dabei so viel Frische und Tiefe des Nachdenkens nöthig, kurz eine Menge von Bedingungen zu erfüllen sind, welche mit dem Leben, das eben nicht immer Lust, nicht immer Zeit, nicht immer Frische zu solchen Kraftanstrengungen übrig lässt, oft in grellen Widerspruch treten; dergestalt, dass vor allen diesen Umständlichkeiten Hunderte entmuthigt zurückschrecken und, anstatt die mathematische Aufgabe mathematisch zu lösen, sich mit einem oberflächlichen, oft sehr trüglichen Ermessen, wo nicht mit dem Verbleiben in vollster Nebelhaftigkeit, begnügen. — Ob solches dem Manne des geschäftlichen Lebens, dem seine Zeit eben auch ein werthvolles Kapital ist, unter Umständen etwa sehr zu verargen? Zumal, wenn es sich nur um einzelne, scheinbar nicht sehr einflussreiche Fragen seines Betriebes handelt? Oder wenn die in den Büchern aufzusuchenden mathematischen Wahrheiten darin so zerstreut und von gelehrten Entwickelungen so über-

schüttet sind, dass es den Meisten auch bei gutem Willen gar sauer, wo nicht unmöglich wird, zur gesuchten praktischen Klarheit sich hindurchzuarbeiten? Und vollends, wenn dergleichen Arbeiten und Fragen uns nicht bei unseren Bücherschränken und nicht inmitten aller unserer disponiblen Hülfsmittel, sondern, wie so oft, unvermuthet mitten im Strome des geschäftlichen Lebens überraschen und wo möglich sofort erörtert sein wollen! Man weiss, wie selten gute Zahlen- und Formelgedächtnisse sind, und begreift, dass unter solchen Umständen selbst der Mathematiker von Fach gar häufig in den Fall kommen wird, eine Frage, die sofort erledigt sein möchte, auch sofort unerledigt lassen zu müssen; da Niemandem zuzumuthen, aller Augenblicke und aller Orten ein Taschenbuch mit sich herumzuschleppen, das, wenn es auch alle jene Hülfsmittel von Maassreductions-, Reciproken-, Wurzel-, Zins- und Renten-, Chorden-, Bogen-, Sinus-, Tangenten- und Secanten-, Kreis-, Walzen- und sonstigen kubischen Tabellen, wie auch Kraft-, Festigkeits-, Reibungs- und andere physikalische, mechanische, forst- und landwirthschaftliche und polytechnische Berechnungs- und Schätzungstafeln — in raffinirt gedrängter und praktischer Weise enthielte, immerhin viel zu voluminös und schwer sein würde, um obige Zumuthung zu rechtfertigen.

Aber gesetzt auch, der Verfasser hätte in seinem Messknechte eine Form erfunden, die dies gesammte genannte Tabellenwerk bei aller, mitunter sogar erheblich vergrösserter, Bequemlichkeit der Ablesung auf ein dünnes Brieftaschentäfelchen reducirte und dabei sogar noch Vereinfachungen in vielerlei Rechnungsgeschäften gestattete: so würde doch immer noch eine d r i t t e U r s a c h e der Eingangs beklagten mathematischen Leerheit des Lebens vorhanden sein. Denn wenn die besprochenen Hindernisse auch vollständig beseitigt wären, d. h.: wenn einerseits Schule und Leben dafür sorgten, dass die zur mathematischen Thätigkeit nöthige Liebe, Gedächtnissfrische, Befähigung und Zeit immer vorhanden und andrerseits ein raffinirtes Zahlen- und Tabellenwerk über die nöthigen Grössen und Grössenge-

setze schnelle und praktische Orientirung gewährte; so wäre ein weiterer Hauptgrund von dem beklagten mangelhaften und vernachlässigten Gebrauche unserer Wissenschaft immer noch in dem Umstande vorhanden, dass die praktische Verwendung derselben, dass die messende und rechnende Mathematik, sobald sie wirklich ausübend sein soll, in der Natur wie im Zimmer, in der Schule wie im Leben, ausser den genannten Hülfsmitteln noch Messwerkzeuge und Apparate aller Art bedarf, deren Anschaffung Tausenden von Denen, welche die Mathematik zu lieben, zu studiren und anzuwenden Ursache haben, theils zu umständlich, theils zu kostspielig, für besondere und schnelle Fälle theilweise geradezu unmöglich ist. Da werden erforderlich: Winkelmesser, Winkelkreuze, Nivellirwaagen, Höhenmesser oder Messbretter und andere Aufnahmeinstrumente, Sekundenuhren und Sonnensextanten; für die forst- und landwirthschaftlichen Zwecke insbesondere noch eigenthümliche Hülfswerkzeuge zur Holz- und Viehmesskunst, und dergleichen mehr; also ein ganzes Arsenal von Instrumenten: so dass sogar die Schule, die ein solches besässe, natürlich aber nicht für jeden Schüler eins besitzen kann, immer nur auf ein sehr mageres Praktikum beschränkt bleibt, selbst wenn dies Praktikum auch mehr nur die Handhabung der Mathematik in der Stube zu bezwecken hätte, wie das z. B. auf den Gymnasien der vorherrschende Fall sein wird. Mehr aber noch muss im Geschäftsleben aus diesem Grunde so manche nützliche Lehre unserer Wissenschaft verdorren und so manche für die Kultur des Berufs wie des Geldbeutels, für das Wohl der Gesammtheit wie des Einzelnen, nützliche Frage unerledigt bleiben.

Die Ueberzeugung, dass es hauptsächlich diese erörterten Ursachen seien, warum unsere so schöne, in ihren Einflüssen auf das bürgerlich-politische, moralisch-intellektuelle und technisch-wirthschaftliche Dichten und Trachten der Menschen so wohlthätig regulirende und schaffende, und darum der Liebe der Jugend, der Pflege ihrer Erzieher, wie der Achtung der Geschäftswelt so sehr würdige Wissenschaft dem eigentlichen Leben bei Weitem

ferner steht, als es der Freund der Menschheit wünschen muss; die Ueberzeugung, dass ohne Beseitigung jener scheinbar kolossalen Hindernisse dem Mathematiker, wenn er den allseitigen grossen Aufwand an Zeit und Kraft, welche seiner Wissenschaft in den Schulen gewidmet wird, mit den wenigen mageren Reflexen vergleicht, die er im Leben von ihr erblickt, immer nur der Schmerz übrig bleibt, sich jenes satyrischen Mäusleins zu erinnern, das nach langen und schweren Wehen die kreisenden Berge gebaren; — diese Ueberzeugungen sind es, die im Verfasser den ersten Messknechtsgedanken hervorgerufen und denen dieses unser mathematisches Aschenbrödelchen seine Existenz und seine gegenwärtige Vervollkommnung verdankt. Und dass diese Existenz nicht auf einem vereinzelt dastehenden oder eingebildeten, sondern einem allgemeinen und wahren Bedürfnisse beruhe, beweist die überraschend günstige Aufnahme, welche dieses — so zu sagen — Schmerzenskindlein schon in seiner rohen Kindheit und trotz der grossen Mangelhaftigkeit seines ersten nur flüchtig vorbereiteten Debüts, aller Orten und selbst in Kreisen, für die es anfangs gar nicht berechnet war, bereits gefunden hat. In dieser Freundlichkeit und Nachsicht, mit der das Publikum im ersten Messknecht mehr bloss den guten Willen schätzen musste, und in dem Umstande, dass trotzdem derselbe als theoretischer und praktischer Universalmathematiker in einer Anzahl Schulen mit Befriedigung schon eingeführt ist — hat der Verfasser eine dringende Aufforderung erkennen müssen, den Messknechtsgedanken weiter nachzudenken. Doch bedurfte es dessen kaum; denn der fortwährende fast tagtägliche Gebrauch desselben bei unseren hiesigen mathematischen Arbeiten belehrten uns unwillkürlich, welcher ausserordentlichen Kultur und Vielseitigkeit das Ding noch fähig sei. Ganz von selbst entwickelte sich dadurch der Knecht in Verbindung mit seinem Handbuche zu einer eigenthümlichen Art umfassender und ausübender Hausmathematik, welche gegenwärtig nichts Mehr und nichts Weniger beabsichtigt, als alle drei vorerwähnte Arten von Hindernissen mit einem Schlage zu beseitigen, und alle

darin begründeten drei Kategorien zahlreicher Bedürfnisse mit einer Gabe zu befriedigen: Die Mathematik in populärer Weise mit dem Leben zu verknüpfen; das pfundschwere und dickleibige Vademecum auf ein lothschweres Blatt, und das ganze Messzeughaus auf ein Brieftascheninstrument zu reduciren; so dass — mit Ausnahme grösserer und schwieriger Flur- und Forstvermessungen und dergleichen genaueren Nivellements — der Messknechtsinhaber vergebens sich nach irgend einer bedeutsamen Arbeit der messenden und rechnenden Mathematik umsehen wird, ohne den kleinen Praktikus seiner Brieftasche nicht als allezeit fertiges und selbständiges Factotum zur sofortigen Ausführung bereit zu sehen.

Ob und in welchem Grade dem Verfasser dies gelungen, hat er dem Urtheile der Welt zu überlassen. Seine eigenen hundertfältigen Erfahrungen gewähren ihm indess eine ruhige Zuversicht zu diesem Urtheile. Nur wolle man aber bei Beurtheilung der einen Frage, in wie weit es nämlich möglich geworden, die Mathematik ihrer den Anfänger abschreckenden Trockenheit thunlichst zu entkleiden und in lebensfrischerer Gestalt aufzuführen, zu berücksichtigen nicht unterlassen, dass ein Handbüchlein sich eigentlich nicht mit Darstellungen und Entwickelungen zu befassen hat; und dass, wo es dies dennoch gethan, es nur geschah, einerseits um der notorischen mathematischen Schwachheit und Vergesslichkeit des menschlichen und geschäftlichen Lebens die allernöthigste Hülfe angedeihen zu lassen; andererseits überall, wo der Knecht und seine Theorie neues Material aufzustellen oder neue Wege zu suchen hatte. War der Verfasser hierin auch bestrebt, im engen Raume das Mögliche zu leisten, so bringt es die Natur der Sache doch von selber mit sich, dass gerade diese Seite des Werkes Vielen noch viel zu wünschen übrig lassen, und der Ungelehrte zum Buche Vieles noch herbeiwünschen, der Sachkundige ihm Vieles noch erlassen möchte — Im Falle der Letztere jedoch bei oberflächlicher Beurtheilung die Ansicht schöpfen wollte, dass des

Instrumentes Leistungen in der Hauptsache doch nur in groben Annäherungsarbeiten beständen, so geben unsere Erfahrungen uns das vollste Recht, solche Ansicht — bezugs der Hauptsachen — als ein Vorurtheil zu bezeichnen und zur Begründung dieser Behauptung auf die diesen Zeilen folgende »Vorläufige Instrumentserläuterung« zu verweisen.

Was endlich aber die gymnastische oder pädagogische Natur des Messknechts anlangt, so werden diejenigen Lehrer und Schulen*), die bereits schon durch Einführung des früheren, ungleich beschränkteren, die Erfahrung gemacht haben müssen, welchen beherzigenswerthen Schatz von Uebungen im Gebiete des mathematischen Denkens und Handelns schon dieser in sich schloss, ganz gewiss dem Verfasser beistimmen, wenn er das Werkchen in seiner jetzigen Verfassung für ein ausserordentlich wirksames Arkanum mathematischer Erziehung hält, und zwar geeignet für alle Schulen; selbst auch die Gymnasien. — »Für alle Schulen? auch die rein humanistischen? Ein so materiell gehaltenes Buch, ein so durch und durch bloss praktisches Instrument, eine Maschinen-, eine Holz-, eine Viehmesskunst auch für die Gymnasien? Ist der Herr Verfasser, als er solches behauptete, auch wohl bei dem nöthigen Verstande und nicht etwa selbst ein wenig Maschine, Holz und Vieh gewesen?« Dass derselbe diese schmeichelhafte Zumuthung von sich abwehren zu müssen glaubt, werden allerdings selbst die Frager in der Ordnung finden; weniger vielleicht, dass er weitere specifische Beweise für die Menschlichkeit seiner Pädagogik hier darzulegen für Verschwendung hält. Und zwar deshalb, weil es solche krankhafte, man möchte sagen, solche unfähige Pädagogen, welche in einer Unterrichtswissenschaft nützliche Anwendungen fürs Leben bloss deshalb verbannen, weil sie nützlich und weil sie Anwendungen und fürs Leben sind, heut zu Tage in den Werkstätten der humani-

*) In Sachsen: Die Neustädter und die Zschoche'sche Realschule in Dresden; und die Realschule in Annaberg.

stischen, d. h. der eigensten ächt menschlichen, Bildung nur vereinzelt noch geben kann. Die Ungeheuerlichkeit eines solchen Erziehungsstandpunktes ist vom reifer gewordenen Zeitbewusstsein, ist von der gesunden Vernunft allzustark und allgemein verdammt, als dass derselbe im Boden der Gegenwart und Zukunft je wieder Wurzel fassen könnte. Die allseitige praktische Verwendbarkeit des Messknechts und seines Praktikums kann sonach kein Grund mehr sein, ihn von den Gymnasien zurückzuweisen. — Freilich aber ist diese Verwendbarkeit auch noch kein Grund, wenigstens bei den Gymnasien nicht, ein besonderes Interesse für ihn zu erwecken, ihn eigens herbeizuziehen. Denn das vornehmste Augenmerk dieser Schule soll immerhin mehr nur auf die rein geistige Entwickelung und mehr auf die formellen als materiellen Seiten der zu erstrebenden moralisch-intellectuellen Menschenbildung, und also auch der dazu benutzten Unterrichtsgegenstände gerichtet, und hiernach die Unterrichtsweise vorzugsweise eine gymnastische, für sie die Schulstube mehr nur ein Turnplatz, die Wissenschaft ein Turngeräth sein. Aber gerade dieser Forderung ist der Messknecht in einer Weise sich zu fügen, und die gesammte innere und äussere mathematische Gymnastik, das mathematische Denken und Bewusstsein einer-, das mathematische Handeln und Geschick andererseits, zu kultiviren geeignet, welche keinen Pädagogen gleichgültig dagegen lassen sollte. Entwickelt man z. B. um nur eine Seite seines didaktischen Gebrauches zu gedenken, ein Stück der Wissenschaft zunächst in der gewöhnlichen Weise und Formelsprache; und lässt man hiernach die Schüler, sobald sich dieselben den betreffenden Wissenschaftszweig zum Eigenthum gemacht haben, unter zweckmässiger Führung seitens des Lehrers möglichst selbständig daraus die für den eigentlichen Gebrauch der Mathematik vortheilhafteren Messknechtsmethoden ableiten, respective in die Messknechtssprache umformeln; und hierauf ferner eben auch möglichst selbständig den Gebrauch des Instrumentes, also die Messknechtspraxis der eben gefundenen und transformirten Theorie

auffinden und wohl auch gleichzeitig von der ganzen Klasse durch Experimente mit dem Knechte ausführen, was meist in der Schule schon geht; lässt man weiter, wenn die Schüler nun diese Praxis im Groben sich angeeignet haben, von ihnen dann diejenigen Verfeinerungen hervorsuchen, deren der Gebrauch des Knechtes bei mathematischer Bildung seines Herrn vielfach fähig ist — (so in der Zins- und Rentenrechnung für Zwischenzinsfüsse, für andere Zinses- als Kapitals-Zinsen, für Aufsuchung einer Zeit, eines Zinsfusses u. dergl.; bei Kreis-, Bogen- und Flächenberechnungen die Aufsuchung solcher Grössen, die die Tafel überschreiten; Ableitung von Durchmessern bei gegebenen Grössen der Bogen und Flächen; die ausserordentliche Vereinfachung der Höhenmessung mittels der Secantenspalte; und dergl. mehr); — und stellt man nun dieser synthetischen Gymnastik eine analytische gegenüber, stellt man z. B. den Schülern, sobald sie den entsprechenden Fond allgemeiner Theorie schon in sich haben, das Instrument und die nackte Anweisung für irgend einen Gebrauch einfach hin, und giebt ihnen auf, von dieser specifischen Messknechts-Regel oder -Formel aus logisch bis zu ihren allgemeinen Fundamenten fortzuschreiten und dadurch den Beweis der Richtigkeit des Verfahrens, sowie durch Rückwärtsgehen dieses analytischen Weges daraus den synthetischen Beweis zu konstruiren — [als z. B. des Knechtes nette Kubirungsregel für abgestutzte Kegel $(Sext._d + Sext._D + Sext._{d+D})\, h$ durch Einführung der Sextantenwerthe $\frac{\pi}{24} d^2$ etc., auf die gemeine Formel $\frac{\pi l}{12}(d^2 + D^2 + D\,d)$, desgleichen die Kugelkubirung des Knechtes $Sx_d \times 4\,d$ auf die gemeine Kubirung $\frac{\pi}{6} d^3$ u.s.w. zurückzuführen], — und lässt man die weiter etwa möglichen Anwendungen dieser Analyse nach den Seiten hin weiter fortsetzen — und durch Anwendungen aufs Leben und auf die Wissenschaft in wirklichen oder fingirten Messungen und flotten Rechnungen sogleich mehrfach aus-

führen — so hat man schon in der Stube eine Unmasse rein theoretischer Uebungen, die gar sehr geeignet sind, Vertrautheit, Gewandtheit und wissenschaftlichen und praktischen Takt in Bezug auf mathematische Bethätigungen zu erzeugen. — Gar bald wird dann der Lehrer mit Erstaunen und Freude das gesteigerte Interesse für die Wissenschaft gewahren, die hier so lebendig, so überall und leicht und nützlich anwendbar erscheint und in Folge dieser ihrer praktischen Zurechtlegung eine Menge von Fragen aus der Wissenschaft und aus dem Geschäftsleben mit Leichtigkeit und Schnelligkeit erledigt. Und die dadurch erzeugte Anregung zu neuen Fragen und Antworten, die die Schüler sich bilden, das eigene Ausgehen und Aufsuchen von weiteren Anwendungen der Mathematik im wissenschaftlichen wie bürgerlichen Leben — durch die Universalität des Knechtes, der selten auf eine Frage nicht vorbereitet sein, selten eine Auskunft schuldig bleiben wird, kräftig unterstützt — erwecken eine Lust und Liebe, eine Gewandtheit sowohl in den physischen als rein geistigen Manipulationen der mathematischen Kunst, eine Beweglichkeit, und eine Intensität und Extensität des mathematischen Denkens und Handelns, kurz eine Masse pädagogischer Wirkungen, die, indem sie die Forderungen des inneren und äusseren Lebens in beachtenswerther Weise mit einander verschmelzen, den mathematischen Theil der formell-humanistischen Bildung in einer Art und Freudigkeit kultiviren, welche allen Erziehern, und darunter gerade den Gymnasialmathematikern, die so oft über mathematischen Indifferentismus begründete Klage zu führen haben, ganz besonders willkommen sein muss. — Der Verfasser glaubt auf Grund dieser Thatsachen und seiner eigenen vielen Erfahrungen sonach mit Recht und ohne Vatereitelkeit behaupten zu können, dass der Messknecht und sein Praktikum sich als ein mathematischer Turnapparat für alle Schulen eignet; wenigstens für alle, die nicht allein das Abstrakte im Wissen, sondern auch das Leben im Wissen und vor Allem auch das Können des Wissens für heilsam erklären und erstreben; also auch für verständige Gymnasien. — Und in wie fern

für solche die beiden forst- und landwirthschaftlichen Bücher (6 und 7) aufzufassen und etwa zu benutzen sind, ist in der Vorbemerkung zum ersteren angedeutet.

Dass schliesslich der Verfasser sich nicht in der Lage befindet — ausser seinem gelehrten Freunde und Collegen Weisbach in Freiberg für gütige Erlaubniss zur unmittelbaren Benutzung mehrerer Holzschnitte seiner bekannten trefflichen Mechanik — für eine wesentliche literarische Mithülfe einen besonderen Dank aussprechen zu können, erklärt sich aus dem eigenthümlichen Ursprunge, Zwecke und Karakter seines Werkchens. Vielmehr hofft derselbe, dass der Sachverständige unschwer und mit Zufriedenheit gewahren werde, wie er nicht allein bestrebt war, das Verständniss und den Gebrauch der Wissenschaft einfach bloss zu popularisrien, sondern auch bemüht, in Bezug auf Darstellung und Entwickelung mehrfach neue, vortheilhaftere Bahnen zu brechen, und überall die Materie selbst in theoretischer wie praktischer Beziehung zu vervollständigen und zu kultiviren; wie er denn z. B. die beiden forst- und landwirthschaftlichen Bücher, mit Ausnahme einiger Sätze des 33. Kapitels, nach Form wie nach Inhalt ganz als sein Eigenthum in Anspruch nehmen darf.

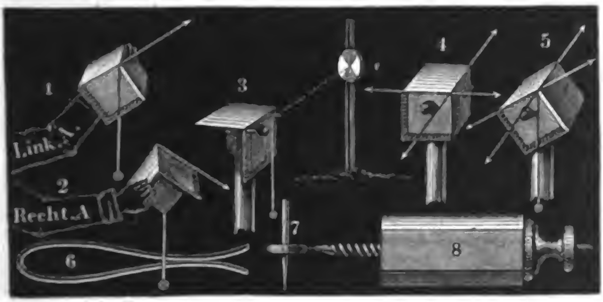
Tharand, im Frühjahr 1854.

Der Verfasser.

Vorläufige Erläuterung des Instruments

A) zur Beruhigung und Ermunterung Derer, welche vor dem scheinbar verwickelten und allzufeinen Zahlen- und Linienwerk der Tafel zurückschrecken zu müssen wähnen; und

B) zur Verständigung mit Solchen, die dem Knechte nur grobe Annäherungsarbeiten zutrauen.



Man kann die Messknechts-Praxis A) in eine grobe und B) in eine feine zerfällen. Zu jener ist auch ein ganz schlechter Rechner und ein schwaches Auge befähigt. Die feineren Unterstriche werden dabei ganz ignorirt und die Maasse immer in ganzen Zahlen, höchstens in kurzen runden Brüchen abgelesen. Wer zunächst die hier sub A folgende grobe Schule durchmacht, wozu keine volle Stunde nöthig ist, wird sich schon in dieser kurzen Zeit so an die Tafel gewöhnen, dass sie ihr Labyrinthisches und Abschreckendes, das sie für manchen Nichtmathema-

tiker anfangs haben mag, gar bald verlieren und in ruhiger Klarheit vor seinem Blicke da liegen wird.

Da das Folgende nur die vorläufige Klärung des Instruments bezweckt und zwar auf dem kürzesten Wege, also durch möglichst wenige, magere, der Anordnung der Tafel folgende Beispiele, so müssen wir Alle, die sich eine systematisch geordnete und vollständigere Uebersicht verschaffen wollen, auf das Inhaltsverzeichniss verweisen.

A. Gröbere Praxis.

A^I. Die Vorderseite.

1) Die Maasstafeln *m*, *n*, *o*, *p* des unteren Mittelfeldes.

1. Beispiel. Ein Kubikfuss österreichisch hält an Wiener Metzen? — Antwort: $^{20}/_{39}$ Metzen — Ein Wiener Metzen ist wie gross? — Antw.: $^{39}/_{20}$ Kubikfuss $= 1\,^{19}/_{20}$ Kubikfuss.
2. Beisp. Ein Kubikfuss preussisch hält Quart? — Antw: 27 Quart. Ein Quart ist also gross? — Antw.: $^{1}/_{27}$ Kubikfuss.
3. Beisp. Der Kubikfuss destillirtes oder reines Wasser wiegt in Baiern? — Antw.: 44,3 Pfund baierisch.
4. Beisp. Der metrische Zerreissungsmodul für Holz ist 9 (Kilogramm pro □Millimeter), also der sächsische pro □Zoll? — Antw.: laut 0-Tabelle $= 557 \cdot 9 = 5013$ Kilogramm $= 5013 \times 2 = 10026$ Zollpfund.
5. Beisp. Die Arbeitsgrösse eines Pferdes ohne Maschinenbehinderung wird pro Sekunde zu 75 Kilogrammmeter gesetzt; das ist nach hannoverschen Maassen? — Antw.: $75 \times 7{,}3 = 547$ Fusspfund.

2) Die allgemeine specifische Gewichtstafel der linken Oberecke.

6. Beisp. Platin ist schwerer als Wasser? — Antw.: 22 mal.
7. Beisp. Der preussische Kubikfuss leichtester oder trockenster Sandstein wiegt? — Antw.: 1,9mal so viel als Wasser; also laut *n*-Tabelle $= 1{,}9 \times 66 = 125$ Pfund.
8. Beisp. Der Kubikfuss Erde schwerer oder feuchter Beschaffenheit? — Antw.: 2,3 mal soviel als Wasser, also in Oesterreich laut *n*-Tabelle $56{,}3 \times 2{,}3 = 129$ österreichische Pfund.
9. Beisp. Ein preussischer Eimer à 60 Quart absoluten Alkohols wiegt ohne Gebind? — Antw.: 0,79 mal soviel als Wasser; aber laut *m*-Tabelle 1 Eimer $= ^{60}/_{27} = ^{20}/_{9}$

Kubikfuss; laut n-Tabelle 1 Eimer Wasser = $^{20}/_9$ × 66 Pfund: also 1 Eimer absoluter Spiritus = $^{20}/_9$. 66 . 0,79 = 116 Pfund.

3) Die besondere specifische Gewichtstafel der rechten Oberecke.

10. Beisp. Das specifische Gewicht von lufttrocknem (an der Luft so viel als möglich ausgetrocknetem) Weissbuchenholze? — Antw.: 0,64 + $^1/_3$ (0,99 — 0,64) = 0,64 + 0,12 = 0,76. — Und von antrocknem (gut waldtrocknem)? — Antw.: 0,64 + $^2/_3$ (0,99 — 0,64) = 0,64 + 0,24 = 0,88.

11. Beisp. Ein Schock frisches Fichtenreisig à 30 Kubikfuss Masse wiegt in Sachsen? — Antw.: 0,91 mal so viel als 30 Kubikfuss Wasser, also laut n-Tabelle 0,91 . 30 . 45,4 Zollpfund = 1239 Pfund = 12$^1/_3$ Centner.

12. Beisp. Der Scheffel besten Winterweizens wiegt? — Antw.: 0,81 mal so viel als 1 Scheffel Wasser; hat also in Preussen, wo laut m-Tabelle der Scheffel Wasser $^{16}/_9$ Kubikfuss hält und laut n-Tabelle $^{16}/_9$. 66 Pfund wiegt, ein Gewicht von $^{16}/_9$. 66 . 0,81 = 95 preussische Handelspfund.

13. Beisp. Ein Fuder oder Scheffel Steinkohlen in klaren Stücken zu einem solchen in groben Stücken verhält sich der Masse nach? — Antw.: Jenes wiegt im Mittel 0,90 mal so viel und dieses 0,97 mal so viel als Wasser, hat also auch im Verhältniss 90 zu 97 mehr Masse als jenes. Beim blasigen Coaks (0,55) bleibt sich's dagegen gleich, ob derselbe klar oder grob ist.

4) Die trigonometrische Tafel der linken Unterecke zur Ablesung der Sinusse, Cosinusse, Secanten und Reciproken.

14. Beisp. Zu 6$^1/_4$ Grad gehört der Sinus? — Antw. 11 Hundertel oder 0,11.

15. Beisp. Zu 14 Grad die Secante? — Antw.: 103 Hundertel oder 1,03.

(Die Reciprokenkunst siehe sub B).

5) Die trigonometrische Tafel der rechten Unterecke zum Ablesen der Cosinusse, Tangenten und Secanten.

16. Beisp. Zur Neigung von 18 Grad gehört der Cosinus? — Antw.: 95 Hundertel oder 0,95.

17. Beisp. Zum Winkel 4$^1/_2$ Grad welche Tangente? — Antw. 8 Hundertel oder 0,08.

6) Die **Pr.**-Spalte zur Kubirung **Prismatischer** Räume, Körper und Gefässe, zur Verwandlung von □Linien in □Zolle, □Zolle in □Fusse; zur Ersparung aller Division mit 144.

18. Beisp. Ein Balken von 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe hat an Inhalt für jeden Fuss Länge? — Antw.: Die Querschnittszahl 8 . 10 = 80 □Zoll in der *Pr.*-Spalte aufgesucht, zeigt auf 55 (Hundertel) der Hauptskala; also 0,55 Kubikfuss. — Genauer 0,555 Kubikfuss.

19. Beisp. Ein 8 Fuss langer dreikantiger Riegel von 6 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe, also $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ □Zoll Querfläche, hat Inhalt? — Antw.: Da die Zahl 30 der *Pr.*-Spalte auf 0,21 Kubikfuss zeigt, folgt Inhalt = 0,21 . 8 = 1,68 Kubikfuss.

20. Beisp. 500 preussische Kubikfuss Steine sind Schachtruthen (à 144 Kubikfuss)? — Antw.: Da 500 der *Pr.*-Spalte auf 347¼ zeigt, folgt: 3,472 Schachtruthen.

7) Die **Kr.**-Spalte zur Quadrirung der **Kreise** und Kubirung der Walzen, gemeiner Kegel, voller und abgekürzter Parabelkegel, der Neiloid'-schen Kegel, der Sphäroïden, der Stangen- und Stammhölzer, Fassräume u. s. w.

21. Beisp. Ein Kreis von 3 Zoll Durchmesser hat Fläche? — Antw.: Da der Strich 3 der *Kr.*-Spalte auf Strich 5 der Haupt- oder 100-Skala zeigt, folgt 0,05 □Fuss.

22. Beisp. Ein Kreis von 73 Zoll Durchmesser? — Antw.: Da 73 die *Kr.*-Spalte übersteigt, sucht man 7,3 und findet dazu in der Hauptskala 29 (volle) □Fuss; richtiger 29,1 □Fuss.

23. Beisp. Ein 60 Fuss langer Stamm, der in seiner Mitte 15½ Zoll Stärke (Durchmesser) hat, besitzt an Masse? — Antw.: Die 15½ der *Kr.*-Spalte zeigen auf 1,31 Kubikfuss pro 1 Fuss Länge; also Inhalt = 1,31 . 60 = 78,6 Kubikfuss.

24. Beisp. Ein 6 Fuss langes preussisches Fass, bei ¼ seiner Länge zu 18¾ Zoll lichter Weite bemessen, hält wie viel Quart? — Antw.: Da 18¾ der *Kr.*-Spalte auf 1,92 □Fuss zeigen, folgt der Fassraum = 1,92 × 6 = 11,52 Kubikfuss; also Inhalt laut *m*-Tabelle = 11,52 . 27 = 311 Quart.

8) Die **Sx.**-Spalte zur Quadrirung der **Sextanten**; Kubirung der abgestumpften Kegel und Neiloide, der Kugeln und Kugeltheile, der beliebig geformten aus- und eingebauchten, vollen wie abgekürzten, Kreiskörper; der Stämme behufs der grössten Genauigkeit; zur Ablesung der Quadratwurzeln; des Lebend- wie des Schlachtgewichts der Rinder und Schweine u. s. w.

25. Beisp. Ein preussisches Kartoffeldampffass in der Form eines abgekürzten Kegels hat 15 Zoll obere und 20 Zoll untere Weite bei 6 Fuss Tiefe; fasst also wie viel Scheffel? — Antw.: Sx_{15} zeigt auf $20\frac{1}{2}$; Sx_{20} auf $36\frac{3}{4}$ und Sx_{15+20} oder Sx_{35} auf $111\frac{1}{4}$; das macht zusammen $167\frac{1}{2}$ Hundertel oder 1,675; also für 6 Fuss Höhe 1,675 . 6 = 10,05 Kubikfuss. — Aber laut *m*-Tabelle 1 Kubikfuss = $\frac{9}{16}$ Scheffel, also Inhalt 10,05 . $\frac{9}{16}$ = 5,65 Scheffel.

26. Beisp. Die beiden halbkugelförmigen Endstücke eines sonst cylindrischen Dampfkessels von 36 Zoll Weite haben zusammen Fassungsraum? — Antw.: = dem einer Kugel von 36 Zoll oder 3 Fuss Durchmesser = $Sx_{36} \times 12$ = 1,18 . 12 = 14,16 Kubikfuss.

27. Beisp. Ein mittelformiger Ochse mit dem preussischen Zollbande gemessen hatte an halbem Brustumfang 41 Zoll, also wenn dessen Formzahl (laut dem Felde Viehmesskunst) = 20 Hundertel zu setzen, an Lebendgewicht? — Antw.: Sx_{41} zeigt auf 153, also ist das Messknechtsprodukt 153 . 41 = 6273, und das Gewicht $62{,}73 \times 20$ = 1255 Zollpfund.

(Die Wurzelkunst siehe unter B.)

9) Die **Ch.**- oder Chordenspalte zur Ablesung der **Ch**orden, zur Auftragung und Messung von Winkeln u. s. w.

28. Beisp. Die Chorde von $2\frac{1}{2}$ Grad ist wie gross? — Antw.: $Ch_{2\frac{1}{2}^0}$ zeigt auf $4\frac{1}{2}$ der Hauptskala, also ist *Ch.* $2\frac{1}{2}^0$ = 0,045 der Radiuslänge.

29. Beisp. Auf jedem Schenkel eines Feldwinkels 100 Schritt abgemessen, ergab sich eine Spannung oder Chorde von $60\frac{1}{2}$ Schritt; welches Gradmaass hat der Winkel? — Antw.: Der Strich $60\frac{1}{2}$ der Hauptskala zeigt in der *Ch.*-Spalte deutlich auf $35\frac{1}{4}$ Grad.

10) Die **Bg**.- oder Bogenspalte zur Ablesung der Kreis-**Bog**enlängen.

30. Beisp. Der Bogen von 100 Grad ist? — Antw.: Laut Bg_{100} = 174 Hundertel des Halbmessers oder 1,74 mal so lang als der Radius.

31. Beisp. Die Länge des Halbkreises? — Antw.: Laut Bg_{180} = 314 Hundertel oder = 3,14 mal Radius.

32. Beisp. Die Länge von 55 Grad Kreisbogen?
Antw.: Bg_{155} = 267½ Hundertel = 2,675
Bg_{100} = 174½ „ „ = 1,745 abgezogen

macht Bg_{55} = ... 0,93 × Radius.

33. Beisp. Welche Grösse hat der Centrumswinkel eines Walzenausschnitts von 6 Zoll Radius und 20 Zoll Bogenlänge? — Antw.: Bogenlänge für den Radius 1 = $^{20}/_{6}$ = 3,33; oder für den Radius 100 = 333, wozu die *Bg*.-Spalte 190¾ Grad zeigt.

11) Die Kräftetafel im unteren Mittelfeld.

34. Beisp. Welche Kraft, Geschwindigkeit und Leistung bei vortheilhaftester mittler Arbeitsweise (8—9 Stunden täglich) hat das Pferd vor dem Wagen? — Antw.: 60 Kilogramm Zugkraft, 1¼ Meter Geschwindigkeit und pro Sekunde eine Arbeitsverrichtung von 60 . 1¼ = 75 Kilogrammmeter. — Und am Göpel? — 48 Kilogramm Zugkraft, 0,9 Meter Geschwindigkeit und 43 Kilogrammmeter Leistung pro Sekunde.

35. Beisp. Wieviel Menschen ersetzt das Pferd, a) am Lastwagen, b) am Göpel? — Antw.: Des Pferdes mechanische Arbeit pro Sekunde ist ohne Maschine 75, am Göpel 43, des Mannes 12 resp. 8 Kilogrammmeter; das Pferd ersetzt also dort $^{75}/_{12}$ = 6¼ Mann, hier $^{43}/_{8}$ = 5¼ Mann.

36. Beisp. Eine zweipferdige Dampfmaschine, die ohne Expansion arbeitet, braucht stündlich an mittelguten Kohlen? — Antw.: 7 × 2 = 14 Kilogramm.

37. Beisp. Wie verhält sich nach der Heizkraft der Werth von 1 Centner gut lufttrocknen Holzes zu 1 Centner mittlerer Steinkohle? — Antw.: Jenes erzeugt 28, dieses 75 Mengen Siedwassers, also ist des letzteren Werth $^{75}/_{28}$ = $2^{5}/_{7}$ mal so gross.

12) Die Festigkeitstafel im unteren Mittelfelde.

38. Beisp. Wieviel Druck- oder Zugkraft kann eine Holzsäule von 100 □Millimeter Querschnitt aushalten, ehe sie

bis zu ihrer Elasticitätsgrenze, d. h. so zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, dass sie ihre frühere Dimension (und Tragbarkeit) nicht wieder erlangt? — Antw.: Laut Tragbarkeitsmodul bei 2,2 × 100 = 220 Kilogramm.

39. Beisp. Bei welcher Last zerreisst ein Drahtseil von 1 □Zoll sächsisch im Querschnitte? — Antw.: Zerreissungsmodul = 62 (Kilogramm pro □Millimeter); also da 1 sächsischer □Zoll laut 0-Tabelle = 557 mal so gross als 1 □Millimeter ist, bei 62 . 557 Kilogramm = 62 . 557 . 2 Zollpfund = 690 Centner.

40. Beisp. Bei gleicher Form und Grösse des Querschnitts trägt der eiserne Querbalken gegen den fichtenen wieviel mehr? — Antw.: Zerbrechungsmodul des Gusseisens 17 bis 40, im Mittel 28; der Fichte 6 bis 9, im Mittel $7\frac{1}{2}$; also jener $\frac{28}{7\frac{1}{2}} = 3\frac{3}{4}$ mal so viel.

41. Beisp. Eine Säule von festem Sandstein, 12fach so hoch als dick, erträgt welchen Druck pro österr. □Zoll Querschnitt? — Antw.: Zerdrückungsmodul 1 bis 9, hier also etwa 8; und wegen 12facher Höhe reducirt auf $8 . \frac{5}{6} = 6\frac{2}{3}$ oder $6\frac{1}{2}$, macht pro □Zoll (laut 0-Tabelle = 694 □Millimeter) eine Last von $694 . 6\frac{1}{2} = 4511$ Kilogramm. — Bei 6facher Sicherheit also nur $\frac{4511}{6}$ = 750 Kilogramm pro □Zoll.

13) Die Reibungstafel des oberen Mittelfeldes.

42. Beisp. 100 Pfund Last mittels hölzerner Kufen auf dem Boden fortzuschleifen, erheischt an Zugkraft? — Antw.: Auf körnigem Steine Holz bewegt, ist der Widerstand beim Anfang 65, während der Bewegung 40 Hundertel, also anfangs 100 × 0,65 = 65 Pfund, dann 100 × 0,40 = 40 Pfund.

43. Beisp. Um wieviel vermindert man den Zapfenwiderstand bei einem Rade mit gusseisernen Zapfen und Lagern, wenn man den bisher sehr wenig fettigen Zapfen durch ununterbrochene Schmierung in vollkommenster Fettigkeit erhält und der Druck auf den Zapfen 1000 Pfund beträgt? — Antw.: Jener bedingt nach dem Felde Zapfenreibung einen Widerstand von 0,14 . 1000 = 140 Pfund; dieser von nur 0,05 . 1000 = 50 Pfund. Die Verminderung beträgt also fast $\frac{2}{3}$ des früheren Widerstandes.

44. Beisp. Welche Zugkraft erheischt gewöhnlich gutes Fuhrwerk, a) auf bester, glatter und b) auf unebener, kothiger Chaussee? — Antw.: Dort 2 Hundertel der Last,

hier 8 Hundertel der Last. Bei 30 Centner Ladung also dort 30 . 0,02 = 0,6 Centner oder 60 Pfund, hier 30 . 0,88 = 2,4 Centner oder 240 Pfund Zugkraft.

45. Beisp. Ein Pferd zieht im Schritte (60 Kilogramm Zugkraft) auf der horizontalen Eisenbahn? — Antw.: Widerstand = $\frac{1}{3}$ Procent = $\frac{1}{300}$ der Last; letztere kann also 300 × Zugkraft = 300 . 60 = 18000 Kilogramme = 900 Zollcentner betragen.

14) Die Tafel der Holzmesskunst im oberen Mittelfelde.

46. Beisp. Fichten, in Stamm und Krone abholzig (Mittelhölzer), von 60 Fuss Höhe und am Grunde (bei $\frac{60}{20}$ = 3 Fuss Höhe gemessen) 8 Zoll Stärke, haben durchschnittlich an Masse? — Antw.: Klasse II. giebt die Formzahl 48 Hundertel; Formhöhe = 60 . 0,48 = 28½ Fuss; und eine Walze von 8 Zoll Stärke und 28½ Fuss Länge hat laut *Kr.*-Spalte 0,35 . 28½ = 9,9 Kubikfuss (an Stamm und Aesten.)

47. Beisp. Dergleichen Kiefern? — Antw.: Formzahl etwas niedriger, etwa 46; also Formhöhe = 60 . 0,46 = 27½; Masse = 0,35 . 27½ = 9½ Kubikfuss.

48. Beisp.: Haubare Fichten mittlerer Formigkeit bei 80 Fuss Höhe und 12 Zoll Grundstärke (bei $\frac{80}{20}$ = 4 Fuss Höhe) an Stamm und Aesten? — Antw.: Formzahl 0,53; Formhöhe = 80 . 0,53 = 42 Fuss; Walze von 42 Fuss Länge und 12 Zoll Stärke hat laut *Kr.*-Spalte 0,785 . 42 = 33 Kubikfuss.

49. Beisp. Ein abholziger, scheinbar kegelförmiger Tannenstamm (Stammklasse II.) von 50 Fuss Höhe und 8 Zoll Grundstärke (bei $\frac{50}{20}$ = 2½ Fuss Höhe) hat an Holz im Stamme allein? — Antw.: Formzahl 0,43; Formhöhe = 50 . 0,43 = 21½, oder rund 21 Fuss; also an Inhalt Kr_8 × 21 = 0,35 . 21 = 7⅓ Kubikfuss.

50. Beisp. Ein vollholziger Stamm (bei ¾ der Höhe noch halb so stark als am Grunde) von 90 Fuss Höhe und 20 Zoll Grundstärke hat an Schaftmasse? — Antw.: Stammklasse IV; Formzahl reichlich 0,50 oder reichlich ½; also Formhöhe = 45 bis 46; Inhalt = Kr_{20} . 45 = 2,18 . 45 = 98 bis 100 Kubikfuss.

51. Beisp. Die 3fussige Klafter à 108 Kubikfuss Raumgrösse hat im Mittel wieviel feste Holzmasse, a) bei Scheiten, b) bei Knüppeln, c) bei Stöcken? — Antw.: Die Tafel giebt sub 4 für die Scheitklafter 108 . 0,73 = 79 Kubikfuss; für die Knüppelklafter 108 . 0,58 = 63 Kubikfuss; für die Stockklafter = 108 . 0,45 = 49 Kubikfuss.

15) Die Tafel der Viehmesskunst im oberen Mittelfelde.

52. Beisp. Eine sehr schwerformige (lange, alte, daher hinten starke) Kuh hat bei 68 preussischen Zoll Brustumfang, welches Lebendgewicht? — Antw.: Formzahl = 25 Hundertel = $^1/_4$. Halber Umfang 34; dies in der *Sx*.-Spalte gesucht, giebt 105; also Messknechtsprodukt = 105 . 34; Lebendgewicht = $\frac{105 \cdot 34}{4}$ = 892 Zollpfund.

53. Beisp.: Ein Rind von 33 preussischen Zoll halbem Brustumfang hat an Schlachtgewicht (vier Viertel und Nierenfett) a) mindestens, d. h. wenn es sehr leichtförmig oder mager ist, b) im Mittel, und c) höchstens, wenn es sehr schwerförmig und englisch gemästet ist? — Antw.: Das Messknechtsprodukt ist $Sx_{43} \times 43 = 168 \cdot 43 = 7224$; die Formzahl ad a) = $8^1/_2$ Hundertel, b) 10, und c) 15 Hundertel; also a) $72{,}24 \cdot 8^1/_2 = 614$ Zollpfund; b) $72{,}24 \cdot 10$ = 722 Pfund, c) $72{,}24 \times 15 = 1083$ Pfund.

54. Beisp. Ein wohlgenährtes Rind (Klasse II.) von 1200 Pfund Lebendgewicht hat an Fleisch oder 4 Viertel allein? — Antw.: Sub 7 sagt die Tafel 0,49 . 1200 = 588 Pfund.

16) Der Metermaassstab in der Mitte der Tafel giebt 1) die unmittelbare Anschauung des Centimeters, Millimeters und Quadratmillimeters, und ist 2) mit Hülfe der *a*-Tabelle der Rückseite ein Maassstab zur Abnahme der Zoll- und Fussgrösse jedes Landes.

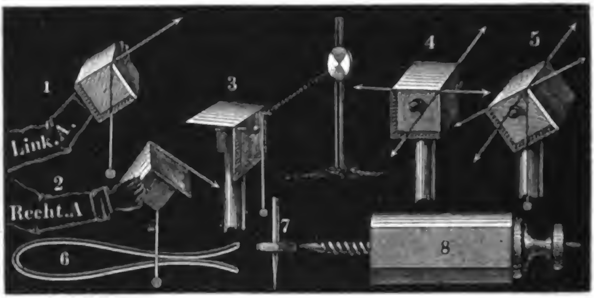
55. Beisp. Laut *a*-Tabelle der Rückseite ist der preussische Fuss = 314 Millimeter = 31,4 Centimeter und hiernach aus dem Centimeterstabe abzunehmen. — Ebenso der preussische Zoll = $\frac{31{,}4}{12}$ = 2,62 Centimeter und hiernach mit einem Zirkelgriffe zu fassen.

AII. Der Visirwürfel.

Beide Oberecken werden so auf einander gelegt, dass die rechte unter die linke zu liegen kommt; und beim Freihandgebrauche Fig. 1 und 2 mittels der Finger, beim Stativgebrauche mittels einer Klemme von Blech oder Draht, die Fig. 6 in natürlicher Grösse zeigt, an einander gepresst.

Im letzteren Falle dient auch der Zapfen Fig. 8 zum Anschrauben des Visirwürfels an einen Stock. Die Ringel der Tragbarkeits- und Festigkeitsspalte dienen dann als Anspiesspunkte. Zum Nivelliren, Zeitmessen und in allen Fällen, wo

die blosse Visirkante nicht genügt, werden Visirnadeln, am besten wie Fig. 7 rechtwinklig auf die Visirebene und rechtwinklig



zur Pendellinie eingesteckt (Sämmtliche Kleinigkeiten vorräthig beim Mechanikus Lehmann in Dresden; vergl. S. 157). Beim Freihandgebrauche die Höhenvisuren mittels des linken Armes, Fig. 1, die Tiefenvisuren mittels des rechten Armes, Fig. 2; (beides nach den in Kapitel 11 gelehrten Vorsichten und Kunstgriffen). Beim Stativgebrauche, jene: wie Fig. 3 und 5 zeigen, diese: mittels Drehung des Stabes um seine Achse.

56. Beisp. (Messung von Höhenwinkeln.) Als man die Visirkante mittels des linken Armes in die Falllinie eines Berges einrichtete, spielte das Pendel auf $17\frac{1}{4}$ der Winkelskala; also ist des Berges Böschungswinkel? — Antw.: $17\frac{1}{4}$ Grad.

57. Beisp. (Messung von Tiefenwinkeln.) Ein Gehülfe visirte gleichzeitig jene Falllinie mittels des rechten Armes von oben nach unten an und fand $17\frac{1}{2}$; so würde des Hanges Abdachung zu setzen sein? — Antw.: Gleich dem Mittel von $17\frac{1}{4}$ und $17\frac{1}{2}$, also etwa 17,4 Grad.

58. Beisp. (Messung von Steigungs- und Neigungsprocenten.) Auf einer Bergstrasse nach dem Kopfe eines daherwandernden Menschen visirt (gleichviel ob mit dem linken oder rechten Arme, d. h. ob nach oben oder nach unten), stand das Pendel auf dem Striche 8 der Tangentenskala. Das heisst? — Antw.: Die Strasse hat auf 100 Ruthen horizontal 8 Ruthen Neigung oder 8 Procent.

59. Beisp. (Messung von Grundreductionen.) Der an einen Kettenstab geschraubte Knecht zeigt in der *COS.*-Spalte mittels Pendels einen Neigungscosinus von 98

für den einen, 5 Ruthen langen, Kettenzug; also ist dessen Horizontalgrösse? — Antw.: 98 Procent oder 0,98 . 5 = 4,90 Ruthen.

60. Beisp. (Messung von Aufreductionen.) Die Horizontalgrösse eines geneigten Feldes ist zu 50 Morgen bestimmt worden. Auf der Höhe desselben stehend und mittels der rechten Hand die Falllinie noch untenhin einvisirend, zeigte des Knechtes Pendel den Böschungswinkel zu 15°; also gleichzeitig auch in der *COS.*-Spalte 96½, in der *TAN.*-Spalte 27, in der *SEC.*-Spalte 103½; das heisst? — Antw.: Die Abdachung des Terrains beträgt 15 Grad; der Horizontalgrund 96½ Procent der wirklichen Oberfläche; die Steigung 27 Procent der Horizontallänge; die Oberfläche 103½ Procent des Grundes oder 3½ Procent grösser als die Horizontalfläche; mithin = 1,035 × 50 = 51,75 Morgen.

61. Beisp. (Höhen- oder Tiefenmessung bei horizontaler Lage der Messleine.) Die Horizontallänge der Messleine betrage (50 Fuss oder) 100 Halbfusse. Man stand tiefer als der Baum, arbeitete also nur mit dem linken Arme, und fand die Höhentangente der Wipfelvisur 74, der Fussvisur 10; also die Baumhöhe? — Antw.: 74 — 10 = 64 Halbfusse = 32 Fuss.

62. Beisp. (Messung von Ober- und Unterhöhen bei schiefer Lage der Messlinie.) Nach dem Anfangspunkte des an einem Baume beliebig befestigten und beliebig geneigten Messbandes visirt, zeigte das Pendel auf die *SEC.* 107, worauf der Beobachter seine Stellung so korrigirte, dass die Bandlänge bis zum Auge wirklich 107 (Fusse oder Halbfusse u. s. w.) betrug. Zeigte hierauf das Pendel beim Visiren nach dem Wipfel die Höhentangente 40, nach dem Fusse die Tiefentangente 49, so ist des Baumes Höhe 89 Fusse oder Halbfusse, je nach der gewählten Einheit der Bandlänge, deren Horizontalgrösse man also gar nicht zu wissen braucht!

63. Beisp. (Absteckung von rechten Winkeln.) Im ebenen Terrain durch Fig. 4, im bergigten durch Fig. 5 veranschaulicht.

64. Beisp. (Nivelliren). Durch Fig. 3 veranschaulicht; nach Vorschrift des Kapitels 9 mittels verfeinerter und justirter Visur.

AIII. Die Rückseite.

1) Die *K*-Spalte; das Seitenstück der *Kr.*-Spalte für Decimal- und jedwedes Maass.

65. Beisp. Ein Kreis von 2,1 Fuss Durchmesser hat Fläche? — Antw.: $K_{2,1}$ zeigt auf 3,5 □Fuss.

66. Beisp. Ein Stamm von 18,4 Decimalzoll Mittenstärke und 40 Fuss Länge hat Holzmasse? — Antw.: $K_{18,4}$ zeigt 266 □Zoll oder 2,66 □Fuss, also Inhalt = 2,66 . 40 = 106,4 Kubikfuss.

67. Beisp. Ein zuckerhutförmig gebauter Getreidefeimen von 24 Fuss Durchmesser und 60 Fuss Höhe hält wieviel Schock Garben à 300 Kubikfuss? — Antw.: Zu $K_{2,4}$ gehören 4,11 □Fuss; zu K_{24} also 411 □Fuss Grundfläche. Inhalt also = 411 . 30 = 12330 Kubikfuss oder $\frac{12330}{300}$ = 41 Schock.

2) Die *S*-Spalte; das Seitenstück der *Sx.*-Spalte, aber für Decimal- und jedwedes Maass.

68. Beisp. Ein sächsisches Bierglas von 3 Zoll oberer und und 4 Zoll unterer Weite und 5 Zoll Tiefe enthält? — Antw.: S_3 = 1,18 □"; S_4 = 2,08; S_7 = 6,41; zusammen 9,67 □"; also Inhalt = 9,67 × 5 = 48,35 Kubikzoll.

69. Beisp. Ein eingebaucht kegelförmiges Gefäss von 2 Fuss oberer, 5 Fuss Boden- und 2³/₄ Fuss Mitten-Weite und 6 Fuss Tiefe hat an Raumgehalt? — Antw.: S_2 = 0,5 □'; 4 $S_{2^3/_4}$ = 4 . 1,0 = 4,0; S_5 = 3,2 □Fuss; zusammen 7,7 □Fuss; also Inhalt = 7,7 × 6 = 46,2 Kubikfuss.

3) Die Maasstafeln *a* bis *l* der linken und rechten Unterecke.

Sie sind selbstverständlich und lassen in Verbindung mit denen der Vorderseite kaum irgend eine erhebliche Frage der Maasskunde unbeantwortet.

70. Beisp. Ein 20jähriger Lärchenbestand in Baiern hatte pro Jahr und Tagwerk 200 Kubikfuss Holz producirt; wieviel ist das in sächsischen Zahlen? — Antw.: Laut *k*-Tabelle sind 166 Kubikfuss baier. Ertrag = 295 Kubikfuss sächs.; also 1 Kubikfuss baier. = $^{295}/_{166}$ Kubikfuss sächs.; also 200 Kubikfuss baier. = $^{295}/_{166}$. 200 = 355 sächs. Kubikfuss pr. sächs. Acker.

71. Beisp. Mit welcher Ziffer reducirt sich ein preussischer Ertrag von 200 Scheffeln pro Morgen auf österreichische Maasse? — Antw.: Laut *l*-Tabelle ist 1 Scheffel preuss. = 2,01 Metzen österr.; also 200 Scheffel = 2,01 . 200 = 402 Wiener Metzen pro Joch.

4) Die Zins- oder Vor- und Nachwerths-Tafel.

(In folgenden Beispielen eine 4procentige Gelderverzinsung angenommen.)

72. Beisp. Ein nach 10 Jahren erst eingehender Ertrag von 100 Thalern hat einen gegenwärtigen Werth von? — Antw.: Auf Zeile: 10 Jahr, steht in der Spalte 4% der Vorwerth 0,676; also der gesuchte Baarwerth = 0,676 × 100 = 67,6 Thaler.

73. Beisp. Welchen Werth hat ein Vorertrag von 100 Thalern zehn Jahre später? — Antw.: Den 10jährigen Nachwerth giebt der Knecht zu 1,480; also hier zu 1,480 . 100 = 148 Thaler.

74. Beisp. Wie gross ist der Zinsenverlust bei einer Anlage von 10 Thalern, die 50 Jahre lang nichts abgeworfen hat? — Antw.: Laut Nachwerthstafel ist nach 50 Jahren das Kapital 1 angewachsen auf 7,107; der 50jährige Zinseszins also = 6,107; aufs Kapital 10 aber = 6,107 . 10 = 61,07 Thaler.

5) Die Rententafel.

(Die Vermehrung der Gelder ebenfalls immer zu 4% genommen.)

75. Beisp. Welchen gegenwärtigen Werth hat eine sicher zu erwartende 30malige Jahresnutzung von 100 Thalern? — Antw.: Laut Tafel der Anfangswerthe beträgt der gefragte Baarwerth das 17,29fache; also die Grösse 17,29 × 100 = 1729 Thaler.

76. Beisp. Welchen Werth oder welche Summe erreicht eine dergleichen 30malige Jahresnutzung bis zu Ende des 30sten Jahres? — Antw.: Nach der Tafel der Endwerthe das 56,08fache oder die Höhe 5608 Thaler.

6) Die Holzzuwachstafel der linken Oberecke.

77. Beisp. Ein gefällter Stamm, etwas entwipfelt, hatte in der Mitte, entrindet, 9 Zoll Stärke, und zur Breite der letzten 3 Jahresringe auf der einen Seite 3 Zehntel-, auf der entgegengesetzten 4 Zehntel-Zoll; zusammen also 7 Zehntel-Zoll Durchmesserzuwachs; er hatte also gegenwärtig an jährlichem Massenzuwachs? — Antw.: Relati-

ves $D = \frac{9}{0,7} = 90 : 7 = 13$; und zu $D = 13$ zeigt die *Min.*-Spalte 16 Procent; also hatte der ganze Baum pro Jahr noch $^{16}/_{3} = 5^{1}/_{3}$ Procent Holzzuwachs.

78. Beisp. Ein stehender Stamm zeigte am Grunde 13 Zoll Stärke excl. Rinde; und mittels Einkerbens auf beiden Seiten in den letzten 5 Jahren einen Stärkenzuwachs von (3 Zehntel-Zoll + 2 Zehntel-Zoll) = 5·Zehntel-Zoll. Sonach sein laufender Massenzuwachs im Procentsatze? — Antw.: Relative Aussenstärke $= ^{130}/_{5} = 26$ Zoll; und zu $D = 26$ sagt der Knecht: »Mindestens 7,8, höchstens 11,7, oder pro Jahr mindestens $\frac{7,8}{5} = 1^{1}/_{2}$ Procent und höchstens $\frac{11,7}{5} = 2^{1}/_{3}$ Procent.« (Die genauere Einschätzung innerhalb dieser Barrieren s. S. 652 u. f.)

7) Die Waldmassentafel der rechten Oberecke.

(Nichtpreussen setzen nach S. 680 ihre Tafel in diese Ecke ein.)

79. Beisp. (Einfacher Abstandsstreifen.) An einem jungen Kiefernorte ward ein 300 Fuss langer Streifen abgesteckt, der nach einiger Regulirung bei 7 Fuss Breite und 43 Stämmen die Bedingung erfüllte: die Rechnungsbreite oder Länge dividirt durch Stammzahl (hier $^{300}/_{43} = 7$) muss sein = wirklicher Breite (= 7). Wenn nun die Stämme im Mittel 20 Fuss Formhöhe und 6 Zoll Grundstärke hatten, welche Bonität besitzt der Ort, wenn er a) in Preussen, b) in Oesterreich, c) in Sachsen liegt? — Antw.: Die Bestands-Abstandszahl ist $\frac{7 \times 12 \text{ Zoll}}{6 \text{ Zoll}} = 14$; und zu Abstand 14 und Formhöhe 20 giebt die Bestandstafel der rechten Oberecke, wenn

die preuss. eingesetzt ist:	104.20 = 2080	pr. Kbfss. p. Morg.
„ österr. „ „	231.20 = 4620	öst. „ „ Joch.
„ sächs. „ „	276.20 = 55,20	sächs. Normklftr. pro Acker.

80. Beisp. (Dreifacher Abstandsstreifen.) In einem alten Buchenbestande ein Streifen von 200 Fuss Länge, deren 9faches dividirt durch die Stammzahl des Streifens hier seine Breite geben muss, was bei 60 Fuss Breite und 30 Stämmen Inhalt zutraf (Rechnungsbreite $\frac{200.9}{30} = 60$). Wenn nun die summarische Grundstärke dreier Mittelstämme 40 Zoll und die mittlere Formhöhe des Ortes 50 Fuss betrug, wie gross die Masse in preussischen und

baierischen Ziffern? — Antw.: Abstandszahl $= \frac{60\,\text{Fuss}}{40\,\text{Zoll}}$ $= {}^{720}/_{40} = 18$, wozu bei 50 Fuss Formhöhe giebt: die preuss. Bestandstafel der rechten Oberecke:
62,9 . 50 = 3145 Kubikfuss pro preuss. Morgen,
und, wenn die baier. n. S. 680 in diese Ecke gesetzt war:
97,0 . 50 = 4850 baier. Kubikfuss pro Tagewerk.

8) **Die Geschwindigkeitstafel des linken und oberen Randes**

ist selbstverständlich. Die Multiplikation ihrer Zahlen mit denen der Oberzeile der a-Tabelle giebt die Geschwindigkeiten in Landesfussen.

81. Beisp. Die Geschwindigkeit eines trabenden Pferdes in sächsischen Zahlen ist? — Antw.: Laut Oberrand 4 bis 5 Meter; also laut a-Tabelle = 3,53 mal 4 bis 5 = 14 bis 18 sächsische Fuss.

82. Beisp. Beim Schnellaufe des Dampfwagens braucht derselbe zu einer geographischen Meile wieviel Minuten? — Antw.: Laut e-Tabelle ist 1 geographische Meile = 7420 Met.; laut Oberrand der Weg des Schnellzuges pro Secunde 27 Meter; also Zeit pro Meile = 7420 : 27 = 274 Secunden = 4,6 Minuten.

9) **Die Ausdehnungstabelle des rechten Randes.**

(Die lineare beträgt $^1/_3$, die Flächen-Ausdehnung $^2/_3$ von der des Volumens. Auf die volle Thermometerskala 100° C. = 80° R. bezogen, bedeuten die Ziffern Zehntausendtel, auf 1° C. bezogen Milliontel.)

83. Beisp. Eine Zinkrinne dehnt sich der Länge nach aus? — Antw.: Für 100 Grad Temperaturveränderung um $^{88}/_3 = 29$ Zehntausendtel ihrer Länge; also für 1 Grad 29 Milliontel.

84. Beisp. Wenn die Luft um 30 Grad wärmer wird, um wieviel wird sie da dünner und leichter? — Antw.: Jeder (Centi-) Grad Wärme dehnt die Luft aus um 3665 Milliontel ihres Volumens; also 30° um 10950 Milliontel; als Decimalbruch: 0,010950 also circa 1 Hundertel oder 1 Procent.

85. Beisp. Eine 20 Fuss oder 200 Decimalzoll lange Eisenbahnschiene dehnt sich zwischen 30 Grad Kälte und 50 Grad Wärme aus? — Antw.: Volumenausdehnung für 1 Grad 35 Milliontel des Volumens; lineare $^{35}/_3 = 12$ Milliontel der Länge; für 80 Grad Temperaturdifferenz

= 12 . 80 = 960 Milliontel, also bei 200 Zoll Länge, um 960 . 200 = 192000 Milliontel Zoll = 0,19 Zoll = $\frac{1}{5}$ Zoll fast.

B. Feinere Praxis.

Schon der Mann der gröberen Praxis kann bei rein sklavischer Befolgung der Lehren des Messknechtshandbuches die vorstehenden achtzig Anwendungen auf achthundert erweitern, ohne dass er eine einzige wiederhole. Dass dann der mathematisch Sachverständige des Knechtes Arbeiten durch Kreuz- und Querbenutzung desselben, der Extensität nach bis ins Ausserordentliche variiren könne, wird für den zur Evidenz, der die kleine Mühe nicht scheut, sich in den Geist des Instruments mittels seines Buches hineinzuarbeiten. Dabei wird ein Solcher leicht gewahren, wie er auch der Intensität nach, wenn auch nicht in allen, so doch in vielen, recht wesentlichen Arbeitszweigen, im Vergleich zu dem, was das Leben gewöhnlich in mathematischen Dingen zu leisten praktisch vermag und praktisch bedarf, hinsichts der Accuratesse und Feinheit der Leistungen kaum etwas zu wünschen lässt*).

So zum Beispiel gestattet die Hauptskala der Vor- und Rückseite die Ablesung der Kreisflächen bis auf das einzelne Tausendtel eines □Fusses und für jedes halbe, ja selbst einzelne, Hundertel eines Durchmesserzolles, und also auch eine demgemäss feine Kubirung aller Kreiskörper. Der Knecht übertrifft sonach hinsichts Feinheit, Vollständigkeit und Bequemlichkeit alle im technischen Haushalte bisher gebräuchlichen Kreis- und Kubiktafeln namentlich auch dadurch, dass er die bei allen bisherigen Tafeln die feineren Arbeiten so sehr erschwerenden Interpolirungsrechnungen gänzlich erspart.

Aehnliches gilt von der Sextanten-, Chorden- und Bogentabelle, von den trigonometrischen Tafeln und seiner Forst- und Vieh-Schätzungskunst. Und selbst abgesehen davon, dass er vermöge seiner Secantenspalte als Höhenmesser bequemer und schneller als jeder der bisher bekannten arbeitet, ist er im Allgemeinen als solcher, ingleichen als Winkelkopf und Aufnahmeinstrument für ein Genauigkeitsbedürfniss ähn-

*) Wem diese Eigenschaft des Knechtes von besonderem Werthe ist, hat dies wesentlich mit der anerkennungswerthen mathematischen Gesinnung und mühseligen Uneigennützigkeit unseres Lithographen, des Herrn Cameralvermessungscondukteurs Werner, zu danken.

wie es im forst- und landwirthschaftlichen und technischen Haushalte das gewöhnliche ist, nicht minder ausreichend. Denn während er schon aus freier Hand die Baumhöhen bis auf 1—1½ Fuss giebt, arbeitet er auf Stativ und mit verfeinerter Visur noch drei- bis viermal genauer. Selbst Berghöhen von 3 — 600 Fuss haben wir aus freier Hand und selten mit mehr als 5 Procent Fehler beobachtet.

Und eben so giebt er bei nur einmaliger Beobachtung aus freier Hand die wahre wie die bürgerliche Zeit nur selten bis auf mehr als 2 bis 3 Minuten ungenau; und bei Wiederholungen, namentlich in zwei entgegengesetzten Tageszeiten, arbeitet er bis auf die einzelne Minute richtig.

86. **Beisp.** Die Kreisfläche von 7,1 Duodecimal-Zoll Durchmesser? — **Antw.:** Laut $Kr_{7,1} = 0,275$ □Fuss.

87. **Beisp.** Kreis von 8,95 Duodecimal-Zoll Durchmesser? — **Antw.:** Laut $Kr_{8,9\frac{1}{2}}$ ganz unzweifelhaft = 0,436 □Fuss.

88. **Beisp.** Kreis von 4,8 Zoll in □Zollen? — **Antw.:** Laut K-Spalte der Rückseite ist $K_{4,8} = 18,1$ □Zoll.

89. **Beisp.** Für denselben Durchmesser die Kreisfläche mittels der S-Spalte? — **Antw.:** S_{48} giebt 301,6 □Zoll; also $S_{4,8} = 3,016$; sonach ist $K_{4,8}$ das Sechsfache oder = 18,096 □Zoll; oder bei Decimalmaass in □Fussen = 0,18096, wo höchstens die letzte Ziffer ein wenig unsicher ist.

90. **Beisp.** 601,2 Duodecimalquadratzoll in □Fussen? — **Antw.:** Laut $Pr_{60,12} = 0,426$; also fürs 10mal so grosse auch 4,26 □Fuss.

91. **Beisp.** Zum Winkel 105,1 Grad und Radius 10 Ruthen gehört eine Bogenlänge? — **Antw.:** $Bg_{105,1}$ giebt 1,834; also bei $r = 10$ die Länge 18,34 Ruthen.

92. **Beisp.** Bei 400 Ellen Radius und 300 Ellen zugehöriger Eisenbahnkurve ändert sich die Richtung der Bahn, bis auf's Zehntelgrad genau, um wieviel? — **Antw.:** Weil die Bogenlänge für den Radius $1 = \frac{300}{400} = 0,750$, also für den Radius $100 = 75$, und die für 100 Grad = 174,4, folgt für die um 100 Grad vergrösserte Kurve $75 + 174,4 = 249,4$, wozu die $Bg.$-Spalte 142,4°, so dass der gefragte Winkel = 42,4 Grad gross ist.

93. **Beisp.** Die Reciproke der Zahl 111½? — **Antw.:** Laut $COS.$-Spalte der linken Seite = 0,00903.

94. **Beisp.** Die Quadratwurzel aus 251¾? — **Antw.:** Die 251¾ der Hauptskala zeigt auf 5262 der $Sx.$-Spalte; was dreifach die Ziffer 15786 oder die Wurzel 15,8 giebt.

Genauer aber noch als 15786
2) 7893, d. h. als 15,865.
1586493

95. Beisp. Die Quadratwurzel aus $725\frac{1}{4}$? — Antw.: Das Viertel 181,3 in der Hauptskala zeigt auf 4465 der *Sx.*-Spalte; und es ist sonach die Wurzel
im Gröberen = 4465 × 6 = 26,790; im Feinern
2) 13395
aber = 26,92.

96. Beisp. Der Sinus von 30,1 Grad? — Antw.: Laut *Sin.*-Spalte = 0,501 bis auf's Tausendtel genau.

97. Beisp. Der Cosinus von $16\frac{3}{4}$ Grad? — Antw.: Laut *Cos.*-Spalte = 0,958 bis auf's Tausendtel genau.

98. Beisp. Zur Tangente 0,061 gehört ein Winkel? — Antw.: Laut Winkel-Spalte 3,5 Grad bis 3 Min. genau.

99. Beisp. Die Cotangente von 35 Grad? — Antw.: Gleich Tangente von 54,9°; und laut *TAN.*-Spalte = 1,423 wo die 3 allerdings zu schätzen ist.

100. Beisp. Ein Sinus von 40° 18′ oder 40,3 Grad ganz sicher bis auf die 3. Decimale? — Antw.: Laut *Ch.*-Spalte ist die Chorde 80,6° = 1,294; also der *Sin.*

$$40^\circ\ 18' = \frac{1,294}{2} = 0,647.$$

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Buch.

Praktische Arithmetik.

Zweites Buch.

Praktische Planimetrie.

Drittes Buch.

Praktische Stereometrie

oder der Messknecht als Körpermesser für ·

Viertes Buch.

Zeitmesskunst.

Siebentes Buch.

Viehmesskunst

oder der Messknecht als Mastknecht zur:

Erstes Buch.

Praktische Arithmetik

oder

der Messknecht

als:

1) Maassknecht.

2) Reciprokentafel.

3) Wurzelausziehee.

4) Zins-, Zuwachs- und Diskont- und

5) Renten-Rechner.

Vorbemerkung.

Da die Bestimmung des Messknechts als Brieftascheninstrument vornehmlich darin besteht, alle jene mathematischen Arbeiten zu erleichtern und zu ermöglichen, welche aus dem Kopfe oder ohne besondere Tabellen und Werkzeuge nur schwer oder gar nicht ausführbar sind, so kann auch, selbstverständlich, die Aufgabe seines Handbüchleins keine andere sein, als arithmetische Geschäfte nur solcher Art zu behandeln.

Messknechtsfreunde ohne mathematische Schule finden die ihnen etwa noch nöthigen arithmetisch-algebraischen Ergänzungen und Erläuterungen im Anhange.

Erstes Kapitel.

Der Messknecht als Maassknecht.

---

§. 1. Von allererster Nothwendigkeit für die in den Gebieten des technischen, kommerciellen und überhaupt des geschäftlichen Lebens Anwendung findende Arithmetik erscheint ein Hülfsmittel, das über die Maassverhältnisse der verschiedenen Länder schnell und übersichtlich die nöthige Auskunft giebt und die so häufig vorkommenden Reduktionsarbeiten ermöglicht.

Dergleichen Verhältniss- und Reduktionsfragen treffen uns aber nicht immer blos in der Nachbarschaft unserer Bücherschränke, aus denen heraus uns allerdings ein Nelkenbrecher, Schneider oder sonst ein gutes metrologisches Taschenbuch seinen weisen Rath anbietet; sie kommen vielmehr eben so zahlreich, und wohl noch zahlreicher, am dritten Orte: beim Journallesen, in den Vereinen, auf der Strasse und allenthalben im bewegten Leben, oft wie der Blitz aus heiterem Himmel, über uns. Je weniger aber das messende oder rechnende Publikum aus unterschiedlichen Gründen geneigt sein dürfte, den Taschenreichthum seiner Kleidung kontinuirlich für mathematische Handbücher zu verwenden, um so mehr dürfen wir hoffen, dass unser kleines mathematisches Aschenbrödel, das ohne Beschwer für seinen Herrn kontinuirlich in der Brieftasche desselben wohnen kann und soll, — schon beim ersten Debüt seiner Praxis, bei dem es sich als Maassrath rekommandirt, nicht ohne alle Gönnerschaft bleiben werde.

§. 2. Die beiden unteren Eckfelder der Rückseite bilden nämlich eine — wenn auch natürlich nicht all-, so doch immerhin, wie wir sehen werden — ziemlich weit-umfassende Maassverhältnisskunde. Und im Interesse der Rechnungen der Mechanik, Physik und körperlichen Geometrie ist diese Verhältnisskunde noch durch fünf im unteren Mittelfeld der Vorderseite befindliche Tabellen vervollständigt. Sämmtliche Tabellen sind theils doppelzeilig, theils einfach, und durch die Buchstaben *a* bis *p* bezeichnet. Der Kürze halber werden wir statt: Tabelle *a*, Tabelle *b*, etc. künftig immer schreiben: *a*-Tab., *b*-Tab.; -Tab.

Die untere Zeile der Doppeltabellen nennen wir auch die Verhältnisszeile, weil ihre Zahlen das Grössenverhältniss der Fusse, Kannen, Pfunde etc. etc. der betreffenden Länder ausdrückt (s. S. 7). Alle anderen Zeilen, also die der einzeiligen und die oberen der doppelzeiligen Tabellen, sind und heissen Gleichungszeilen, indem sie gleiche Werthe vorstellen und also, mit dem Gleichheitszeichen verbunden, als Gleichung behandelt werden können (s. S. 7).

Diese Bemerkung gilt ohne Einschränkung für alle Tabellen der Rückseite; wogegen die einzige Zeile der *o*-Tabelle eine Verhältnisszeile und die beiden Zeilen der *m*-Tabelle selbstverständlich weder Verhältniss- noch Gleichungswerthe sind.

§. 3. Besagte Maasstafeln beziehen sich auf die Maasssysteme der Länder:

Oesterreich, Preussen, Baiern, Sachsen, Hannover, Würtemberg, Hessen-Kassel, Hessen-Darmstadt, Baden (und Schweiz), Braunschweig, England und Frankreich, dessen altes oder sogenanntes Pariser Maass in den 12 nach obiger Folge an einander gereihten Spalten der Tafeln die letzte in sich fasst, während das neufranzösische oder Metermaass für alle Doppeltabellen von *a* bis *p* die Vergleichungseinheit abgiebt, was auch aus den Ueberschriften dieser Tabellen zu ersehen ist.

§. 4. Bekanntlich haben die Franzosen zu ihrer Maass-

einheit (*Mètre*, ausgesprochen: Meter) den durch geographisch-astronomische Messungen bestimmten zehnmillionsten Theil des Viertels (Quadranten) eines Erdmeridianes gewählt, in der Absicht, dadurch eine unerschütterliche, überall und zu allen Zeiten genau in derselben Grösse wieder zu findende Basis zu besitzen. Wenn die mathematische Kritik die volle Erreichung dieses Zweckes auch nicht zugestehen kann, so ist doch immerhin der innere Organismus des neufranzösischen Systems so sinnreich und einfach, dass man ihm die recht baldige Erreichung des Weltbürgerrechtes von ganzem Herzen wünschen muss.

§. 5. In wiefern das neufranzösische oder Metersystem unter sich den innigsten Zusammenhang und in seinen Benennungen eine höchst einfache Gliederung besitzt, darf, als im Allgemeinen bekannt, wohl vorausgesetzt werden. Doch wird eine Erinnerung an folgende Wahrheiten nicht unnütz sein.

Zehn Meter in □, oder das Quadratmeter 100fach (100 □Meter), bilden als *Are* (sprich: Aar) die Flächeneinheit für grössere, z. B. Feldflächen.

Das Körper- und Hohlmaass ward dadurch gebildet, dass man das Zehntelmeter (Decimeter) zu einem Würfel formirte, dessen Raumgrösse *Litre* (spr. Liter) heisst. Auch dient der Würfel des ganzen Meter, d. h. das Kubikmeter unter dem Namen *Stere* (spr. Steer) als Maasseinheit für grosse Körpermassen (Holz, Steine u. s. w.). Die Basis der Gewichte leitete man vom Meter dadurch ab, dass man den hundertsten Theil des Meter (Centimeter) zu einem Würfel gestaltete und mittelst Eintauchung und Abwägung desselben das Gewicht eines gleichen Raumes (Kubikcentimeters) destillirtes Wasser bei 3° *Réaumur* (bei welcher Temperatur des Wassers die grösste Dichtigkeit hat) ermittelte und mit dem Namen *Gramme* (spr. Gramm) belegte.

Die fernere Eintheilung ab- und aufwärts von allen diesen Einheiten ist eine streng decadische oder zehntheilige; und eben so konsequent, wie erwähnt, die Benennung dieser Unter- und Oberabtheilungen gebildet; nämlich da-

durch, dass man nach unten die entsprechenden lateinischen, nach oben die griechischen Zahlwörter den Einheitsnamen vorsetzte. So bedeutet z. B.

1 Milligramm	soviel als $^1/_{1000}$	oder 0,001	Gramm.
1 Centigramm	soviel als $^1/_{100}$	oder 0,01	»
1 Decigramm	soviel als $^1/_{10}$	oder 0,1	»
1 Gramm	. . . .	1,0	»
1 Dekagramm	. . . .	10	»
1 Hektogramm	. . . .	100	»
1 Kilogramm	. . . .	1000	»
1 Myriagramm	. . . .	10000	»

Und so auch beim Meter, Ar, Ster, Liter.

Noch ist zur Vermeidung irgend eines Missverständnisses des Folgenden zu erwähnen nöthig, dass unter pariser Maass immer das altfranzösische gemeint ist, sowie dass die Franzosen einen neuen Fuss, unlogischer Weise zu $^1/_3$ Meter Länge, angenommen haben, und dass im Gebrauche ihre neue Toise ($= 2^m = 6'$) unserem Lachter, ihr Myriameter (10000^m oder die neue *Lieue*) unserer Meile, ihr Hektar (100 *Are*) unserem Acker, Morgen u. s. w., ihr Hektoliter (100 Liter) unserem Scheffel, Himpten u. s. w., ihr Kilogramm (1000 Gr.) unserem Pfunde entspricht, zwar nicht hinsichts der Grösse, aber doch hinsichts des Gebrauchs. — Auch ist das Liter, als Würfel des Zehntelmeters, tausendmal kleiner als das Ster oder: 1 Kubikmeter = 1000 Liter.

Die Schreibart anlangend, wird das Meter in der Regel durch ein oben an der Zahl als Exponent angehängtes *m* bezeichnet, während ein *mm* das Millimeter ein *mq* oder *qm* das □Meter, ein *mc* oder *cm* das Kubikmeter, ein *k* das Kilogramm, *ha* Hektare, *l* Liter, *hl* Hektoliter bedeutet. Gewöhnlich schreibt man diese Exponenten gleich nach den Ganzen und also vor den Bruch- oder Decimalstellen.

Z. B. $5^m,24$ bedeutet: 5 Ganze 2 Zehntel und 4 hundertel Meter oder $5\frac{24}{100}$ Meter oder 5 Meter 2 Decimeter 4 Centimeter.

$0^{cm},407$ bedeutet $\frac{407}{1000}$ Kubikmeter oder Ster; oder 0 Ganze 4 Deci- und 7 Milli-Ster.

Gehen wir nun zu dem metrolog. Apparate unsers Knechtes.

§. 6. Die Fuss-Tabelle (Tab. *a*) vergleicht in ihrer oberen Abtheilung das Meter mit den Fussen der überschriftlich angedeuteten Staaten und in der unteren jeden dieser Fusse mit dem Tausendtelmeter oder Millimeter; und jede vergleicht auch dadurch diese Fusse untereinander.

So lesen wir z. B. ab:

1) Aus der oberen Zeile:

Das Meter ist = 3,19 preuss. Fuss, und auch = 3,33 = $3^1/_3$ badisch. Fuss u. s. w.; also auch: 3,19 preuss. Fuss sind gleich 3,33 badischen; 1 preuss. = $\frac{3,33}{3,19}$ = 1,44 badisch., od. 100 preuss. = 144 badisch. Fussen; u. s. w.

2) Aus der unteren Zeile:

Der preuss. Fuss = 314 Millimeter = 0,314 Meter.
Der badische Fuss = 300 » = 0,3 »

oder $^3/_{10}{}^m$; also auch: die Grösse des preuss. Fusses verhält sich zu der des badischen wie 314 : 300 = 1,047 zu 1, oder nahe 105 zu 100.

3) Die Oberzeile dieser und der folgenden Doppeltabellen giebt sonach stets die Gleichung der nebeneinandergestellten Ländermaasse, die Unterzeile dagegen das Verhältniss; z. B. für die 3 ersten Spalten: 316 österr. Fuss = 319 preuss. Fuss = 343 baierische, und 1 österr. Fuss : 1 preuss. Fuss : 1 baier. Fuss. = 316 : 314 : 292, weshalb wir jene auch die Gleichungs-, diese die Verhältniss-Zeile nennen können.

4) Wenn es demnach gilt, den österreichischen Fuss im alten pariser auszudrücken:

3,16 österr. Fusse sind = 3,08 pariser (weil beides = 1 Meter), also 1 österr. Fuss = $\frac{3,08}{3,16}$ oder = $\frac{308}{316}$ = 0,97 pariser Fuss, oder wenn man das Grössenverhältniss beider ausdrücken will:

Oesterr. Fuss : pariser Fuss wie 316 : 325 (denn jeder hält je soviele Millimeter), also auch wie $1 : \frac{325}{316} = 1 : 1{,}03$, d. h. der altpariser ist 3 Proc. grösser als der österreichische.

5) Auch ist an sich klar, dass jede dieser Zeilen auch eine Vergleichungstabelle aller derjenigen Untermaasse und Obermaasse ist, welche dieselbe Eintheilungszahl gegen das Hauptmaass besitzen. Daher sind z. B. die Zahlen der Fusstabelle auch gültig für die Zolle zwischen allen Ländern, die den Duodecimalzoll haben; desgleichen für die Klafter und das Lachter und die Toise (als ein Sechsfussmaass) u. s. w.

6) Man sieht hieraus, wie man leicht und schnell alle auf Meter und Fusse, und Fusse unter sich, bezügliche Vergleichungen und Reduktionen mit der *a*-Tab. auszuführen vermag. Einige Beispiele mögen das noch weiter vor Augen führen.

1. Beispiel. Wenn ein würtembergischer Forstmann von 100 Fuss Bestandeshöhe spricht, so ist das in preussischem Maasse?

Die Oberzeile der Tabelle sagt:

3,49 würtemb. Fuss = 3,19 preuss.; oder 1 w. Fuss $= \frac{319}{349}$, also

$$100 \text{ w. Fuss} = \frac{319}{349} \times 100 = 91{,}4 \text{ preuss. Fuss.}$$

2. Beispiel. Das Verhältniss des darmstädter Fusses zu dem baierischen anzugeben.

Der darmstädter hat laut Unterzeile 250^{mm}, der baierische 292, also verhält sich jener zu diesem, wie 250 : 292, d. i. wie 1 : 1,17.

3. Beispiel. Ein sächsischer Ingenieur will den Wasserzufluss eines Baches aus dessen Profil und mittlerer Geschwindigkeit ermitteln und zur Messung des letzteren sich in Ermangelung einer Sekundenuhr ein Halbsekundenpendel fertigen mittelst eines dünnen Fadens und einer Bleikugel. Bekannt ist es ihm, dass, in preuss. Zollen ausgedrückt, die Länge des Sekundenpendels 38, also die des Halb-

sekundenpendels $\frac{38}{2^2} = \frac{38}{4} = 9\frac{1}{2}''$ beträgt. Da er aber ausser dem Messknecht nur einen sächsischen Zollstab bei sich hat, so liest er ab und rechnet:

$$3{,}19 \text{ preuss. Zoll} = 3{,}53 \text{ sächs., also 1 preuss. Zoll} = \frac{353}{319}$$

$$38 \text{ pr. Zoll} = \frac{353}{319} \times 38 = 42{,}3 \text{ sächs. Zoll für's ganze}$$

Sekundenpdl. und also 10,6" für's halbe Sekundenpdl.

§. 7. Die Quadratfuss-Tabelle (Tab. *b*).

Die Oberzeile sagt: 1) dass ein Quadratmeter die Grösse oder den Inhalt hat von 10 österr., von 10,2 preuss., von 11,7 baier. □Fussen u. s. w., sowie

2) dass z. B. 10 österr. □' = 12,5 sächsischen = 16 darmstädter; also der Reduktionsfaktor zur Verwandlung von österr. □Fuss in sächsische $= \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25$ oder $1\frac{1}{4}$ und der zur Verwandlung von darmstädter in österreichische $= \frac{10}{16} = 0{,}625$ sei.

Die Unterzeile sagt:

3) dass der österreichische □Fuss = 999 □Centimeter, oder (weil beim Quadratmaass von 2 zu 2 Stellen abgeschnitten wird) = 0,0999 □Meter, fast $\frac{1}{10}$ □Meter, der preussische dagegen 985 □Centimeter oder = 0,0985 □Meter gross ist u. s. w.; also auch

4) dass der österreichische □Fuss zum preussischen sich wie 999 : 985 verhält; u. s. w.

5) Natürlich ist, ähnlich wie bei der vorigen Tab., die Oberzeile eine Vergleichungs-, die untere eine Verhältniss-Tabelle auch für □Zolle und □Linien und □Ellen und □Ruthen, jedoch nur zwischen denjenigen Ländern, die einerlei Eintheilungszahlen bei diesen Maassen haben; so z. B. hinsichts der □Zolle zwischen Oesterreich, Preussen, Baiern, Sachsen, Hannover (à $\frac{1}{12}$ Fuss); hinsichts der Ellen (à 2') zwischen Sachsen, Baden, Braunschweig u. s. w.

1. Beispiel. Wieviel preuss. □Fuss enthält das französische Ar, das bekanntlich 100 □Meter gross ist?

1 □Meter nach der Oberzeile = 10,2, also
100 □Meter = 1020 pr. □Fuss (in abgerundeter Zahl).

2. Beispiel. Wieviel □Meter hat der 69008 □' grosse sächsische Acker?

Nach der Unterzeile ist 1 sächs. □Fuss = 0,0802 Meter, also 69008 □' = 69008 × 0,0802 = 6134 qm.

3. Beispiel. Mit welcher Reduktionszahl hat man preussische □Ruthen à 144 □Fuss zu multipliziren, um sie in österr. □Klafter à 36 □Fuss zu verwandeln? Oder mit anderen Worten: wie gross ist eine □Ruthe ausgedrückt in □Klaftern?

Nach dem Kettensatze und der *b*-Tab. hat man

x □Klafter	=	1 □Ruthe;
1 □Ruthe	=	144 □Fuss preuss.
10,2 □' preuss.	=	10 □' österr.
36 □' österr.	=	1 □Klafter.

$$x = \frac{144 \cdot 10}{10{,}2 \cdot 36} = 3{,}92.$$

§. 8. Die Kubikfuss-Tabelle (Tab. *c*).

Lesen wir der Kürze des Ausdrucks wegen statt Kubikmeter und Kubikdecimeter lieber Ster und Liter, so sagt die Oberzeile beispielsweise:

1) das Ster ist so gross als reichlich $31\frac{1}{2}$ österr. und reichlich $32\frac{1}{4}$ preuss. Kubikfuss u. s. w.; sowie

2) 44 sächs. Kubikfuss sind = 40,2 baier. = 40,1 hannov. = 42 kasseler u. s. w.

Und die Unterzeile:

3) der österr. Kubikfuss enthält 31,6 französ. Kannen oder Liter, oder = 0,0316 Ster, der preuss. 30,2 Liter oder = 0,0309 Ster.

4) Der baierische Kubikfuss verhält sich zum sächsischen wie 249 : 227; u. s. w.

5) Dass die Oberzeile eine Gleichungs-, die Unterzeile eine Verhältniss-Tabelle ist auch für Schachtruthen (à 144 Kubikfuss), für Normalklaftern (à 100 Kubikfuss Derbmasse), für Duodecimal-Kubikzolle u. s. w. zwi-

schen allen den Ländern, die diese Maasse haben, ist (nach 5. S. 9) selbstverständlich.

1. **Beispiel.** Die preussische Schachtruthe à 144 Kubikfuss in Kubikmetern oder Ster auszudrücken.

1 pr. Kubikf. nach der Unterzeile = 0,0309 Kubikmeter;
144 pr. Kubikf. = 0,0309 × 144 = 4,45 Ster.

2. **Beispiel.** Die gewöhnliche baierische Klafter à 126 Kubikfuss nach preuss. Kubikfussen anzugeben.

Oberzeile: 40,2 baier. Kubikfuss = 32,3 pr.,

$$1 \text{ baier. Kubikfuss} = \frac{323}{402}, \text{ also } 126 \text{ baier. Kubikfuss}$$

$$= \frac{323 \,.\, 126}{402} = 101{,}05 \text{ Kubikfuss preuss.}$$

3. **Beispiel.** Das zweispännige Normalfuder Sand od. Lehm wird in Sachsen zu 5 Kubikellen gerechnet; dass würde betragen in braunschweigischem Maasse (wo man auch die Elle = 2′ rechnet)?

Oberzeile: 44 sächs. Kubikellen = 43 braunschweig.;

$$\text{also } 1 \text{ sächs. Kubikelle} = \frac{43}{44} \text{ braunschw. und}$$

$$5 \text{ sächs. Kubikellen} = \frac{43 \cdot 5}{44} = 4{,}89 \text{ braunschw.}$$

Kubikellen.

§. 9. **Die Feldflächenmaass-Tabelle** (Tab. *d*).

Zum vollständigen Gebrauche derselben ist zu wissen nothwendig, dass

Oesterreich nach dem Joch à 1600 □Klafter (à Kl. = 6′) oder 57600 □′,

Preussen nach dem Morgen à 180 □Ruthen (à R. = 12′) oder 25920 □′,

Baiern nach dem Tagwerk à 400 □R. (1 R. = 10′) oder 40000 □′,

Sachsen nach dem Acker à 300 □R. (1 R. = $15\frac{1}{6}$′) oder $69008\frac{1}{3}$ □′,

Hannover nach dem Morgen à 120 □R. (1 R. = 16′) oder 30720 □′ *) und

---

*) Siehe Note auf folgender Seite.

nach Kalenberger Waldmorgen à 160 □R. (1 R. = 16′) oder 40960 □′,

Würtemberg nach dem Morgen à 384 □R. (1 R. = 10′) oder 38400 □′,

Hessen-Kassel nach dem Acker à 150 □R. (1 R. = 14′) oder 29400 □′,

Hessen-Darmstadt nach dem Morgen à 400 □R. (1 R. = 10′) oder 40000 □′,

Baden nach dem Morgen à 400 □R. (1 R. = 10′) oder 40000 □′,

Braunschweig nach dem Morgen wie Hannover *),

England nach dem Acre à 160 □R. (1 R. oder Pole = $16\frac{1}{2}$′) oder 43660 □′,

Altfrankreich oder Paris . . . . . nach dem { Feld-Arpent à 32400 □′ / Wald-Arpent à 48400 □′

rechnet

Demgemäss unterrichtet uns die *d*-Tabelle wie folgt:

1) Nach der Gleichungszeile enthält das französische Hektare 1,74 (fast $1\frac{3}{4}$) Joch; 2,93 baier. Tagwerk; 3,81 (fast $3\frac{4}{5}$) hannoversche Landmorgen; 4 braunschw. Feldmorgen u. s. w.

2) Auch sind nach derselben Zeile 1,81 sächs. Acker = 2,47 engl. oder 181 sächs. = 247 engl. Acker = 293 baier. Tagwerk; so dass also z. B. der sächs. Acker $= \frac{247}{181} = 1{,}36$ engl. oder 36 Proc. grösser als der englische ist.

3) Aus der Verhältnisszeile aber lesen wir zunächst, dass z. B. der sächs. Acker 55,3 Ar, der englische dagegen nur 40,5, der baierische nur 34,1 derselben enthält, oder auch 1 sächs. Acker = 0,553 Hektare, 1 engl. = 0,405 Hektare u. s. w. — Also folgt auch

4) das Verhältniss des sächs. Ackers zum englischen

*) In der Tabelle ist nur der allgemeine oder sogenannte Feldmorgen gemeint, da der Kalenberger Waldmorgen nur provinziell ist. Die Verschiedenheit der Zahlen unter Hannov. und Braunschw., trotz der gleichen Eintheilung, hat ihren Grund in der Verschiedenheit der Fusse.

nahe wie 55 zu 40, oder wie 11 zu 8, oder wie 1 zu $\frac{8}{11}$, od. wie 1 zu 0,73, oder auch: dass der englische Acker nahe 73 Proc., also noch nicht ganz $^3/_4$, des sächsischen ist. Das Verhältniss des preuss. Morgens zum sächsischen dagegen wie 255 : 553, oder nahe wie 1 : 2,17, oder: der sächs. Acker ist 117 Proc. grösser als der preussische.

1. Beispiel. Es wird erzählt, dass die Drainirungskosten pro Hektare in Frankreich durchschnittlich 80 Thlr. kosteten. Was betrüge dies pro preuss. Morgen?

Nach der Unterzeile: 1 preuss. Morgen = 25,5 Ar à $\frac{80}{100}$ Thlr. Kosten, $= 25{,}5 \times 0{,}8 = 20{,}4$ Thlr.

2. Beispiel. Eine Düngung von 5 Zollcentnern Guano auf den englischen Acker in dergleichen Centnern aufs baierische Tagwerk bezogen, betrüge?

Gleichungszeile:

2,93 baier. Tagw. = 2,47 engl. Ack., à 5 Centner;

1 Tagwerk $= \frac{247}{293} \times 5$ Ctr. $= 4{,}2$ od. $4^1/_5$ Ctr.

3. Beispiel. Der 9te Band des Tharander Jahrbuchs theilt, gestützt auf Untersuchungen des hannoverschen Försters Sticke, mit, wie ein ganz gewöhnlicher Eichenschälwaldbetrieb eine Netto-Bodenrente von $7^1/_6$ Thlr. pro hannov. Morgen abgeworfen habe. Der Sachse, der das liest, will diesen Ertrag in seinem Maasse haben. — Er sieht daher in die *d*-Tabelle und darin, dass

181 sächs. Acker = 381 hannov. Morgen à $7^1/_6$ Thlr.;

1 sächs. Acker $= \frac{381}{181} \times 7^1/_6$ Thlr. $= 13^1/_2$ Thlr.

§. 10. Die Meilen-Tabelle (Tab. *e*) enthält nur die Gleichungszeile, wobei die geographische oder deutsche Meile (= $^1/_{15}$ Grad des Aequatorumfangs) als Einheit angenommen ist. Die würtemberger und hessenkasseler Rubrik ist hier für Schweizerstunde (Schw. S.) und russische Werst benutzt; die altpariser für das Meter. Die Seemeile ist in der Ueberschrift verglichen.

1. Beispiel. Wie ist das Verhältniss zwischen der geogr. und österr. Meile und umgekehrt?

1 geogr. Meile ist = 0,978 österr.; oder 1000 geogr. Meilen = 978 österr. Meilen; also auch:

$$1 \text{ österr. Meile} = \frac{1000}{978} = 1{,}02 \text{ geogr. Meilen.}$$

2. Beispiel. Wie vergleicht und verhält sich die preuss. Meile zur österreichischen?

$$985 \text{ preuss.} = 978 \text{ österr.; od. } 1 \text{ preuss.} = \frac{978}{985} = 0{,}993$$

österr.; oder 1000 preuss. = 993 österr.

Das Verhältniss der Grösse der preuss. zur österr. Meile aber ist wie umgekehrt die Gleichungszahlen, d. i. wie 978 : 985, oder wie 1 zu $\frac{985}{978}$, d. i. wie 1 : 1,007.

3. Beispiel. Wie viel Meter hält wohl die sächsische Meile?

0,989 Meil. sind = 7420^{m}; oder 989 Meil. = 7420000^{m};

$$1 \text{ Meile} = \frac{7420000}{989} = 7500^{m}.$$

§. 11. Flüssigkeits - Hohlmaass - Tabelle (Tab. *f*).

Als Vorbemerkung diene:

In Oesterreich gilt die Maass (40 = 1 Eimer),
» Preussen gilt das Quart (60 = 1 Eimer; 120 = 1 Ohm),
» Baiern gilt die Maasskanne (60 = 1 Eimer),
» Sachsen gilt die Kanne (72 = 1 Eim.; 105 = 1 Tonne),
» Hannover gilt das Stübchen à 2 Kannen (40 St. = 1 Anker; 160 St. = 1 Ohm),
» Würtemberg gilt die (Helleich.) Maass (160 = 1 Eim.),
» Hessen-Kassel gilt das Maass (80 = 1 Ohm),
» Hessen-Darmstadt gilt das Maass (80 = 1 Ohm),
» Baden (und Schweiz) gilt das Maass (100 = 1 Ohm),
» Braunschweig gilt das Quartier (40 = 1 Anker; 160 = 1 Ohm),
» England gilt die Gallone (252 = 1 Tonne),
» Altfrankreich gilt die Pinte (72 = 1 Quartaut),

deren kubische Grösse die Tab. *m* des vorderen

Mittelfeldes nach landüblichen Kubikfussen anzeigt.

Sonach sagt uns die Tab. *f* in ihrer oberen oder Gleichungs-Zeile:

1) Das französische Liter gemessen
in österr. Maassen ist = 0,71; dasselbe
in preuss. Quarten ist = 0,87 »

oder 100 Liter sind = 71 österr. = 87 preuss. Quart; also auch

2) 71 österr. Maass = 87 pr. Quart = 22 Gallon etc. oder

$$1 \text{ österr. Maass} = \frac{87}{71} = 1{,}23 \text{ Quart}, = \frac{22}{71} = 0{,}31$$

Gallon; etc.

Und die untere oder Verhältniss-Zeile lehrt:

3) Das österr. Maass hat 1,42 Liter Inhalt, während das Quart nur 1,15, die sächs. Kanne nur 0,94 Liter gross ist u. s. w.

4) Wenn also z. B. der Oesterreicher das Verhältniss der Maass zur Gallone wissen will, ersieht er aus dieser Zeile: Maass zur Gallone wie 142 zu 454, d. i. wie 1 zu 3,2, oder: dass die Gallone 3⅕mal so gross als die österr. Maass, ferner, dass die sächs. Kanne und das braunschw. Quartier einander gleich, die würtemb. Maass (184) aber fast doppelt so gross als diese (94) ist; u. s. w.

1. **Beispiel.** Der Preusse will seinen Ohm (120 Qrt.) in Liter ausdrücken.

Die Unterzeile sagt, dass 1 Quart = 1,15 Liter, also
120 Qrt. = 1 Ohm = 1,15 × 120 = 138 Liter.

2. **Beispiel.** Der Schweizer oder Badener will seinen Ohm à 100 Maass mit dem Quart vergleichen.

Die Gleichungszeile sagt:
⅔ Maass = 0,87 Quart; 1 Maass = 0,87 × ³⁄₂, also
100 Maass = 87 × ³⁄₂ = 130½ Quart.

§. 12. **Trockenhohlmaass-Tabelle** (Tab. *g*).

Man misst und rechnet bekanntlich:

In Oesterreich nach wiener Metzen à 16 Maassel (1 Metze = 1,52 böhm. Strich),

in Preussen nach Scheffeln (= 4 Viertel = 16 Metzen = $^1/_{24}$ Wispel),
in Baiern nach Scheffeln à 6 Metzen à 2 Viertel,
in Sachsen nach Scheffeln (= 4 Viertel = 16 Metzen),
in Hannover nach Himpten à 8 Stübchen,
in Würtemberg nach Scheffeln à 8 Simri,
in Hessen-Kassel nach Scheffeln à 8 Metzen,
in Hessen-Darmstadt nach Maltern à 4 Simri,
in Baden und Schweiz nach Maltern à 10 Sester,
in Braunschweig nach Himpten à $^1/_{40}$ Wispel,
in England nach Bushel à 8 Gallon,
in Altfrankreich nach Boisseaux,
in Neufrankreich nach Hektolitern, doch auch nach neuen Scheffeln (Boisseaux) à $^1/_8$ Hektoliter,
deren Raumgrösse nach Kubikfussen die *m*-Tabelle der Vorderseite angiebt.

Die hier zu ersehende vielfache Gleichheit der Untereintheilungen lehrt, dass die *g*-Tabelle auch grossentheils für die Untermaasse gilt, so z. B. für hannov. Stübchen, würtemb. Simri, kasseler Metzen, darmstädter halbe Simri, engl. Gallonen; desgleichen wiener Maassel, preuss. und sächs. Metzen; u. s. w.

Die Oberzeile sagt z. B.:

1) Das Hektoliter ist so gross als 1,63 wiener Metzen oder $1^1/_4$ kassel. Scheffel; oder

2) 182 preuss. sind = 275 engl. Scheffeln; 56 würtemb. Scheffel = 96 sächs., oder

56 würtb. halbe Simri ($^1/_{16}$ Scheff.) = 96 sächs. Metzen ($^1/_{16}$ Scheffel), oder

28 Simri = 96 sächs. Metz.; 1 Simri = 3,43 sächs. Metz.

Und die Unterzeile:

3) In Litern gemessen, hat die wiener Metze 61,5; der preuss. Scheffel 55 Liter u. s. w., oder

4) das Verhältniss des preuss. zum sächs. Scheffel ist wie 55 zu 104, oder wie 1 zu $\frac{104}{55}$, d. i. wie 1 : 1,89, oder: der sächs. Scheffel ist 89 Proc. grösser als der preussische.

1. Beispiel. Ein Ertrag von 100 Hektolitern in wiener Metzen ausgedrückt?

1 Hektoliter = 1,63, also 100 Hektoliter = 163 wiener Metzen.

2. Beispiel. 100 engliche Bushel ins Preussische übersetzt?

Nach der Gleichungszeile sind 275 engl. Scheff. = 182 preuss.; 1 engl. Scheff. = $\frac{182}{275}$ = 0,66; also 100 Bushel = 66 preuss. Scheffeln.

§. 13. Die Gewichts-Tabelle (Tab. *h*).

Die Tabelle bezieht sich auf Pfunde und deren gleichmässige Unter- und Obermaasse. Das allerdings sehr wichtige Zollvereinspfund ist weggelassen da wohl Jeder weiss, dass diesses durch Halbirung des Kilogramms gebildet, sonach gleich $\frac{1}{2}^k$ und, da der Zollcentner = 100 Zollpfd., derselbe auch = 50 Kilogramm sei. Uebrigens ist in Hessen-Darmstadt, Baden und Schweiz Pfund und Centner dem des Zollvereins gleich. Hinsichts der Centner ist jedoch noch zu bemerken, dass die Vergleichungszahlen der *h*-Tabelle für Centner nur direkt anwendbar sind zwischen Oesterreich, Baiern, Hannover, Hessen-Darmstadt, Braunschweig und Frankreich einerseits, die sämmtlich 100 Pfd. = 1 Centner rechnen, und zwischen Preussen, Sachsen und Kurhessen, die 110 Pfd = 1 Ctr. setzen, während Würtemberg 104, England 112 Pfd. zu 1 Ctr. vereinigen.

Wir lesen sonach aus der Oberzeile der Tab. *h*:

1) dass das Kilogramm so gross ist wie 1,79 österr. Pfund, oder 2,14 preuss. und sächs. Pfunde; u. s. w.

2) dass viele deutsche Pfunde (preuss., sächs., hannov. würtemb., kassel., braunschw.) einander gleich, sowie ferner 2 badische oder Zollpfunde = 2,2 engl. = 2,04 altpariser Pfunden, diese letzteren also vom Zollpfunde nur sehr wenig verschieden sind; sowie dass 179 österr. Centner = 179 baier. = 214 hannov. = 200 darmstädter sind (weil bei diesen allen 100 Pfd. = 1 Ctr.).

Und aus der Unterzeile:

3) dass von französischen Grammen (s. S. 5) auf das

österr. Pfd. 560, auf das preuss. 468, auf das altpariser 490 (auf das neufranzösische natürlich Kilo- = 1000) gehen, und demnach

4) das österr. Pfd. gegen das preuss. sich wie 560 : 468, d. i. wie 1 zu 0,835 verhält, oder dass letzteres $(=\frac{83\frac{1}{2}}{100}$ des österr.) um $16\frac{1}{2}$ Proc. kleiner als jenes ist; sowie dass der Zollcentner sich zum österr. (weil beide einerlei Pfundezahl haben) verhalte wie 500 : 560 = 1 : 1,12 oder 100 : 112, letzterer also 12 Proc. grösser sei; u. s. w.

1. Beispiel. Ein Sachse wünscht zu wissen, wie viele Zollpfunde sein Handelscentner (à 110 Pfunde) hat?

Nach der Gleichungszeile ist:

214 sächs. Pfunde = 200 badischen oder Zollpfunden;

1 sächs. Pfund $=\frac{200}{214}$, also 1 Ctr. = 110 sächs. Pfdn.

$$=\frac{200 \times 110}{214} = 102{,}8 \text{ Zollpfunden.}$$

2. Beispiel. Wie verhält sich der Zoll- oder badische Centner zum englischen?

Nach der Verhältnisszeile haben 100 bad. Pfde. 100×500 Gramme und 112 engl. Pfde. 112×454 Gramme; also verhält sich der engl. Centner zum Zollcentner = 50000 zu 50848 oder 1 : 1,017; oder: der englische ist $1\frac{7}{10}$ Proc. grösser als der Zollcentner.

§. 14. Die Ruthen-Tabelle (Tab. I).

Die Zahlen der Spalte Oesterreich gelten für die wiener Klafter, die der Spalte Paris für die altfranzösische Toise.

Die einzeilige Tabelle sagt uns also, dass

1) 1 preuss. Ruthe gleich sei 1,99 wiener Klafter = 1,29 baier. Ruthen = 1,93 alte Toisen, u. s. w.;

2) dass, um eine Ruthe in Metern auszudrücken, man mit ihrer Vergleichungszahl in 3,77 dividiren müsse.

3) Auch ist zu bemerken, dass das neue sächsische Lachter = 2 Meter, während das preussische immer noch $6\frac{2}{3}$ preuss. Fuss lang ist.

1. **Beispiel.** Eine Distanz von 300 österr. Klaftern in sächs. Ruthen auszudrücken:

$$1 \text{ Klafter} = \frac{88}{199} \text{ Ruthen, also } 300 \text{ Klafter} = \frac{26400}{199}$$
$$= 132{,}7 \text{ Ruthen.}$$

2. **Beispiel.** Eine in alten Toisen gegebene Berghöhe 200 in Metern anzugeben:

$$1{,}93^t \text{ sind} = 3{,}77^m, \text{ also } 1^t = \frac{3{,}77}{1{,}93} = 1{,}953^m; \text{ folglich}$$
$$200^t = 390{,}6 \text{ Meter.}$$

Leichter noch mittels der Fusstabelle *a*; denn
1 Par. Fuss $= 325^{mm} = 0{,}325^m$; 1 Toise $= 6$ par. Fuss $= 1{,}950^m$; also 200 T. $= 1{,}950 \times 200 = 390$ Meter.

§. 15. Die **Waldertrags-** oder **Waldflächen-Kubikfuss-Tabelle** (Tab. *k* zur schnellen Reduktion von Forsterträgen) ist eine Verschmelzung der Tabellen *c* und *d* und bezieht sich natürlich auch auf deren Benennungen, vermöge deren sie zeigt z. B., dass ein Ertrag von 1 preuss. Kubikfuss pro preuss. Morgen gleich sei einem Ertrage von 2,21 österr. Kubikfuss pro Joch; 1,66 baier. Kubikf. pro Tagwerk u. s. w. und auch gleich 0,12 Kubikmeter oder Ster pro Hektare (indem sich die letzte Spalte hier auf neufranzösisches Maass bezieht).

Sowie ferner:
dass, um eine preussische Bestandes- oder Forstertragstafel für Oesterreich umzurechnen, man ihre Zahlen mit 2,21 multipliciren müsse; für Baiern mit 1,66, für Sachsen mit 2,95 u. s. w.; um aber eine sächsische, z. B. die Cotta'sche, auf Preussen zu reduciren (da 2,95 Kubikf. pro Acker sächs. $=$ 1 Kubikfuss preuss., also 1 Kubikfuss sächs. pro Acker $= \frac{100}{295}$ preuss. pro Morgen $= 0{,}339$), man jene mit 0,339, und bei der Reduktion einer sächs. Ertragszahl nach Oesterreich (da 2,95 sächs. $=$ 2,21 österr., also 1 sächs. $= \frac{221}{295}$ $= 0{,}749$) mit 0,749 multipliciren müsse.

1. **Beispiel.** Die Cotta'schen Bestandestafeln geben

für Buchenbestände dritter Bonität (mittelmässig) als höchsten Durchschnittszuwachs (zum Hauptertrag) die Zahl 66 (Kubikf. pro Acker) an. Der Würtemberger will diese Ertragszahl in seinem Maasse ausdrücken.

Die Tabelle sagt ihm:

2,95 sächs. = 1,62 würtemb.; also 1 sächs. $= \frac{162}{295}$

$=$ sehr nahe 0,55 oder $\frac{11}{20}$; mithin 66 sächs. Kubikf. pro Acker sind $66 \times \frac{11}{20} = 36{,}3$ würtemb. Kubikfuss pro würtemb. Morgen.

2. Beispiel. Die im preuss. Maasse dargestellte König'sche Durchschnittsertragstafel giebt für denselben Fall die Zahl 25 Kubikfuss. Wie viel ist das in würtembergischem Maasse?

Ein Blick auf die *k*-Tabelle lehrt:

1 Kubikfuss preuss. = 1,62 würtemb.; also 25 Kubikf. preuss. $= 1{,}62 \times 25 = 40{,}5$ würtemb. Kubikf. pro würtemb. Morgen.

§. 16. Die Feldertrags- oder Feldflächen-Scheffel-Tabelle (Tab. *l* zur schnellen Reduktion von Landwirthschaftserträgen u. dergl.) ist eine Verbindung der Tabellen *g* und *d* und natürlich auch der Maassbenennungen beider, so dass wir aus ihr z. B. ersehen:

1 preuss. Scheffel pro preuss. Morgen an Ernte, Aussaat u. s. w. hat dieselbe Bedeutung als:

2,01 österr. Metzen pro österr. Joch,
0,33 baier. Scheffel pro baier. Tagwerk,
2,40 Bushel pro engl. Acker,
2,15 Hektlit. pro Hektare (indem auch hier die letzte Spalte für neufranzös. Maass gilt).

1. Beispiel. Der sächs. Oekonomierath Geyer erzählt in der landw. Zeitschrift für Sachsen (jetzt Zeitsch. für deutsche Landw.), dass er von der guten Zwiebelkartoffel, nach Klee mit starker Mistdüngung gebaut, einst 278 Scheffel pro Acker geerntet habe. — Ein Preusse und ein Franzose wollen diesen Ertrag in ihren Maassen wissen.

Dem Preussen sagt der Knecht:

1,15 sächs. Scheffel pro Acker = 1 preuss. Scheffel pro Morgen; also 1 sächs. Scheffel pro Acker $= \frac{100}{115}$ preuss. Scheffel pro Morgen; also 278 sächs. Scheffel pro Acker $= \frac{100}{115} \times 278 = 241^3/_4$ preuss. Scheffel pro Morgen.

Dem Franzosen:

1,15 sächs. Scheffel pro Acker = 215 Liter pro Hektare = 2,15 Hektoliter pro Hektare; 1 sächs. Scheffel pro Acker $= \frac{215}{115}$ Hektol. pro Hekt.; also 278 Scheff. pro Ack. $= \frac{215 \cdot 278}{115} = 520$ Hektol. pro Hekt.

2. Beispiel. Die Preussen und die Sachsen nehmen ihre Feldflächenertragszahlen gewöhnlich als gleich an; ist das richtig?

Nein; denn 1 Schff. in Preussen, sagt die Tabelle, ist = 1,15 Scheff. in Sachsen, oder 100 Scheff. in Pr. = 115 Scheff. in Sachsen. Bei der Uebertragung aus Preussen nach Sachsen muss man also jene Ertragszahl um 15 Proc. oder circa $^1/_7$ erhöhen. Dagegen man, weil 1 sächs. Scheff. pro Acker $= \frac{100}{115} = 0,87$ oder 100 sächs. Scheff. pro Acker = 87 preuss. Scheff. pro Morgen, beim Uebertragen sächs. landwirthsch. Ertragszahlen in preussische jene um 13 Proc. oder $^1/_8$ circa verringern müsste.

§. 17. Die Quadratzoll-Tabelle (Tab. *o*), zur Umwandlung der □Zolle in □Millimeter (□^{mm}) und umgekehrt, ist namentlich in der Bau- und Maschinenkunde ein Bedürfniss. Sie ist eine Verhältnisszeile; denn indem sie anzeigt, wieviel der österreichische, preussische, sächsische □Zoll an □Millimetern enthält, geben ihre Zahlen gleichzeitig das Verhältniss der Grösse dieser □Zolle; bei ihrer Umkehrung aber die Gleichung dieser Grösse.

1. Beispiel. Die Festigkeits-Tabelle der Vorderseite besagt unter Anderem, dass das Holz im Durchschnitt bei

einer Zugkraft von 9 Kilogr. pro □^{mm} Querschnitt zerreisst. Ein österr. Ingenieur will diese Festigkeitszahl in seinem Landesmaasse, d. h. nach Pfunden und pro □Zoll ausgedrückt haben.

Der österr. □Zoll hält nach Tab. *o* 694 (oder fast 700) □^{mm}, gestattet also eine Belastung von $694 \times 9 = 6246$ Kilogr. Nach Tab. *h* aber ist $1^k = 1{,}79$ oder 1,8 österr. Pfd.; das gewünschte Maass lautet also: $6246 \times 1{,}8 = 112428$ Pfund oder 1124 Ctr. österr.

2. Beispiel. Der Atmosphärendruck P beim mittleren Barometerstande von 76 Centimetern ist pro □Centimeter $1{,}034^k$, oder pro □^{mm} $= 0{,}01034^k$. Wie gross in Kilogrammen auf den österr. Quadratzoll?

$P = 0{,}01034 \times 694 = 7{,}175$ Kilogramm.

§. 18. Die Kilogrammmeter - Tabelle (Tab. *p*) vergleicht die Fusspfunde der anderen Staaten mit dem zur Einheit angenommenen Kilogrammmeter, und also auch zugleich die Fusspfunde jener unter sich. Sie ist demnach eine Gleichungszeile und dient hauptsächlich, um eine angegebene mechanische Leistung in die Maasse eines anderen Landes zu übersetzen. (In Sachsen ist dabei das neue oder Zollpfd. gemeint.)

1. Beispiel. Unter Pferdekraft versteht man bei Beurtheilung der Leistungen von Maschinen eine Kraft, welche in jeder Sekunde eine Last von 75 Kilogr. 1 Meter hoch, oder 25^k 3 Meter oder 3^k 25 Meter hoch hebt, kurz eine »mechanische Arbeit von 75 Kilogrammmetern pro Sekunde« verrichtet. Wie gross ist also eine dergleichen Pferdekraft in preuss. Maasse?

Nach Tab. *r* ist $1^{km} = 6{,}8$ Fusspfd. preuss.; also 75^{km} $= 6{,}8 \times 75 = 510$ Fusspfde.

§. 19. Die Kubikfuss - Hohlmaass - Tabelle (Tab. *m* der kubischen Grösse der Hohlmaasse auf der Vorderseite) giebt in ihrer Oberzeile an:

1) Durch direktes Ablesen der Zahlen, wie viel der Kubikfuss jedes Landes von dessen Trockenhohlmaass enthält, oder auch, durch welchen Faktor man die Kubikfusse in Scheffel u. dergl. verwandelt; als z. B.:

1 österr. Kubikf. $= \frac{20}{39}$ wien. Metzen, also n österr. Kubikfuss $= \frac{20}{39} \times n$ wien. Metzen;

1 preuss. Kubikf. $= \frac{9}{16}$ Scheffel preuss.;

80 preuss. Kubikf. $= \frac{9}{19} \times 80 = 45$ Scheffel.

2) Durch Umkehrung jeder Zahl: welche Grösse das Trockenhohlmaass des betreffenden Landes, nach Kubikf. ausgedrückt, besitzt und durch welchen Faktor man es in Kubikfusse umwandelt; als z. B.:

1 wiener Metze $= \frac{39}{20}$ österr. Kubikfuss;

1 preuss. Scheff. $= \frac{16}{9}$ preuss. Kubikfuss;

1 baier. Scheff. = 9 baier. Kubikfuss (fast);

1 braunschw. Himpten $= \frac{1000}{746}$ braunschw. Kubikfuss.

Und in der Unterzeile:

3) und 4) dieselben Einsichten, aber in Bezug auf die Flüssigkeitshohlmaasse, so dass man z. B. liest:

1 sächs. Kubikfuss = 23,9 sächs. Kanne;

1 sächs. Kanne $= \frac{1}{23,9}$ oder $\frac{10}{239}$ Kubikf., nahe $= \frac{1}{24}$ Kubikfuss u. s. w.

1. Beispiel. Ein sächsischer Landwirth hat (nach Vorschrift des 3. Buchs) einen Getreidehaufen berechnet zu 240 Kubikfussen. Wie viel ist das in Scheffeln?

1 Kubikfuss $= \frac{7}{32}$ Scheffel; 240 Kubikf. $= \frac{7 \cdot 240}{32}$

$= \frac{7 \cdot 30}{4} = 52\frac{1}{2}$ Scheffel.

2. Beispiel. Wenn man das Getreide 2 Fuss hoch aufschüttet, so braucht es gerade an Bodenfläche halb so viel Quadratfuss als es Kubikfuss Raumgehalt besitzt; z. B. 100 Kubikf. Korn braucht 50 □Fuss Boden. Wie viel Grund-

fläche muss sonach ausser den Gängen dem Schüttboden geben, auf dem man 400 wiener Metzen 2 Fuss hoch aufschichten will?

Der kubische Raum dieses Getreides ist:

$$\frac{20}{39} \text{ wiener Metzen} = 1 \text{ Kubikf.; also } 1 \text{ Metze} = \frac{39}{20},$$

$$\text{also } 400 \text{ Metzen} = \frac{39 \cdot 400}{20} = 780 \text{ Kubikfuss;}$$

$$\text{folglich Bodenfläche} = \frac{780}{2} = 390 \;\square\text{Fuss.}$$

3. **Beispiel.** Wie viel preuss. Eimer à 60 Quart fasst ein Gefäss, dessen kubische Grösse 50 Kubikfuss beträgt?

$$1 \text{ Kubikfuss} = 27 \text{ Quart} = \frac{27}{60} \text{ Eimer; also } 50 \text{ Kubikfuss} = \frac{27 \cdot 50}{60} = 22\tfrac{1}{2} \text{ Eimer.}$$

4. **Beispiel.** Wie viel Kubikfuss Raumgehalt müsste ein Gefäss erhalten, das netto 100 baier. Maasskannen fassen soll?

$23\tfrac{1}{4}$ Maassk. = 1 Kubikfuss;

$$1 \text{ Maassk.} = \frac{1}{23\tfrac{1}{4}} = \frac{4}{93}; \text{ also } 100 \text{ Mk.} = \frac{400}{93} = 4{,}21 \text{ Kubikfuss.}$$

§. 20. **Die Kubikfusspfund- oder Wasserdichtigkeits-Tabelle** (Tab. *n* des vorderen Mittelfeldes)

Das Gewicht eines Kubikfusses irgend einer Materie wird in der Mechanik die **Dichtigkeit** derselben genannt. Da die Wärme wegen ihrer ausdehnenden Kraft etwas Einfluss auf diese Dichtigkeit hat, wird sie in der Regel bei mittlerer Temperatur (19° Cels. oder 15° R.) genommen. Die Dichtigkeitszahlen eines und desselben Stoffes, in den Maassen der verschiedenen Länder ausgedrückt, müssen aber verschieden sein, weil die Kubikfusse und die Pfunde derselben nicht einerlei sind. So z. B. ist nach der *n*-Tabelle die Dichtigkeit des reinen Wassers bei mittlerer Temperatur:

in österr. Maasse = 56,3, d. h. 1 österr. Kubikfuss reines Wasser wiegt 56,3 österr. Pfunde,

in preuss. Maasse = 66,0, d. h. 1 preuss. Kubikfuss reines Wasser wiegt 66 preuss. Pfunde,

in sächs. Maasse = 45,4, d. h. 1 sächs. Kubikfuss reines Wasser wiegt 45,4 neue sächs. oder Zoll- (=48,5 sächs. Handels-)Pfunde u. s. w.

Hinsichts der metrischen Dichtigkeitszahl genügt es, auf Seite 5 zu verweisen, wonach 1 Kubikcentimeter Wasser = 1 Gramm, das 1000mal grössere Kubikdecimeter also = 1000 Gr. = 1 Kilogramm, das 1000mal grössere Kubikmeter danach = 1000 Kilogramm wiegt *).

Eine Masse, die 2mal dichter oder schwerer ist als Wasser, wie z. B. mittelfeuchte Erde, Lehm u. dergl. hat, sonach

in Preussen die Dichtigkeitszahl $66 \times 2 = 132$ Pfd.,

in Oesterreich die Dichtigkeitszahl $56{,}3 \times 2 = 112{,}6$ Pfd.,

in Sachsen die Dichtigkeitszahl $48\frac{1}{2} \times 2 = 97$ Handelspfd. oder $45{,}4 \times 2 = 90{,}8$ Zollpfd.

Wenn also 1 Kubikfuss irgend einer Masse in Preussen 66 Pfund wiegt, so wiegt er in Oesterreich 56,3 Pfunde, für je 1 Pfd. in Preussen entfallen $\frac{56{,}3}{66}$ in Oesterreich, für a Pfd. in Preussen $\frac{56{,}3}{66} \times a$ Pfde. in Oesterreich; oder: das Kubikfussgewicht irgend einer Materie in preuss. verhält sich zu dem entsprechenden in österr. Maassen wie die zugehörigen Zahlen der Tab. *n*; es ist sonach die Tab. *n* sowohl eine Wasserdichtigkeits-, als auch eine Kubikfussgewichts-Reduktions-Tabelle.

Ihre Benutzung in ersterer (physikalischer) Hinsicht dem Buche der Mechanik überlassend, erläutern wir hier gleich in Beispielen nur ihre Anwendung als Reduktions-Tabelle der Kubikfussgewichte.

1. Beispiel. König's Forstmathematik giebt das Gewicht des preuss. Kubikfusses grünen Eichenholzes zu 68 preuss. Pfunden; wie müsste dies hiernach der Oesterreicher ausdrücken?

*) Auch sagt die *h*-Tabelle, dass 1 Kubikmeter = 1 Mill. Gramme = 1000×1000 Gr. = 1000 Kilogr.

66 Pfd. preuss. = 56,3 österr., 1 Pfd. preuss. = $\frac{56,3}{66}$ Pfd. österr. pro Kubikfuss, also

68 Pfunde = $\frac{56,3}{66} \times 68 = 58^1/_{33}$ Pfd.

2. Beispiel. Wenn die Hohenheimer oder Würtemberger den Kubikfuss Dünger zu 40 Pfd. Gewicht rechnen, wie hoch müsste ihn demgemäss der Baier setzen?

50,2 Pfd. pro Kubikf. in Würtemberg sind in Baiern 44,3 Pfd. pro Kubikfuss.

1 Pfund in Würtemberg = $\frac{443}{502}$ in Baiern, 40 in W. = $\frac{443}{502} \times 40$ in B. = 35 Pfd. reichlich.

§. 21. Zusammengesetzte Maassreduktionen, mit Hülfe der verschiedenen Tabellen. Rechnung mittelst des Kettensatzes.

Sind die gegenseitigen Beziehungen der die Rechnung bedingenden Maasse in Form von Gleichungen ausgedrückt, was immer geschehen kann (selbst mit Benutzung der zweiten oder Verhältnisszeile durch Umkehrung ihrer Zahlenwerthe; indem, wenn z. B. die österr. Maass sich zum preuss. Quart wie 142 : 115 verhält, daraus auch 115 österr. Maass = 142 preuss. Quart folgen), so geschieht dann die Reduktion am zweckmässigsten durch den Kettensatz. Dieser Kettensatz besteht bekanntlich aus einer unter einander gesetzten Folge von Maassgleichungen, und zwar in der Weise, dass jede folgende Gleichung mit derselben Benennung anfängt, mit der die vorhergehende aufhörte. Die Anfangsgleichung ist dabei als die auf die Endgleichung folgende zu betrachten und als Anfangsglied die gesuchte unbekannte Grösse zu wählen; woraus dann folgt, dass das Endglied dieselbe Benennung als das Anfangsglied und jede Seite des Satzes dieselben Maasse hat. In diesem Falle aber, jedoch nur in diesem, ist das Produkt der Zahlen der einen Seite gleich denen der anderen, oder das gesuchte x gleich dem Produkte der rechten Seite dividirt durch das Produkt der linken. Dass man diese

Rechnung durch vorheriges gegenseitiges Aufheben zwischen den Zahlen der linken und rechten Seite abkürzen kann, ist leicht einzusehen.

1. Beispiel. Ein baierischer Landwirth will die preussische Angabe, dass ein Scheffel Korn 90 Pfd. gewogen, in seinen Maassen, d. h. pro baier. Scheffel, in baier. Pfdn. ausdrücken.

x baier. Pfd.	=	1 baier. Scheffel,
45 baier. Scheffel	=	182 preuss. Scheff. (g-Tab.),
1 preuss. Scheffel	=	90 preuss. Pfund,
214 preuss. Pfd.	=	179 baier. Pfd. (h-Tab.);

und nun mit Hinweglassung aller Benennungen

x	1
45	182
1	90
214	179

also $x = \frac{182 \times 90 \times 179}{45 \times 214} = 304{,}5$ Pfd. baier.

2. Beispiel. Eine Vorschrift eines sächsischen Landwirths sagt: 5 Centner (à 110 Pfd.) Guano auf den Acker! Wie heisst das in's Oesterreichische übersetzt? (1 österr. Centner = 100 Pfd.)

x österr. Ctr.	=	1 Joch,
174 Joch	=	181 Acker (d-Tab.),
1 Acker	=	550 sächs. Pfd. (Angabe),
214 sächs. Pfd.	=	179 österr. Pfd. (h-Tab.),
100 österr. Pfd.	=	1 österr. Centner.

$$x = \frac{181 \times 550 \times 179}{174 \times 214 \times 100} = \text{nahe } 4{,}8 \text{ Centner.}$$

3. Beispiel. Einem sächs. Ingenieur ist zwar bewusst, dass die mechanische Leistung eines Pferdes (die Pferdekraft der Maschinenbauer) in der neueren Mechanik zu 75 Kilogramm in der Sekunde 1 Meter hoch gehoben oder = 75 Kilogrammmeter gesetzt wird; er wünscht aber das ihm entgangene äquivalente sächsische Maass der Pferdekraft zu wissen.

In diesem Falle setzen wir — ohne Kette — die Gleichungen:

Nach der *h*-Tab. 75 Kilogr. = 2,14 × 75 sächs.Hdls-Pfd.
» » *a*-Tab. 1 Meter = 3,53 sächs. Fuss.

folgl. 75 × 1 Kilogrammmeter = 2,14 × 75 × 3,53 sächs. Fusspfd.

75 Kilogrammmeter = 566 Fusspfd.

Nach Zollpfunden aber

75^k = 2 × 75 Zollpfd.
1^m = 3,53 sächs. Fuss.

75 Kilogrammmet. = 530 Fusspfd.,

was annähernd auch kürzer gleich aus der *p*-Tab. abzunehmen gewesen wäre, wonach 75^{km} = 75 × 7,1 = 532 Fusspfd.

Zweites Kapitel.

Der Messknecht als Reciprokentafel.

§. 22. Bei den meisten Rechnungsarbeiten kommen Divisionen vor. Das Dividiren ist aber im Allgemeinen unbequemer und aufhältlicher als das Multipliziren. Eine Tabelle, die auf einfache Weise das Geschäft des Dividirens entbehrlich macht, ist für Jeden, der viel und gern schnell rechnet, ein wo nicht unentbehrliches, so doch höchst willkommenes Hülfsmittel. Ein solches besitzen wir in jeder Tafel, welche die Werthe der umgekehrten (reciproken) Zahlen, d. h. die Werthe von $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$ . . . ., welche man auch wohl Stammbrüche nennt, als Decimalbrüche angiebt. Hätte man z. B. 7 durch 94 zu dividiren, oder die Division 7 : 94 oder den Bruch $^7/_{94}$ (in einem Decimalbruch) auszuführen, und unsere Tafel zeigt uns die Reciproke von 94 = 0,0106, so haben wir sofort $^7/_{94}$ = 0,0106 × 7 = 0,0742.

Oder wären 11 □Zolle Duodecimalmaass in □Fusse zu verwandeln, d. h. 11 durch 144 zu dividiren, so würden wir aus der Reciprokentafel den Werth von $^1/_{144}$ = 0,00694 nehmen und sofort rechnen $^{11}/_{144}$ = 0,00694 × 11 = 0,07634 □Fusse.

§. 23. Man suche jetzt in der *COS.*-Spalte des Messknechts die Zahl 94 des ersten Beispiels — sie steht beim Winkel 20° — und suche nun zu demselben Gradmaass die entsprechende Zahl in der *SEC.* - Spalte. Man findet daselbst 106, also die Ziffern der Reciproke von 94. Oder wir suchen die Zahl 144 des zweiten Beispiels (entweder als 14,4 in der *COS.*-Spalte, oder, weil diese für kleine Anfangsziffern 1 und 2 nicht scharf genug ist) in der *SEC.*-Spalte, und zu dem zugehörigen Gradmaass — 46° — den *COSINUS*, d. h. die Zahl der *COS.* - Spalte, die sich deutlich genug als 96,4, oder in blossen Ziffern als 694 angiebt.

§. 24. Die beiden Spalten *SEC.* und *COS.* — Secante und Cosinus, rechts und links neben den Winkelskalen der Vorderseite —sind also gegenseitige Reciprokentafeln, aus denen wir bei einiger Uebung leicht und schnell die Ziffern der gewünschten Reciproke bis auf 3 und 4 Stellen abnehmen können *).

Den Platz für's Komma oder Einerzeichen kann man eigentlich nie verfehlen. Lassen wir nämlich die Reciproken der dekadischen Zahlen 10, 100, 1000, die selbst verständlich ohne Tafel zu schreiben und gleich 0,1; 0,01; 0,001 sind, ganz ausser Beziehung, so kann man als Thatsache aufstellen, dass die Reciproken aller einstelligen Ganzen eine Null voraus haben; die Zahl der Decimalen mag noch so gross sein;

$$\text{z. B. } \frac{1}{2} = 0{,}5; \qquad \frac{1}{9{,}3} = 0{,}1075 \ldots$$

ferner, dass die Reciproken aller zweistelligen Ganzen, gleichviel mit wieviel Decimalen verknüpft, stets zwei Nullen voraus haben;

$$\text{z. B. } \frac{1}{11} = 0{,}0909; \quad \frac{1}{11{,}45} = 0{,}0873.$$

*) Für gesunde Augen ist der Knecht als Reciprokentafel überaus einfach und bequem, indem solche die an der *SEC.*-Tabelle äusserlich nebenhin laufende feinere *COS.*-Tabelle, statt der jenseitigen, zu benutzen vermögen.

Und allgemein:

Soviel Ziffern die Ganzen einer Zahl besitzen, soviel Nullen haben den Ziffern ihrer Reciproke vorauszugehen.

Und umgekehrt, wenn die gegebene Zahl selbst ein echter Decimalbruch ist:

Soviel Nullen den (geltenden) Ziffern der Zahl vorausgehen, soviel Ziffern sind als Ganze von den Ziffern der Reciproke abzuschneiden.

Nämlich: $\frac{1}{0,5} = 2,0$; $\frac{1}{0,0095} = 105,3$.

Weiss man also, dass zur Zahl a) 3150, oder b) 315, oder c) 31,5, oder d) 3,15, oder e) 0,315 die Reciprokenziffer 3175 gehört, so hat man sofort obiger Regel nach die Reciproke

von a) = 0,0003175; von b) = 0,003175; von c) = 0,03175; von d) = 0,3175; von e) = 3,175.

§. 25. Und da die Ablesung der Reciprokenziffer so leicht und das Gesetz für's Komma so höchst einfach ist, so ist der Messknecht wohl im Rechte, wenn er sich den praktischen Rechnern auch als eine brauchbare Reciprokentafel empfiehlt. Freilich giebt er die Reciprokenzahl oft nur bis 3, häufig indess auch bis zu 4 Ziffern; dafür hat er aber vor den gewöhnlichen Reciprokentafeln der mathematischen Taschenbücher das voraus, dass er die Reciproke der meisten 4zifferigen Zahlen ohne die bei jenen immer nöthige Zwischenrechnung sofort ablesen lässt.

§. 26. Zwar legt der Messknecht auf diesen Theil seiner Praxis keinen wesentlichen Werth; sein Verfasser weiss aber aus Erfahrung, dass, wenn man sich in diese Reciprokenaufsuchung nur ein wenig einzuarbeiten versucht, man in allen den bei weitem gewöhnlichsten Fällen des Lebens, wo eine grössere Genauigkeit als bis zu 3 resp. 4 Ziffernstellen nicht verlangt wird, dennoch recht wesentlichen Vortheil bei ihrer Benutzung hat.

Man versuche z. B. nur bei den Reduktions-, Zins- und Rentenrechnungen des 1. 4. u. 5. Kapitels, wo Divi-

sionen vorkommen, statt der Ausführung der Divisionsarbeit, die Reciproke des Divisors nach obigen Regeln aufzusuchen und anzuwenden; — und man wird sehr bald gewahren, dass man Unrecht hätte, des Messknechts Reciprokenkunst über die Achsel anzusehen. Die kleine Umständlichkeit, aus der einen Winkelskala in die andere überzugehen, wird reichlich aufgewogen durch den Umstand, dass kein Umblättern und kein Interpoliren bei vierstelligen Zahlen, wenigstens nichtbis zum 30. Grade, nöthig wird. Für gute Augen fällt selbst diese Umständlichkeit weg. S. Seite 29, Anmerk.

§. 27. Beispiele für Aufsuchung von Reciproken.

1) Es ist die Reciproke von 1728 anzugeben.

In der Secantenspalte 172,8 gesucht, zeigt deutlich genug auf $54\frac{1}{2}°$ reichlich; und $54\frac{1}{2}°$ reichlich neben der *Cos.*-Spalte aufgesucht, zeigt in letzterer auf 58 knapp. Die Reciproke von 1728 ist also 0,00058, oder richtiger 0,000579.

2) Die Reciproke der Kreisumfangszahl $\pi = 3{,}14$, oder den Werth $\frac{1}{\pi}$ anzugeben.

Sucht man 31,4 in der *Cos.*-Spalte, wobei man $71\frac{3}{4}°$ findet, und zu $71\frac{3}{4}°$ die *Sec.*, so ergiebt sich die letztere zu knapp 320 und es ist also $\frac{1}{3{,}14} = 0{,}319$.

Oder 314 in der *Sec.*-Spalte gesucht, giebt knapp $71\frac{1}{2}°$, und dazu die *Cos.*-Spalte 0,318.

In der That steht auch, genauer genommen, die Reciproke mitten inne und ist 0,3185.

§. 28. Beispiele von Anwendungen der Reciproken.

1) Der Bruch $\frac{12}{183}$ soll in einen Decimalbruch umgewandelt werden.

Sec. 183 zeigt auf 57°, und von 57° ist der *Cos.* 54,6; es ist also $\frac{1}{183} = 0{,}00546$ und $\frac{12}{183} = 0{,}00546 \times 12 = 0{,}06552$.

Die gewöhnliche Rechnung 12 : 183 giebt 0,0655.

2) Um Quadratzolle des 12theiligen Maasses in Quadratfusse zu verwandeln, hat man dieselben durch 144 zu dividiren. Wieviel in Quadratfussen ausgedrückt, sind 40 □Zolle?

Sec. 144 steht bei 46°; und zu 46° der rechten Skala gehört der Cosinus 69,5; es ist also $\frac{1}{144} = 0{,}00695$;

und also $\frac{40}{144} = 0{,}00695 \times 40 = 0{,}278$ □Fuss.

Die gewöhnliche Division ergiebt $40 : 144 = 0{,}27777$.

3) Um Kubikzolle des 12theiligen Maasses in Kubikfusse umzuwandeln, hat man ihre Anzahl durch $12^3 = 12 \,.\, 12 \,.\, 12 = 1728$ zu dividiren. Es sind demgemäss 100 Kubikzolle an Kubikfussen?

Sec. 172,8 steht bei reichlich $54\frac{1}{2}$° und $54\frac{1}{2}$° der rechten Skala reichlich zeigt auf den *Cos.* 58 knapp; es ist also *Rec.* von $1728 = 0{,}000579$ und demgemäss 100□″ $= 0{,}000579 \times 100 = 0{,}0579$ □Fuss.

Die gemeine Rechnung ergiebt $100 : 1728 = 0{,}0579$.

§. 29. Was die theoretischen Gründe dieser kleinen Reciprokenkunst des Messknechts anlangt, so ist es für den mit der Trigonometrie Vertrauten eine bekannte Sache, dass zwischen jeder Secanten- und Cosinustabelle die hier benutzte Wechselbeziehung statt hat, oder dass immer $sec.\ \alpha = \frac{1}{cos.\ \alpha}$; und $cos.\ \alpha = \frac{1}{sec.\ \alpha}$ ist, also immer die Cosinuszahl irgend eines Winkels die Reciprokenziffer giebt von der Secantenzahl desselben Winkels; und umgekehrt.

§. 30. **Specielle Reciprokentafel der Zahl 144.**

Die Division mit 144 kommt in allen denjenigen Zweigen der technischen Arithmetik, welche mit dem Duodecimalmaasse in Beziehung stehen, sehr häufig vor. Quadratlinien in Quadratzolle, Quadratzolle in Quadratfusse, preuss. Quadratfusse in dergl. Quadratruthen, preuss. Kubikfusse in preuss. Schachtruthen u. s. w. zu verwandeln — überall will durch 144 dividirt oder mit $\frac{1}{144}$ multiplicirt sein.

Nun aber dient des Knechts *Pr.*-Spalte der Vor-

derseite dazu, die Körperinhalte der **Prismen**, namentlich der Balken, in Kubikfussen nach Hunderteln anzugeben, wenn deren Querschnitt in □Zollen in der Spalte *Pr.* aufgesucht wird. Ein Balken, der 65 □Zoll Querschnitt hat, hat pro laufenden Fuss nämlich (wie die Mittelskala 100 zeigt) 0,45 Kubikfuss; oder was dasselbe ist, 65 □Zoll sind = 0,45 Quadratfuss; 65 □Linien = 0,45 Quadratzoll.

§. 31. **Die mit 100 überschriebene Mittelskala der Messknechtstafel giebt demnach in Verbindungmit der *Pr.*-Spalte die ein- bis fünfhundertfachen Reciproken der Zahl 144 nach Hunderteln.** Und es gilt für deren desfallsigen Gebrauch die einfache Regel: **Sollst du irgend eine Zahl durch 144 dividiren, so suche sie in der *Pr*-Spalte auf; die ihr zukommende Zahl der 100-Skala um 2 Decimalen verkürzt, giebt den Quotienten. Hat man aber diese Zahl bis zu ihren Zehnteln abgelesen, was vollständig angeht, so sind 3 Decimalen abzuschneiden.**

§. 32. **Beispiele** über die *Pr.*-Spalte als Reciprokentafel.

1) 340½ Kubikfuss Erdmasse soll in Schachtruthen (à 144 Kubikfuss) ausgedrückt werden.
   Auflös. 340½ der *Pr.*-Spalte zeigt auf 2365 der Mittelskala; also ist obige Masse = 2,365 Schachtruthen.
2) Ein Stamm soll 95 □Zoll (Duodec.) Querschnitt haben; wie drückt sich diese Fläche nach Quadratfussen aus?
   Auflös. 95 der *Pr.*-Spalte zeigt auf 66; also ist das Gesuchte = 0,66 □Fuss.
3) 1050 □Linien (Duodec.) sollen als Quadratzolle ausgedrückt werden.
   Auflös. Wir nehmen, da 1050 die Tafel übersteigt, das Zehntel 105 und finden bei 105 der *Pr.*-Spalte, wenn gleich 3 Stellen abgeschnitten werden, die Re-

ciproke 0,728 □Zoll; also für das Zehnfachgrosse 7,28 □Zoll.

4) Den Bruch $\frac{275}{144}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflös. Die 275 der *Pr.*-Spalte zeigt auf 1909 der Mittelskala; also, vermöge des Abschneidens von drei Decimalen, $\frac{275}{144} = 1,909$.

Drittes Kapitel.

Der Messknecht als Quadratwurzelzieher.

§. 33. Keiner Operation der gemeinen Arithmetik wird Derjenige, welcher nicht immer in mathematischen Rechnungen zu arbeiten hat, so leicht entfremdet, als der Extraktion der Wurzeln. Entweder entschwindet dem Gedächtnisse das dabei zu beobachtende Verfahren ganz und gar und der Herr Besitzer dieses Gedächtnisses ist dann fast ganz in dem Falle des von Haus aus mathematisch Ungelehrten; oder es ist im günstigen Falle noch genug wissenschaftliches Material vorhanden, sich zurecht zu finden. Gewöhnlich machen aber dabei die entwöhnten Bewegungen der Denkkraft so viel Unbequemlichkeit, dass man häufig genug lieber sich mit einer unsichern Schätzung als sichern Rechnung begnügt.

§. 34. Und doch tritt die Nothwendigkeit der Extraktion einer Wurzel, wenigstens der einer Quadratwurzel, auch in ganz gewöhnlichen Fällen der Praxis dem mathematisch betriebsamen Manne gar häufig entgegen.

Zum Beispiel:

1) Man will oder soll einen Probeplatz von einem sächsischen Acker (= 300 □R. = 69008,333 □Werkfuss) in Form eines Quadrates abstecken oder abschreiten.

Um die dazu nöthige Seitenlänge in Ruthen zu finden, müssen wir aus 300, oder um sie gleich in Fussen zu haben, aus 69008⅓ die Quadratwurzel ($\sqrt{\ }$) ziehen. Das gewöhnliche Verfahren erheischt dabei, wie bekannt, folgendes Rechnungswerk:

$\sqrt{\ }$	3	00,	00,	00	= 17,32 Ruth.
	1				
	2	00			
[Doppel-Wurzel =		2] 7			
		7			
	1	89			
Rest =		11	00		
[Doppel-Wurzel =		3	4] 3		
			3		
		10	29		
Rest =			71	00	
[Doppel-Wurzel =			34	6] 2	
				2	
				6 9 2 4	

und

$\sqrt{\ }$	6	90	08,	33	33	= 262,69 Fss.
	4					
	2	90				
[Doppel-Wurzel =		4] 6				
		6				
Produkt =	2	76				
Rest =		14	08			
[Doppel-Wurzel =		5	2] 2			
			2			
Produkt =		10	44			
Rest =		3	64	33		
[Doppel-Wurzel =			52	4] 6		
				6		
Produkt =			3 1 4 7 6			
Rest =			4 9 5 7		33	
[Doppel-Wurzel =			5 2 5		2] 9	
					9	
			4 7 2 7 6 1			

Man müsste also ein Quadrat von 17,3 sächs. Ruthen

= 86,5 Ruthenschritte (à ⅓ Ruth.), oder von 262,7 Werkfusse abstecken.

Oder: 2) Ein spekulativer Geschäftsmann will aus der Nachwerthstafel des Messknechts, welche das Anwachsen des Kapitals nur für die runden Zinsfusse 2, 3, 4 und 5 angiebt, gern möglichst genau ableiten, welchen Werth ein eben zu verwendendes Kapital mit seinen Zinseszinsen nach 40 Jahren erlangen müsste, wenn es als mit 3½ Proc. angelegt betrachtet werden soll.

Die Nachwerthstafel auf des Messknechts Rückseite giebt bei der Zeit von 40 Jahren und bei 3 Proc. an: $a =$ das 3,262fache und bei 4 Proc.: $b =$ das 4,801fache. Bei grober Zwischenrechnung nimmt man für 3½ Proc. das gemeine (sogenannte arithmetische) Mittel als $c = \frac{3,262 + 4,801}{2} = 4,03$fach. Die genaue oder richtige Zwischenrechnung verlangt aber das sogenannte **geometrische Mittel** zwischen a und b nämlich $c = \sqrt{a\,b}$, d. h. die Quadratwurzel aus dem Produkte beider Nachwerthe. Und da nun das Produkt $3,262 \times 4,801 = 15,66086$, so folgt das Verlangte:

$c = \sqrt{15,6609} = 3,96$, das um 7 Hundertel vom gemeinen Mittel verschieden ist.

15,	66	09
9		
6	66	
	(6)9	
	9	
6	21	
	45	09
	(7	8)6
		6
	4 7	1 6

Betrüge das Anlagecapital 100 Thlr., so müsste dies demgemäss nach 40 Jahren gewachsen sein auf $3,96 \times 100 = 396$ Thlr.

Oder: 3) Ein im Okularschätzen der Holzbestände gänzlich Ungeübter will nach einer der so leichten Messknechtsmethoden, z. B. nach der der Quadratprobe (siehe Holz-

messkunst; Bestandesmassenschätzung) eine Forsttaxation ausführen. Diese Methode verlangt, dass man aus der auf dem Probequadrate stehenden Anzahl der Stämme die Quadratwurzel ziehe. Wäre also jene Anzahl = 39, so hätte man, um zur verlangten Wurzel zu kommen, zu rechnen:

$\sqrt{39} = \sqrt{39\,|\,00\,|\,00} = 6{,}24$; fast $= 6\frac{1}{4}$.

39	00	00
36		
3	00	
(1	2)2	
	2	
2	44	
	56	00
	(12	4)

§. 34. In Anbetracht der immerhin etwas umständlichen Extraktionsarbeit sieht es aber selbst der mathematisch Geübte gern, wenn er sich diese Arbeit durch eine Tabellenablesung ersparen kann, wie die in den mathematischen Handbüchern enthaltenen viel benutzten Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln beweisen.

Die Kubik- oder dritte Wurzel einer Zahl (z. B. 216), d. i. die Zahl, welche, dreimal als Faktor in sich multiplizirt, die gegebene hervorbringt (hier 6, da $6 \times 6 \times 6$ oder $6^3 = 216$; also $\sqrt{216} = 6$ ist), kommt indess in der mathematischen Praxis schon seltener vor, so dass der Messknecht es nicht für gut befunden hat, sich in diese Kunst einzustudiren. Wohl aber empfiehlt er sich den Rechnern als ein Quadratwurzelextrahirer, der ihnen diese Wurzelart bis auf mindestens drei Ziffern genau angiebt und dabei von seinem Herrn bloss eine ganz einfache Multiplikation verlangt.

§. 35. Sofern aber Jemand eine Quadratwurzel ausziehen will — sei es nun auf dem längeren Wege der natürlichen Rechnung oder auf dem kürzeren künstlichen Wege der Wurzeltafel —, muss er immer folgende Wahrheiten vor Augen haben:

1) Die der Ausziehung zu unterwerfende Zahl, der Ra-

dikand, ist durch Vertikalstriche in Klassen von 2 zu 2 Ziffern abzutheilen oder abgetheilt zu denken. Der erste oder Hauptstrich kommt stets hinter die Einer, oder wenn Decimalen vorhanden sind, an die Stelle des Kommas. — Die links vom Hauptstrich stehenden Klassen, die Klassen der Ganzen, wollen wir die Ober-, die anderen die Unter-Klassen nennen. Die Zahl der letzteren kann durch angehängte Nullen beliebig vermehrt werden.

Z. B. Radikanden: *a*) 25920; *b*) 135,375; *c*) 0,08375; *d*) 0,00008375.

Abgetheilt:

a') 2|59|20|; *b'*) 1|35,|37|50|; *c'*) 0,|08|37|50|; *d'*) 0,|00|00|83|75|

2) Soviel Oberklassen der Radikand besitzt, soviel Ziffern sind von der Wurzelzahl als Ganze abzuschneiden. Giebt uns z. B. die Wurzeltafel die Wurzelzahl von obiger Grösse *a'* (25920) = 160996, so ist demnach die Wurzel *w* = 160,996, oder fast = 161,0.

Oder, wenn die Wurzel der Grösse *b'* die Ziffern 11635 enthält, so hat man wegen der zwei Oberklassen *w* = 11,635.

3) Sind nur Unterklassen vorhanden, so sind der Wurzelzahl Null Ganze und ausser dem noch soviel Nullen vorzusetzen, als Unterklassen fehlen. Z. B.:

Die Wurzelziffern des Decimalbruchs *c'* sind 2894; folglich die Wurzel selbst *w* = 0,2894.

Dagegen sind für den Werth *d'* (wegen der nothwendig nach 1) veränderten Abtheilungsweise) die Wurzelziffern 9152, also *w* = 0,009152.

4) Zieht man, anstatt aus dem vollen Radikanden, die Wurzel aus seinem Viertel, Neuntel, Hundertel, so erhält man statt der vollen Wurzel beziehlich deren Hälfte, Drittel, Zehntel.

5) Niemals darf man die aus je 2 Ziffern (nach dem *sub* 1 bemerkten Gesetze) gebildeten Klassen auseinanderreissen.

Wenn also aus 8375 die Quadratwurzel zu ziehen wäre,

müsste man, da die beiden Klassen hier 83 und 75 sind, oder abgetheilt sich als 83|75 gestalten, in einer Wurzeltafel entweder 8375 aufsuchen, oder, wenn die Tafel nur dreizifferig wäre, ja nicht 837,5, sondern 83,75. Denn aus 83,75 oder 83³/₄ gestalten sich die Klassenzahlen genau eben so, als aus 8375; während bei 837¹/₂ oder 837,5 ganz andere Klassenwerthe 8|37|50 zum Vorschein kommen würden.

§. 36. Mit Voraussetzung vorstehender Wahrheiten, welche beim Gebrauch jeder Wurzeltafel gekannt und beachtet sein wollen, kann der Messknecht allen denen, die ihn als gemüthlichen oder gemüthliche Faullenzer beim Wurzelextrahiren zu Hülfe nehmen wollen, mit folgender einfachen Regel dienen:

1) Wenn die Wurzel bis höchstens drei Ziffern richtig zu sein braucht:
   Suche den Radikanden in der mit 100 überschriebenen Inhaltsskala auf und nimm die ihr zugehörige Zahl der *Sx.*-Spalte dreifach.

2) Wenn die Wurzel bis mindestens drei Ziffern korrekt sein soll:
   Addire zu dem, wie eben angegeben, gefundenen Dreifachen die um 2 Stellen rechts gerückte Hälfte desselben.

Zusatz. Nimmt man, oder muss man nehmen, vom Radikanden das Viertel, oder Neuntel, so multiplizire man gleich mit sechs, resp. neun statt mit drei.

§. 37. Zu Beispielen werden wir am besten alle in den vorigen Paragraphen bereits gezogenen Wurzeln wählen, da dadurch dem Leser am einfachsten die Richtigkeitsprobe geliefert wird.

1. Beispiel. Die Quadratwurzel aus 300?

Zu 300 der Mittelskala gehört 57,4, genauer 57,45 der *Sx.*-Spalte. Wir nehmen nur die Ziffern, also 5745.

Das Dreifache giebt 17235, also, da der Radikand 2 Oberklassen hat: $w = 17,2$.

Genauer: 17235

$$\begin{array}{rl} 2) & \underline{8617} \\ & 17{,}321 \end{array}$$
(Vergl. S. 35.)

2. Beispiel. $\sqrt{15{,}6609}$?

Abgetheilt, erhält man 15|66|09; und es ist als Radikand 15,66 oder $15^2/_3$ zu nehmen. Dazu giebt die *Sx.*-Spalte 13,2 oder 132; dessen Dreifaches 396, so dass $\sqrt{15{,}66} = 3{,}96$. (Vergl. S. 36.)

3. Beispiel. $\sqrt{39}$?

Zu 39 der Mittelskala zeigt die *Sx.*-Spalte die Ziffer 20,7 oder 207, deren Dreifaches 621; also $w = 6{,}21$.

Genauer: 621

$$\begin{array}{rl} 2) & \underline{310} \\ & 62410; \end{array}$$
$w = 6{,}24$. (Vergl. S. 37.)

4. Beispiel. Die Wurzel aus 69008?

Abgetheilt, erhielte man 3 Oberklassen 6|90|08, von denen, da unsere Wurzeltafel nicht über dreistellige Zahlen hinausreicht, nur die zwei ersten (690, richtiger 690,08 oder 690,1) aufgesucht werden. Da aber auch diese 690 die Tafel überschreitet, nimmt der Kundige sofort nur deren Viertel $172^1/_2$ oder von Haus aus, das Viertel des ganzen Radikanden $= \frac{69001}{4} = 17252$; (4. §. 35) abgetheilt als 1|72|52; findet zu 172,52 oder $172^1/_2$ der Inhaltsskala (100) die zubehörigen Ziffern der *Sx.*-Spalte mit 43,6 und das Sechsfache (§. 36) dieser Ziffer 436 mit 2616, also wegen der drei Oberklassen 261,6, wofür 262 zu setzen.

Genauer:

$$\begin{array}{rl} \text{Ablesung der } Sx.\text{-Spalte:} & \underline{4357} \\ & 26142\ (6 \\ 2) & \underline{113071} \\ & 2627274, \end{array}$$
d. h.

$\sqrt{69008} = 262{,}7$. (Vergl. S. 35.)

5. Beispiel. Einen preuss. Morgen (à 25920 □Fuss) im Quadrate abzustecken. Wie gross die Seite s? $s = \sqrt{25920}$; abgetheilt 2|59|20|; zu 259,2 der Hun-

dertskala die Ziffer der *Sx.*-Spalte gesucht, findet sich 53,4 oder 534; deren Dreifaches die Wurzel 160,2 bis 3 Ziffern giebt.

Genauer: 1602
2) 801
16100; also $w = 161{,}0$. (S. 38 unter 2)).

6. Beispiel. Welche Zahl w bringt, mit sich selbst multiplizirt, die Grösse 135,4 hervor?

$\sqrt{135{,}4}$; abgetheilt 1|35|40.

Zu 135,40 oder 135,4 der Hundertskala giebt die *Sx.*-Spalte die Ziffer 386; deren Dreifaches 1158 gehörig abgetheilt die Wurzel 11,58, d. i. 11,6 giebt.

Genauer: 1158
2) 579
116379; also $w = 11{,}64$. (S. 38 unter 2)).

7. Beispiel. Die Wurzel aus 0,08375?

Abgetheilt 0,|08|37|50; es wäre also 837,5 aufzusuchen; von dem wir jedoch, da es die Tafel überschreitet, sein Viertel 209,4 nehmen, wozu die *Sx.*-Spalte die Ziffer 48 und deren Sechsfaches 288 die Wurzel giebt, die gemäss obiger Abtheilung = 0,288 ist.

Genauer: 0,288
2) 144
0,2894. (S. 38 unter 3)).

8. Beispiel. $\sqrt{0{,}00008375}$?

Abgetheilt 0,|00|00|83|75; und 83,75 oder $83\frac{3}{4}$ in der Hundertskala aufgesucht, giebt in der *Sx.*-Spalte die Ziffer 30,4 oder 304; und da deren Dreifaches 912 ist, und im Radikanden 2 Unterklassen fehlen, folgt $w = 0{,}00912$.

Genauer: Ablesung = 30,35 oder 3035
9105 (3
2) 4552
915052;
also $w = 0{,}009151$. (S. 38 unter 3)).

§. 38. Die wissenschaftliche Rechtfertigung der hier praktisch erprobten Regel liegt in Folgendem.

Die *Sx.*-Spalte ist eigentlich ein Tabelleneingang zur Ablesung der Kreisflächensechstel; oder: zur Quadrirung der Kreissextanten. Die Durchmesserzolle sind in jene Spalte in Strich und Zahl so eingetragen, dass sie in der Mittelskala (100) die Sextantenflächen in Quadratfussen des Duodecimalmaasses angeben.

Einem Durchmesser von d Duodecimalzollen entspricht aber eine Kreisfläche von $\frac{\pi}{4 \cdot 144} d^2$ □Fussen; also eine Sextantenfläche von $\frac{\pi}{24 \cdot 144} d^2$ □Fussen.

Jede Zahl d der *Sx.*-Spalte steht also stets bei der Zahl $\frac{\pi}{3456} d^2 = R$ der Mittelskala und umgekehrt.

Diese Wechselbeziehung kann man unserem Zwecke gemäss wie folgt benutzen.

Bezeichnen wir die Wurzel aus obigem Werthe $R = \frac{\pi}{3456} d^2$ mit w, so hat man $\sqrt{R} = w = \sqrt{\frac{\pi}{3456} d^2}$ $= 0{,}030150\ d$; oder abgekürzt: $w = 0{,}03\ d$.

Und wenn wir uns um das Komma gar nicht, sondern bloss um die Ziffern kümmern, so liegt hierin die im §. 36 aufgestellte Regel:

Multiplizire die dem (in der Mittelskala aufgesuchten) Radikanden R entsprechende Zahl d der *Sx.*-Spalte mit 3.

Weil aber die genaue Ziffer des Multiplikators nicht 3, sondern 3015, diese 15 aber als die hundertmal kleinere Hälfte der ihr vorgehenden 30 anzusehen ist, so folgt daraus die zweite und genauere in §. 36 gegebene Anweisung.

Viertes Kapitel.

Der Messknecht als Zins-, Zuwachs- und Diskont-Berechner.

§. 39. Im bürgerlichen, technischen und im staatlichen Verwaltungsleben spielen jene finanziellen Rechnungen, die sich auf Kapital-Verzinsung und Zinsverzinsung beziehen, eine ganz bedeutende Rolle. Ein wahrer Schmerz ist's aber für den Mathematiker, zu sehen, mit welcher Umständlichkeit, oder, um diese zu vermeiden, mit welcher fehlerhaften Oberflächlichkeit oft die gewöhnlichsten der hier einschlagenden Fragen im Leben behandelt werden und zu welchen gewaltigen Selbsttäuschungen oft solche Behandlungsweise führt.

Wie oft kommt z. B. der Fall vor, dass ein Techniker also rechnet: »Diese Vorrichtung kostet 100 Thlr. und wird sich in 20 Jahren vollständig abgenutzt haben; ich habe also in meinem Inventarium als jährliche Abnutzungsrente dieses Apparats $\frac{100}{20} = 5$ Thlr. oder 5 Proc. des Neuwerthes, oder, wenn ich 4procentige Verzinsung mit aufrechne $\frac{100 + 80}{20} = 9$ Thlr. anzusetzen«; während doch bei richtigem Kalküle die Wahrheit zufällig hier fast in die Mitte fällt und die Abnutzungsrente etwas über 7 Proc. des Anfangswerths beträgt. —

Oder dass ein Grundbesitzer sich einbildet, seine Kiefern, die er mit dem 60. Jahre abtreibt und die ihm dann pro Acker 80 Klaftern, also einen jährlichen Durchschnittszuwachs von $\frac{80}{60} = 1\frac{1}{3}$ Klaftern à 3 Thlr. Nettowerth liefern, gewährten ihm demgemäss eine Bodenrente von $1\frac{1}{3} \times 3 = 4$ Thlr.; während doch der richtige Kalkül ihm die Antwort giebt, dass diese seine Kiefernwirthschaft ihm bei solcher Holztaxe nur eine Bodenrente von

knapp $1\frac{1}{2}$ Thlr. abwirft, selbst wenn er von seinem Grund- und Betriebskapitale nur eine 3procentige Verzinsung beanspruchte; und gar nur 1 Thlr., sofern er die billige Anforderung einer 4procentigen Verzinsung stellt. —

Oder der Forstwirth, der den Nutzungswerth eines zum Kaufe angebotenen aus jungen Hölzern bestehenden Waldgrundstücks also begutachtet: »Das Holz ist 20 Jahre alt und liefert beim Abtriebe im 90. Jahre einen Reinertrag von 300 Thlrn. pro Acker; es findet sich also nach der Diskontrechnung bei 4 Proc. von diesem nach 70 Jahren fälligen Ertrage der gegenwärtige Werth nach: $(100 + 4 \cdot 70) : 100 = 300 : x$; woraus $x = 78{,}95$, oder fast 79 Thlr., während doch ihm jede Sparkasse, sobald er nur die Hälfte dieses Rechnungsresultates ($39\frac{1}{2}$ Thlr.) einlegt, nach Verlauf der 70 Jahre ohne Weiteres die Summe von $312\frac{3}{4}$ Thlr. auszahlt, obgleich diese die Einlagen nur zu 3 Proc. verzinst!«

§. 40. Die richtige Antwort auf solche und ähnliche im bürgerlichen und technischen Leben so oft aufstossende Fragen hat für den Geschäfts- und Verwaltungsmann einen um so grösseren Werth, je mehr der Inhalt und Umfang seines Berufs klares Bewusstsein bei der Beurtheilung seiner bedeutendsten Verhältnisse, zu denen immerhin die finanziellen gehören, nöthig machen.

Die Lösung derlei Aufgaben auf dem streng wissenschaftlichen Wege der Algebra übersteigt aber einerseits oft die mathematische Kraft der Betheiligten; andererseits führt sie — selbst in der Hand des Sachverständigen — zu einem unnützen, weil leicht zu vermeidenden — Zeitverluste. Oft endlich ist nur eine kurze Spanne Zeit gegeben, binnen welcher die Antwort fertig sein soll, so dass es das mathematische Geschäftsleben dem Knechte Dank wissen wird, wenn er auch für diese Seite desselben das beste Hülfsmittel in recht einfacher und kompendiöser und leicht und schnell benutzbarer Weise mit in sich begreift, wie es die Zins- und Rententafeln bieten; obgleich der Gebrauch von Zins- und Diskonttafeln zur Abkürzung von derlei Rechnungen an sich etwas Altes und Bekanntes ist.

§. 41. **Begriffe und Bezeichnungen.** Wenn je 100 Einheiten eines Kapitalstocks ($= K$, den man sich auch aus lebender Holzmasse bestehend denken kann), jährlich 4 Einheiten Zuwachs haben, so sagen wir bekanntlich: »Das Kapital trägt 4 Procent«; oder »sein Zuwachsprocent (p) oder Zinsfuss ist 4«. Anstatt diese Zuwachsgrösse oder den Zinsfuss auf den Fond 100, kann man ihn aber auch auf das Kapital 1 beziehen, und sagen: er beträgt (bei 4 Proc.) 4 Hundertel $= \frac{4}{100} = 0{,}04$; od. $\frac{1}{25}$ des Fonds. In dieser Form nennen wir ihn den Einheitszuwachs oder Einheitszins (e) und merken uns:

1) dass aus dem Procent p der Einheitszins e sich herleitet, entweder indem wir jenes durch 100 dividiren oder es als Hundertel eines Decimalbruchs schreiben ($e = \frac{p}{100}$, oder $= 0{,}0p$);
2) dass man den Einheitszins in Procent verwandelt, indem man ihn verhundertfacht, also im Falle er als Decimalbruch geschrieben ist, die Ziffer der zweiten Stelle als Ganze, die der dritten als Zehntel-Procent schreibt.

Zum Beispiel. Bei $p = 5$ Proc. wäre der $e = \frac{5}{100}$
$= \frac{1}{20}$; oder $e = 0{,}05$; bei $3\frac{1}{2}$ Proc. $e = 0{,}035$.

Und wenn $e = \frac{1}{50}$, ist $p = \frac{1}{50} \times 100 = 2$ Proc., oder
wenn $e = 0{,}033$, ist $p = 3{,}3$ Proc.

§. 42. (Fortsetzung.) Den Werth, den in Folge des Zuwachses irgend ein Fond K nach 1, 2, 3 . . . n Jahren hat, nennen wir seinen ein-, zwei-, drei-, n-jährigen Nachwerth (N), und den es vor soviel Jahren hatte, seinen ein-, zwei-, drei-, n-jährigen Vorwerth (V).

Bei einem Kapitale von 100 Thlrn., das alljährlich 5 Thlr. Zuwachs hat, bilden sich die Nachwerthe nach folgender Reihe:

Nachwerth zu Ende des Jahres.

$$\underbrace{100+5}_{1.};\quad \underbrace{100+2\times5}_{2.};\quad \underbrace{100+3\times5}_{3.};\quad \underbrace{100+4\times5}_{4.};\quad \underbrace{100+n\times5}_{n};$$

oder

$$105; \underbrace{\quad}_{+5} 110; \underbrace{\quad}_{+5} 115; \underbrace{\quad}_{+5} 120; \underbrace{\quad}_{+5} 125 \ldots 100+5\,n;$$

so dass z. B. der 10jährige Nachwerth des Kapitals 100 bei 5 Proc. sich als $100 + 5 \,.\, 10 = 150$ ergiebt, also der des 100mal kleineren Kapitals 1 natürlich 100-mal kleiner und $= \frac{150}{100} = 1{,}5$.

Wir wollen letzteren den Einheitsnachwerth nennen und immer mit N_1 oder kurzweg N bezeichnen, nach welcher Symbolik im vorstehenden Falle $N_1 = 1{,}5$ und demgemäss der Nachwerth des Kapitals 100 sein würde $N_{100} = 150$, nämlich $= 100 \times 1{,}5 = 100\ N_1$; oder allgemein in Buchstaben ausgedrückt: der Nachwerth des Kapitals $K\ N_K = K \times N_1$ oder kurzweg $= K \,.\, N$.

Die obige Nachwerthsreihe bildet eine sogenannte einfache arithmetische, d. h. eine Reihe mit gleichen Differenzen (= 5). Dies findet immer statt, wenn der Zuwachs oder Zins nicht ebenfalls mit zuwächst oder mit verzinst wird, sondern gleichsam todt neben dem Fond liegen bleibt. Wir nennen einen solchen daher kurzweg auch den einfachen oder arithmetischen Zins oder Zuwachs.

§. 43. (Fortsetzung.) Sobald aber der Zuwachs dieselbe Vergrösserungsfähigkeit besitzt, als der Kapitalstock, so ist — unter Beibehaltung des vorigen Beispiels — jeder Nachwerth um 5 Proc. oder $\frac{1}{20}$ grösser als der des vorigen Jahres, oder $1\,\frac{1}{20}$, oder 1,05mal so gross; und es bilden sonach die Nachwerthe der einzelnen Jahre bei einem Kapitale 100 zu 5 Proc. die Reihe:

$$\begin{array}{lll} 1. & 2. & 3. \\ N = 100 \times 1{,}05; & 105 \times 1{,}05; & 110{,}2 \times 1{,}05; \\ \quad = 105 & \quad = 110{,}2 & \quad = 115{,}8. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4. & 5. \\ 115{,}8 \times 1{,}05; & 121{,}6 \times 1{,}05; \\ \quad = 121{,}6 & \quad = 127{,}6, \end{array}$$

oder,

wenn man statt des Kapitals 100 das Kapital 1, sämmtliche Nachwerthe demnach 100mal kleiner nimmt:

$$\begin{array}{lllll} 1. & 2. & 3. & 4. & n. \\ 1{,}05; & 1{,}05 \times 1{,}05; & 1{,}05^2 \times 1{,}05; & 1{,}05^3 \times 1{,}05; & 1{,}05^{n-1} \times 1{,}05; \\ & = 1{,}05^2 & = 1{,}05^3 & = 1{,}05^4 & = 1{,}05^n \\ & = 1{,}102 & = 1{,}150 & = 1{,}216. & \end{array}$$

In diesem Falle bilden also die Nachwerthe eine sogenannte geometrische, d. h. eine Reihe mit gleichen Quotienten oder Faktoren zwischen ihren Gliedern. Deshalb kann man diesen Zinseszins oder Doppelzuwachs auch als geometrische Mehrung bezeichnen. Bezeichnet wieder N_K den Nachwerth des Kapitals K und N den des Kapitals 1, so muss, wie schon aus obigen beiden Reihen deutlich hervorgeht, der Nachwerth N_K auch hier Kmal so gross sein als der Einheitsnachwerth N_1 (oder N) für den betreffenden Zeitraum und Zinsfuss, also wieder $N_K = K . N$.

§. 44. Die Lehren der einfachen Zuwachs-, Zins- und Diskontrechnung sind an sich so einfach und so leicht ausführbar, dass wir besonderer Hülfsmittel dazu nicht bedürfen. Gewöhnlich bedient man sich zu ihrer Auflösung der Proportionsrechnung oder *in specie* des Rees'schen Satzes. Besser ist's aber, sich ein- für allemal die Formel:

$$N = (1 + en)\,K \text{ oder } N = K + en\,K$$

zu merken, die sich leicht aus der ersten Reihe der Seite 46 bildet, wenn man statt des Kapitals 100 den Buchstaben K, statt der Zahl des Jahres den Buchstaben n und statt des Einheitszinses 0,05 den Buchstaben e einsetzt, indem sich dann der dortige $n$jährige Nachwerth $100 + 5\,n$

$= 100 + 100 \times \frac{5}{100} n$ verwandelt in den allgemeinen Ausdruck $= K + K \times e \times n = K (1 + en)$.

Und wer nur ein ganz klein wenig eine so einfache Gleichung $N = (1 + en) K$ zu lesen und zu behandeln versteht, kann, mit jener Formel im Kopfe, leicht jedweden auf einfachen Zuwachs beruhenden Rechnungsfall auflösen, ohne sich — wie es die gewöhnlichen Rechnenbücher verlangen — um die direkte und indirekte Beschaffenheit und Rabattirungsverhältnisse u. dergl. mehr zu kümmern. Er setzt, wie die folgenden Beispiele lehren, die gegebenen Werthe statt der Buchstaben in die Gleichung und reducirt diese auf die einfachste Weise von der Welt auf den Buchstaben der gesuchten Grösse.

Wem aber auch dies noch zu umständlich ist, für den folge hier die einfache Zinsformel gleich reducirt für jeden vorkommenden Fall, so dass man nichts zu thun, als nur statt der Buchstaben ihren Zahlenwerth (dabei n stets als Jahr ausgedrückt) einzusetzen hat.

1) Wenn der Nachwerth oder die Zinsen gesucht: $N = (1 + en) K$.

2) Wenn der Vorwerth oder der Diskont gesucht: $K = \frac{N}{1 + en}$;

3) Wenn der Zinsfuss gesucht: $e = \frac{N - K}{nK}$ u. $100\, e = p$.

4) Wenn die Zeit gesucht ist: $n = \frac{N - K}{eK}$.

§. 45. Erläuterungsbeispiele zur einfachen Zins-, Zuwachs- und Rabattrechnung.

1. Beispiel (gesucht ein Nachwerth). Wenn der Acker Land 150 Thlr. werth ist und mit Holz zu bepflanzen 20 Thlr. kostet, welchen Werth müsste dieser Bestand nach 60 Jahren haben, wenn man nur 4 Proc. einfache Zinsen des Anlagekapitals beansprucht?

Gegeben $K = 150 + 20 = 170$ Thlr.; $n = 60$; $e = \frac{4}{100} = 0{,}04$.

Formel: $N = (1 + en) K = (1 + 0{,}04 . 60) 170 = 3{,}4 \times 170 = 578$ Thlr.

2. **Beispiel** (gesucht der arithmetische oder einfache Zuwachs). Wieviel Interessen gewähren 60 Thlr. bei 5 Proc. in 30 Monaten?

Gegeben $K = 60$; $e = 0{,}05$; $n = \frac{30}{12} = 2\frac{1}{2}$ Jahr; also

$N = (1 + 0{,}05 \cdot \frac{5}{2})\ 60 = 1{,}125 \cdot 60 = 67{,}5$; mithin die Interessen $= 7{,}5$ Thlr.

3. **Beispiel** (gesucht ein Vorwerth). Wenn ein Wechsel von 240 Thlrn. erst nach 7 Monaten fällig ist und mit 6 Proc. diskontirt werden soll, welchen Kaufpreis hat er diesem nach?

Gegeben $N = 240$; $n = \frac{7}{12}$; $e = 0{,}06$; gesucht K. — Kehren wir die Formel um, so dass die unbekannte Grösse immer im linken Theile steht, so hat man $(1 + en) K = N$, also durch Einsetzung der Zahlenwerthe $(1 + 0{,}06 \cdot \frac{7}{12})\ K = 240$:

$$1{,}035\ K = 240;$$

$$\text{also } K = \frac{240}{1{,}035} = 23{,}19 \text{ Thlr., beinahe}$$

$23\frac{1}{5}$ Thlr.

4. **Beispiel** (gesucht der Diskont oder Rabatt). Um wieviel ist, wenn man 4 Proc. einfache Verzinsung annimmt, ein erst nach 20 Jahren erfolgender Ertrag von 100 Thlrn. weniger werth als eine sofortige baare Einnahme von 100 Thlrn.?

Gegeben $N = 100$; $e = 0{,}04$; $n = 20$, also $en = 0{,}8$; gesucht zunächst K als Vorwerth $(1 + en) K = N$; also $1{,}8\ K = 100$:

$$K = \frac{100}{1{,}8} = \frac{1000}{18} = 55\frac{5}{9} \text{ Thlr., dem-}$$

nach der Diskont $= 100 - 55\frac{5}{9} = 44\frac{4}{9}$ Thlr., d. h. jede nach 20 Jahren erfolgende Einnahme ist unter obigen Annahmen $44\frac{4}{9}$ Proc. weniger Werth als eine Baareinnahme.

5. **Beispiel** (gesucht die Zeit). Wieviel Jahre werden 1000 Klaftern oder irgend ein Kapital brauchen, um sich bei $4\frac{1}{2}$ Proc. einfachem oder konstantem Zuwachs zu verdreifachen?

Gegeben $K = 1000$; $N = 3000$; $e = 0{,}045$; gesucht n.

$$(1 + en)\,K = N \text{ oder } (1 + 0{,}045\,n)\,1000 = 3000$$

$$1 + 0{,}045\,n = 3$$

$$0{,}045\,n = 3 - 1 = 2$$

$$n = \frac{2}{0{,}045} = \frac{2000}{45}$$

$= 44\frac{4}{9}$ Jahre.

6. **Beispiel** (gesucht das Zuwachsprocent). Ein Baum hat gegenwärtig 80 Kubikfuss Holzmasse und vor 10 Jahren 65 Kubikfuss. Man soll den jährlichen Zuwachs während dieser Periode als einfach oder konstant annehmen und in Procenten des anfänglichen Vorraths ausdrücken.

$K = 65$; $N = 80$; $n = 10$; $(1 + en)\,K = N$, oder

$$K + en\,K = N$$

$$65 + e \,.\, 10 \,.\, 65 = 80$$

$$e \,.\, 10 \,.\, 65 = 80 - 65 = 15$$

$$e = \frac{15}{650} = 0{,}023;$$

also $p = 100\,e = 2{,}3$ Proc.

7. **Beispiel.** Man soll den vorigen durchschnittlichen Jahreszuwachs $\frac{80 - 65}{10} = 1{,}5^{c'}$ in Procenten der mittleren Baummasse $\frac{80 + 65}{2}$ ausdrücken.

$$K = \frac{80 + 65}{2} = 72{,}5,\ n = 1,\ N = 72{,}5 + 1{,}5 = 74,$$

$$e = \frac{74 - 72{,}5}{1 \,.\, 72{,}5} = \frac{1{,}5}{72{,}5};\ p = 100 e = \frac{150}{72{,}5} = 2{,}1$$

Procent.

Zusatz. Bezeichnet b die frühere, B die jetzige Baummasse, n den zwischenliegenden Zeitraum in Jahren und p das durchschnittliche oder mittlere Zuwachs-

procent pro Jahr der betreffenden Wachsperiode, so hat man, da obiges 1,5 etwas Anderes nicht als $\frac{B-b}{n}$, und 72,5 = $\frac{B+b}{2}$ ist durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung $e = \frac{1,5}{72,5}$ oder

$p = \frac{1,5}{72,5}$ 100 den Ausdruck

$$p = \frac{1}{n} \cdot \frac{B - b}{\frac{1}{2}(B + b)}\ 100$$

als Formel für das mittlere jährliche Zuwachsprocent des Baumes während der betreffenden n Jahre.

8. Beispiel. Wenn ein Gut innerhalb 24 Jahre seinen Werth von 5000 Thlr. bis auf 9000 Thlr. gesteigert hat und die jährliche Steigerung nach gewöhnlicher arithmetischer Progression, d. h. mit immer gleichem Fortschritte (also wie durch einfachen Zinszuwachs) vorausgesetzt werden soll, wie gross ist alsdann die jährliche Bereicherung nach Procenten des anfänglichen Werthes?

Anfangswerth $K = 5000$; Nachwerth $N = 9000$; $n = 24$; gesucht $p = 100\ e$:

$(1 + en)\ K = N$ oder $K + en\ K = N$

$$5000 + e \,.\, 24 \,.\, 5000 = 9000$$

$$5 + e \,.\, 24 \,.\, 5 = 9$$

$$120\ e = 9 - 5 = 4$$

$$e = \frac{4}{120} \text{ oder } 100\ e = p$$

$$= \frac{400}{120} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Proc.}$$

Doppelter oder Zinseszins. (Geometrischer Zuwachs.)

§. 46. Die Berechnung der Interessen und des Diskontos oder der Vor- und Nachwerthe nach der einfachen Zinsrechnung ist nur in seltenen Fällen gerechtfertigt und liefert namentlich dann stets unbrauchbare und mit dem Leben im Widerspruche stehende Resultate, sobald es sich dabei um mehr als einige Jahre handelt. In

den bei weitem meisten Fällen der hier einschlagenden finanziellen Rechnungen kann allein die Zinseszinsrechnung die richtige Antwort geben.

Jede Sparkasse gestattet ja das jährliche, oft wohl sogar das halbjährliche Kapitalisiren der Zinsen. Auch ist, seltene Ausnahmsfälle abgerechnet, kein Mensch so thöricht, die Zinsen Jahre lang todt liegen zu lassen. Und bei den heutigen Geschäftsverhältnissen kann man sogar die allvierteljährlich einlaufenden Zinsen oft auch allvierteljährlich anlegen oder sonst werbend bethätigen; sei es nun durch Ankauf rententragender Papiere oder auf sonst eine der dem Gewerbsmanne mannigfach sich darbietenden Weisen. Denn was ist die sofortige Verwendung eingehender Erträge im eigenen Geschäfte oder Haushalte anders, als eine sofortige Anlage von Zinsen in der Eigenschaft werbender Kapitalien, wobei sie gar oft als mit 5, 6, 10 Proc. Zinseszins, und also zu weit höherem Zinsfusse angelegt erscheinen, als die so oft verklagte Rechnung gewöhnlich annimmt.

§. 47. Es ist daher in hohem Grade fehlerhaft und führt zu vielfachen gefährlichen Täuschungen, wenn bei Waldwerthberechnungen, bei Abnutzungsanschlägen von Inventarien, bei Kapital-, Ablösungs- und Umwandlungs-Berechnungen rentenartiger Erträge, Servituten u. dergl. nicht nach den Gesetzen der reinen Zinseszinsrechnung verfahren wird. Richtet man nur die Höhe des Zinsfusses den obwaltenden Verhältnissen gemäss, d. h. so ein, dass die Voraussetzung, die Zinsen wenigstens alljährlich zu solchem Fusse sicher und prompt genug unterzubringen, in der Wirklichkeit ihre Bestätigung findet, so ist auch der Forderung des praktischen Lebens genügt, und die Rechnung hält dann jede Probe aus, man mag sie von vorn, von hinten oder von der Mitte aus beginnen oder untersuchen, was bei den Ergebnissen der einfachen Zinsrechnung durchaus nicht der Fall ist.

Die fünfte Berechnung des §. 45 gab uns z. B. die Antwort, dass 1000 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Proc. angelegt, sich in beinahe 45 Jahren verdreifachten, während sie doch in

Wahrheit schon bei 3 Proc., d. h. dafern wir jene 1000 Thlr. ganz einfach und bequem in die erste beste Sparkasse legen, nach 45 Jahren auf 3782 Thlr. angewachsen sind; und wenn wir die Zinsen auch nur alle 2 Jahre zu 4 Proc. anlegen, was gewiss überall statthaft ist, sie dann mit dem Anfangscapitale nach 45 Jahren schon mehr als das Fünffache desselben betragen. Welcher Widerspruch mit dem Leben liegt also in dem Verfahren, wenn man einen nach 45 Jahren zu erwartenden Forstertrag jetzt, wie es die einfache Zinsrechnung bei $4\frac{1}{2}$ Proc. verlangt, zu $\frac{1}{3}$ seines Werthes, oder, wie es sich bei 3 Proc. ergäbe, fast zur Hälfte (43 Proc.) seines Werthes in Rechnung setzte!

§. 48. Nach §. 43 erlangt ein Kapital 1 nach n Jahren bei 5 Proc. Zinsversinsung den Nachwerth (S. S. 47) $N_1 = 1{,}05^n = (1 + 0{,}05)^n = (1 + e)^n$, und ein Kmal so grosses Kapital den Nachwerth $N_K = K\,(1 + e)^n = K \times N_1$, welches die Grundformel der Zinseszinsrechnung ist und welche lehrt:

Um den Nachwerth eines Kapitales zu finden, multiplizire dasselbe mit dem um 1 vermehrten Einheitszinse so viele Male als Jahre gegeben sind. Ein 30jähriger Nachwerth zu 4 Proc. des Kapitales 500 wäre sonach =

$$500 \times \overset{1.}{\overbrace{1{,}04}} \times \overset{2.}{\overbrace{1{,}04}} \times \overset{3.}{\overbrace{1{,}04}} \ldots\ldots \times \overset{30.}{\overbrace{1{,}04}} = 500 \,.\, 1{,}04^{30}.$$

Und um einen Vorwerth zu finden, hätte man aus obiger Formel:

$K = \frac{N_K}{(1 + e)}$, wo N_K das Kapital, K der Vorwerth bedeutet, also der 30jähr. Vorwerth von 500 Thlrn. zu 4 Proc.

$$V = \frac{500}{1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times \ldots\ldots} = 500 \cdot \frac{1}{1{,}04^{30}}.$$

§. 49. Die Formel der doppelten Zins- und Diskont-Rechnung verlangt, wie man leicht sieht, bei ihrer Anwendung den Gebrauch von Logarithmentafeln und setzt schon deshalb oder auch überhaupt mehr algebraische Kenntnisse voraus, als Vielen noch zu Gebote stehen. Das

ist die Hauptursache ihrer Vernachlässigung im Geschäftsleben.

Ausserordentlich einfach gestalten sich aber alle Arbeiten dieser wichtigen Rechnungsart, wenn man sich dazu einer für das Kapital 1 berechneten Vor- und Nachwerthstabelle bedient. Und selbst in der gedrängten Form, wie des Messknechts Rückseite eine solche giebt, bietet sie ein sehr bequemes und schnell wirkendes und für die bei weitem meisten Fälle vollkommen ausreichendes Hülfsmittel dar, dafern man sie nur ordentlich zu behandeln oder auszubeuten vermag.

§. 50. Einrichtung und Wesen der Nachwerthstafel (der Rückseite).

Nach Seite 53 ist bei jährlicher Zinsverzinsung jeder Nachwerth N gleich dem Anfangswerthe K des Kapitals multiplizirt soviele Male mit dem um 1 vermehrten Einheitszins $(1 + e)$, als die Zeit Jahre (n) zählt, oder kurz in algebraischer Weise ausgedrückt:

$$N_K = (1 + e)^n K$$

(lies: Nachwerth von K gleich $1 + e$ zur $n$ten Potenz mal K); oder für das Kapital Eins (1 Thaler, Gulden, Mark), indem $K = 1$ wird:

$$N_1 = (1 + e)^n.$$

Nennen wir diese Grösse $N_1 = (1 + e)^n$ den Einheitsnachwerth (den Nachwerth des Kapitals 1), so erhalten wir bei 5 Proc. den 3jährigen Einheitsnachwerth

$$= 1{,}05^3 = 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 1{,}157,$$

bei 5 Proc. den 10jährigen Einheitswerth

$$= 1{,}05^{10} = 1{,}629,$$

bei 5 Proc. den 100jährigen Einheitswerth

$$= 1{,}05^{100} = 131{,}5.$$

Man vergleiche hiermit die betreffenden Zahlen der Nachwerthstafel des Knechtes, und man wird ohne weiteren Commentar erkennen, dass diese Tafel die Einheitsnachwerthe für den Zinsfuss 2, 3, 4 und 5 Proc. bis zu 200 Jahren enthält; von 10 Jahren ab allerdings mit Sprüngen, die sich jedoch annährend leicht durch einfache Zwi-

schenrechnung (arithmetische Interpolation) mittelst Kopfrechnens ausfüllen lassen. Dieselbe Zwischenrechnung gilt für die zwischen oder inne liegenden Zinsfusse, z. B. $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$ Proc. u. s. w.

§. 51. Die Resultate solcher Zwischenrechnung einfacher Art sind indess nicht ganz genau, um so weniger, je grösser die Zwischenräume sind. Volle Richtigkeit verbürgt die Tabelle zunächst nur für die wirklich gegebenen Zahlen, und sind die etwa einzuschaltenden nur als Nährungswerthe zu betrachten.

Trotzdem wird man sich, wenn die aufzusuchenden Zahlen in der Zinstafel des Knechtes nicht vollständig enthalten sind, in sehr vielen Fällen der ordinären Praxis sogar mit der blossen einfachen Augenschätzung begnügen können. Man wird wohl thun, alle unten folgenden Beispiele erst auf diesem Wege der Augenschätzung und Kopfrechnung zu lösen, um sich den nöthigen Takt darin zu erwerben. Für diesen Fall besteht dann alle Auflösung von derlei Finanz- und Zuwachsrechnungen mehr nur in einer blossen Ablesung, wobei sich denn der Knecht auch für den einfachsten, in mathematischen Dingen ganz kenntnisslosen Mann, als ein sehr schneller Zins- und Diskontrechner bewährt.

§. 52. Hat man aber Ursache, für irgend ein in der Tafel übersprungenes Jahr, z. B. 120, den zugehörigen Nachwerth genau zu wünschen, so hat man nur nöthig, den nächst vorhergehenden, hier 100jährigen, mit dem der noch zugehörigen Jahre zu multipliziren; z. B. bei 3 Proc. ist der 100jährige Nachwerth laut 3 Proc.-Spalte = 19,22 (des Anfangswerthes); der 20jährige Nachwerth dieser Grösse = 1,806 (mal so gross als 19,22); also der 120jährige Nachwerth = 19,22 × 1,806 = 24,71. Nach dieser wissenschaftlich richtigen Einschaltungsweise kann man also auch noch weit über die Tafel hinaus durch einfache Multiplikation die Nachwerthe sehr ferner Zeiten finden.

§. 53. Und wünscht man im besonderen Falle für einen Zwischenzinsfuss, z. B. für $3\frac{1}{2}$ Proc. den entspre-

chenden Vor- oder Nachwerth ebenfalls ganz genau zu wissen, so hat man nur aus dem Produkte der zu 3 und 4 Proc. gehörigen Werthszahlen die Quadratwurzel zu ziehen. Beispiele siehe im 3. Kapitel Seite 36.

§. 54. Handelt es sich dagegen um Ausmittelung eines unbekannten in der Tafel nicht enthaltenen, also einzuschaltenden Zinsfusses oder Zeitraumes, so thut derjenige, welcher selten und wenig rechnet, in der Regel besser, statt des Weges der direkten Einschaltungsrechnung den des Versuchens oder Probirens einzuschlagen, der ihn oft eben so schnell zu einem zureichenden Resultate führt.

§. 55. Auch ist noch zu bemerken, dass, wenn man die Grössen der Nachwerthstafel um 1 Ganzes (den Fond) vermindert, man den dem zugehörigen Zeitraume entsprechenden Zinseszins erhält.

§. 56. Beispiele über Ablesung der Nachwerthstafel. (Siehe Messknechts Rückseite.)

a. Wenn der Zinsfuss in der Tafel enthalten ist:

1. Beispiel. Den Nachwerth des Kapitales 1 bei 2 Proc. nach 12 Jahren zu finden.

Bei 10 Jahren giebt die Tafel 1,219; bei 15 Jahren 1,346; also in dieser Lücke die Differenz pro Jahr $= \frac{0,127}{5} = 0,025$, was pro 2 Jahr 0,05; also für 12 Jahre $1,219 + 0,05 = 1,269$ giebt. (Der richtige Werth ist 1,2682.)

2. Beispiel. Der 75jähr. Einheitsnachwerth bei 4 Proc.?

Der 80jährige 23,05 }
» 70 » 15,57 } aus deren Summe sich, da 75 gerade in der Mitte liegt, leicht das Mittel 19,3 heraus liest; was jedoch gegen die Wahrheit 18,95 um 0,35 zu gross ist. — Vollkommen richtig ist er aber so zu finden:

70jähriger Nachwerth = 15,57 }
5 » » = 1,217 } ; also 75jähriger = $15,57 \times 1,217 = 18,95$.

3. **Beispiel.** Wie gross ist der Zinseszins, den bei 4 Proc. ein Kapital nach 10 Jahren einträgt?
Zeile 10 Spalte 4 Proc. gemäss §. 55 sagt: 0,48, d. h. $\frac{48}{100}$ oder fast die Hälfte des Kapitals.

4. **Beispiel.** Einen 120jährigen Nachwerth von 3 Proc. aus der Tabelle zu lesen.
Die einfache Zwischenrechnung würde geben:

$$N^{150} = 84,25$$
$$N^{100} = 19,22$$

$$\text{Diff.}^{50} = 65,03;\ \text{also Diff.}^{10} = \frac{65,03}{5} = 13,00;$$

also Diff. $^{20} = 26,00$ und $N^{120} = 19,22 + 26 = 45,22$, welcher Werth jedoch von der Wahrheit (wie zu erwarten stand) bedeutend abweicht; denn eine vollständige Nachwerthstabelle giebt den 120jährigen Einheitsnachwerth $N^{120} = 34,71$, der jedoch auch leicht aus der Knechtstabelle abzuleiten, indem man sagt:
Hundertjähriger Nachwerth $N^{100} = 19,22$; und 20jähriger $= 1,806$; also der 120jährige $= 19,22 \times 1,806 = 34,71$.

5. **Beispiel.** Einen 300jährigen Nachwerth bei 3 Proc.?
Der 200jährige $= 369,4$; und der 100jährige 19,22mal so gross; also der 300jährige $= 369,4 \times 19,22 = 7099,9$.

§. 57. (Nachwerthstafel, Fortsetzung.)
b. **Wenn der Zinsfuss zwischen die der Tafel fällt.**

6. **Beispiel.** Der 30jährige Nachwerth bei $3\frac{1}{2}$ Proc.?

Bei 3 Proc. ist er 2,427
» 4 Proc. ist er 3,243

und also das Mittel $= \frac{5,670}{2} = 2,835$, was gegen die Wahrheit 2,807 um 0,026 zu gross ist.

7. **Beispiel.** Der 13jährige Nachwerth bei $4\frac{1}{2}$ Proc.?

bei 4 Proc ist er

$$\text{laut } a)\ 1{,}480 + \frac{0{,}321}{5} \cdot 3 = 1{,}480 + 0{,}192 = 1{,}672$$

$$\text{» 5 » ist er } 1{,}629 + \frac{0{,}450}{5} \cdot 3 = 1{,}629 + 0{,}27 \ = 1{,}899$$

das giebt für die Mitte oder $4^1/_2$ Proc. . . . $= \frac{3{,}571}{2}$ $= 1{,}785$; während die volle Tafel den richtigen Werth 1,772 giebt, so dass jener um 0,113 zu gross.

8. Beispiel. Der 10jährige Nachwerth von $4^1/_4$ Proc.?

Bei 4 Proc. ist er 1,480 laut Nachwerthstafel,
» 5 » ist er 1,629

Diff. pro 1 Proc. = 0,149; also pro $^1/_4$ Proc. = $\frac{0{,}149}{4} = 0{,}037$, mithin N^{10} für $4^1/_4$ Proc. = 1,480 + 0,037 = 1,517, was gegen die Wahrheit nur um 0,0003 zu gross erscheint.

§. 58. (Nachwerthstafel, Fortsetzung).

c. Wenn der Zinsfuss unter oder über die Tafel fällt.

Ein Kapital 1, 20 Jahre lang mit jährlicher Zinsverzinsung zu 4 Proc. ist in diesen 20 Zinsverzinsungsterminen angewachsen auf 2,191, wie die Tafel zeigt. Dasselbe Kapital, eben so lange, aber mit halbjährlicher Zinsverzinsung, hat dagegen 40 Zinsverzinsungstermine (Halbjahre) à 2 Proc. gehabt und demgemäss laut Tabelle einen 40terminlichen Nachwerth à 2 Proc. erlangt von 2,208. Der Unterschied ist, wie man sieht, nicht bedeutend. —

Umgekehrt: Das Kapital 1 sei zu 2 Proc. 80 Jahre lang mit jährlicher Zinsverzinsung angewachsen, so hat es nach der Tabelle erreicht den Nachwerth 4,87. — Nähme man aber das doppelte Procent (4) und die halbe Zeit (40), d. h. dächte man sich das Kapital zwar eben so lange, aber mit 2jährlicher Zinsverzinsung, wo dann nur 40 Zinsverzinsungstermine à 2 × 2 = 4 Proc. stattfinden, so giebt die Tabelle (für 40 Zinstermine à 4 Proc.) den Nach-

werth 2,80; also auch für diese namhaft längere Zeit nur eine unbedeutende Differenz.

Wir lernen hieraus folgende zwei beachtenswerthe Sätze:

1) Die Jahreszahlen der Nachwerthstafel bedeuten an sich und im Allgemeinen nicht sowohl Jahre, sondern Zinsverzinsungstermine; und also eigentliche oder Ganzjahre bei jährlicher Zinsverzinsung, Halbjahre oder Semester bei halbjährlicher Zinsverzinsung, Doppeljahre, wenn alle 2 Jahre die Zinsen zum Kapital geschlagen.

Und es ist sonach die Nachwerthstafel nicht bloss für die jährliche, sondern für jede Art der Zinsverzinsung brauchbar (so weit die Procente derselben zureichen).

9. Beispiel. Der 50jährige Nachwerth zu 4 Proc.

a. bei jährlicher Verzinsung (50 Termine à 4 Proc.) = 7,107 (S. Spalte 4 Proc.),

b. bei halbjährlicher Verzinsung (100 Termine à 2 Proc.) = 7,245 (S. Spalte 2 Proc.),

10. Beispiel. Ingleichen der 50jähriger Nachwerth zu $2\frac{1}{2}$ Proc. *a.* bei jährlicher Zinsverzinsung (50 Term. à $2\frac{1}{2}$ Proc.) = 2,692

$$\begin{array}{r} 2{,}692 \\ 4{,}384 \\ \hline 7{,}076 \end{array} \qquad \frac{7{,}076}{2} = 3{,}54.$$

b. bei 2jährlicher Zinsverzinsung (25 Termine à 5 Proc.) = 3,39.

2) Der halbe Zinsfuss bei verdoppelter Zahl der Zinstermine, und der doppelte Zinsfuss bei halber Zahl der Zinstermine geben beinahe dieselben Resultate, so dass dadurch in allen Fällen, wo nicht die vollkommenste Genauigkeit beansprucht wird, die Tafel hinunter bis 1 Proc. und hinauf bis 10 Proc. brauchbar wird.

11. Beispiel. Eine Masse 1, die jährlich 1 Proc. geometrischen oder doppelten Zuwachs hat, erlangt in

50 Jahren fast denselben Nachwerth, als in 25 Zinsverzinsungsterminen (Doppeljahren) à 2 Proc., wofür die Tafel 1,641 giebt.

(Die vollkommene Rechnung giebt 1,645.)

12. Beispiel. Den 20jährigen Nachwerth bei 6 Proc. anzugeben?

Nimm 40 Termine (Halbjahre) à 3 Proc.; dazu die Tafel giebt 3,26.

(Die genaue Rechnung antwortet: 3,21.)

§. 59. Die Vorwerthstafel.

Laut Nachwerthstafel hat das Kapital 1 nach 20 Jahren bei 5procentiger Zinsverzinsung die Grösse 2,653 [algebraisch: $N = (1 + e)^{20}$], d. h. 2,653 Thlr., die nach 20 Jahren eingehen, haben jetzt den Werth 1; also 1 Thlr. der nach 20 Jahren eingeht, hat jetzt an Vorwerth $\frac{1}{2,653}$ $= 0,377$ (vergleiche die Vorwerthstabelle Spalte 5 Proc., Zeile 20 Jahr), oder algebraisch, der 20jährige Vorwerth ist $V = \frac{1}{(1 + e)^{20}}$; also der $n$jährige: $V = \frac{1}{(1 + e)^{n}}$.

Es erhellt hieraus zur Genüge, in welcher Weise man aus den Zahlen der Nachwerthstafel (durch Division in 1) die der Vorwerthe erlangt und in welcher einfachen Beziehung beide Tabellen zu einander stehen und wie alle Kunstgriffs-, Erweiterungs- und Gebrauchssätze der Nachwerthstafel (§. 50 — 58) in ähnlicher Weise auch für die Vorwerthe Gültigkeit haben müssen.

§. 60. Beispiele über Ablesung der Vorwerthstafel.

a. Wenn die Jahreszahl nicht in der Tafel ist.

1. Beispiel. Der 33jährige Einheitsvorwerth bei 3 Proc.?

Durch einfache Einschaltung:

V^{30} nach der Tafel $= 0,412$

V^{35} » » » $= 0,355$

Diff. pro 1 Jahr $= \frac{0,057}{5} = 0,0114$ und pro 3 Jahr $= 0,034$.

Vorwerth für 33 Jahre = 0,412 — 0,034 = 0,378.

Durch genaue Rechnung:

30jähriger $V = 0{,}412$; 3jähr. = 0,915mal soviel; also 33jähriger $V = 0{,}412 \times 0{,}915 = 0{,}377$.

2. Beispiel. Ein 250jähr. Vorwerth bei 3 Proc.?

Der 200jähr. = 0,003; der 50jähr. 0,228mal soviel; also der 250jähr. = $0{,}003 \times 0{,}228 = 0{,}000684$.

b. Wenn der Zinsfuss zwischen den der Tafel fällt.

3. Beispiel. Welchen gegenwärtigen Werth hat bei Voraussetzung 3½proc. jährlicher Zinsverzinsung jeder Thaler, der nach 30 Jahren eingeht?

Bei 3 Proc. antwortet die Tafel 0,412; bei 4 Proc. aber 0,308; bei 3½ Proc. mithin $\frac{0{,}412 + 0{,}308}{2} = 0{,}36$.

(Die genaue Rechnung giebt 0,356.)

c. Wenn der Zinsfuss unter oder über die Tabelle fällt.

4. Beispiel. Wie gross war die jetzige Masse 1 zehn Jahre zuvor, wenn sie jährlich 1½procentigen geometrischen Zuwachs hatte?

Nimm statt 10 nur 5 Termine (Doppeljahre) mit 3 Proc., so giebt die Tafel $V = 0{,}863$.

(Die genaue Lösung giebt ebenfalls 0,863.)

5. Beispiel. Wenn das Zuwachsprocent aber 4mal grösser, nämlich 6 Proc. jährlich, gewesen wäre?

Nimm: halbjährlich 3 Proc.; anstatt 10 also 20 Termine à 3 Proc., so sagt die Tafel $V = 0{,}554$.

(Die genaue Rechnung: 0,558.)

§. 61. **Der weitere und eigentliche Gebrauch der Zinseszins- (Vor- und Nachwerths-) Tabelle des Messknechts zu allen Arten von Zuwachs- und Rabattberechnungen.**

Die Grundgleichung der Zinseszinsrechnung stellt sich nach S. 53 dar in der Form $N_K = (1 + e)^n K$; oder, da $(1 + e)^n$ nichts Anderes als der $n$jährige Einheitsnachwerth N_1 ist:

$$N_K = N = N_1 K,$$

in welcher Formel bedeutet: K den Kapitalfond ohne Zinsen oder auch den Vorwerth; N_K oder N den $n$jährigen Nachwerth des Kapitales K oder den mit Zinseszins angewachsenen ursprünglichen Fond; N_1 den Tafel- oder Einheitsnachwerth $(1 + e)^n$, wo e den Einheitszins pro Zinstermin (Procent dividirt durch 100) und n die Zahl der Zinseszinstermine (gewöhnlich Jahre) bedeutet. Auch ist $\frac{1}{(1 + e)^n} = \frac{1}{N_1}$ = dem Einheitsvorwerthe V_1, wie S. 53 uns lehrt.

Auf die einfachste Weise von der Welt folgert nun selbst der Laie in der Mathematik aus obiger Gleichung:

1) Zur Bestimmung des Nachwerthes eines Fonds K oder auch der Grösse des Zinseszinses (Doppelzuwachses):

Formel: $N_K = N_1 \times K$ oder Regel: Multiplizire den Einheitsnachwerth der Tafel mit der Kapitalgrösse.

2) Zur Ermittelung des Vorwerthes eines Kapitales K oder auch der Grösse eines Diskontes:

Formel: $V_K = V_1 \times K$ oder Regel: Multiplizire den Einheitsvorwerth der Tafel mit der Grösse des zu diskontirenden Kapitales.

(Aus $N_K = N_1 K$ folgt nämlich: $K = \frac{N_K}{N_1} = \frac{1}{N_1} \; N_K = V_1 \, . \, N_K$, wo N_K die zu diskontirende Kapitalgrösse und K ihren Vorwerth bedeutet, weshalb wir nun jenes N_K hier mit K und folgerecht jenes K mit V_K bezeichnen.)

3) Zur Aufsuchung des Zinsfusses:

Die Formel $N_1 = \frac{N_K}{K}$ oder die Regel:

Bringe die gegebene spätere Kapitalgrösse mittelst Division durch deren Anfangsgrösse (Vorwerth) auf den Einheitsnachwerth und suche denselben in der betreffenden Jahreszeile der Nachwerthstafel auf.

4) Zur Ermittelung der Zinszeit:

Wieder die Formel $N_1 = \frac{N_K}{K}$ oder die Regel:

Reduzire durch Division mit dem Anfangs- in den Endwerth des Fonds den letzteren auf den Einheitsnachwerth und suche diesen in der betreffenden Procentspalte der Nachwerthstafel auf.

§. 62. Der mehr bloss praktische Mann wird wohl thun, diese ganze Zinseszinsrechnungskunst in folgende zwei kaum wieder aus dem Gedächtnisse zu verlierende Sätze zusammen zu fassen:

a. Soviele Male ein gegebener Kapitalstock grösser ist als 1, soviele Male ist auch sein Vor- oder Nachwerth grösser als der der Tafel; und

b. Soviele Male ein gegebener Vor- oder Nachwerth oder Zins grösser ist als der der Tafel, soviele Male ist auch der zu Grunde liegende Kapitalfond grösser als 1.

Erläuterungsbeispiele.

§. 63. Berechnung von Nachwerthen, Zinseszinsen u. dergl.

1. Beispiel. Nach dem Beispiele S. 48 berechnete sich der 60jährige Nachwerth des betreffenden, 170 Thlr. Anlagekosten bedürfenden, Holzbestandes bei 4 Proc. auf 578 Thlr. In welcher Summe muss sich aber jener spätere Werth ergeben, wenn derselbe mit dem finanziellen Geschäftsleben, in welchem eine jährliche 4procentige Zinsverzinsung leicht ausführbar ist, harmoniren soll?

Den 60jährigen Einheitsnachwerth N_1 giebt die Tafel in der 4 Proc.-Spalte zu 10,52; also den $N_{170} = 170 \cdot N_1 = 170 \times 10{,}52 = 1788{,}4$ Thlr.

Welche enorme Täuschung liegt also in je-

nem $3\frac{1}{2}$mal kleineren Resultate (578) der einfachen Zinsrechnung!

2. Beispiel. Könnte der Gegner des obigen Resultates mit einigem Grunde einwerfen, dass die jährliche Anlage der (in der Regel aber doch vierteljährlich eingehenden, also leicht auch halbjährlich zinstragend anzulegenden) Interessen mit 4 Proc. nicht immer mit Sicherheit ausführbar wäre, so würde hingegen bei Annahme des gewöhnlichen Sparkassenzinsfusses 3 Proc. auch das leiseste Bedenken gegen die bürgerliche und mathematische Gerechtigkeit des so ermittelten Resultates schweigen müssen. Und dies Resultat wäre?

Der 60jährige Tafelnachwerth der 3 Proc. - Spalte $N_1 = 5{,}892$; also $N_{170} = 170 \times 5{,}892 = 1001{,}6$ Thlr., also immer noch beinahe das Doppelte desjenigen vom einfachen Zuwachse.

3. Beispiel. Die Zinsen von 60 Thlrn. bei 5 Proc. in 30 Monaten oder überhaupt die Zinsen bei Bruchtheiljahren nach der jährlichen Zinsesverzinsung zu ermitteln, kann nur so gemeint sein, dass bis zu Ende des vollen Jahres eine doppelte, von da an aber für den Rest der Zeit eine einfache Verzinsung statt hat. Diesem nach ergeben

60 Thlr. bei 5 Proc. einen 2jährigen Nachwerth von $60 \times 1{,}102 = 66{,}12$, und diese 66,12 Thlr. vergrössern sich nach §. 44 in einem halben Jahre zu $66{,}12\,(1 + \frac{1}{2}e) = 66{,}12 \times 1{,}025 = 67{,}75$ Thlr., so dass an Zinseszinsen $67{,}75 - 60 = 7{,}75$ Thlr. entfallen. (Vergleiche hiermit das 2. Beispiel S. 49.)

Die Einschaltung dagegen würde geben laut Tafel:

$$\text{Nachwerth zu } 2\tfrac{1}{2} \text{ Jahre} = \frac{1{,}102 + 1{,}157}{2} = 1{,}129;$$

also $N_{60} = 1{,}129 \times 60 = 67{,}74$.

4. Beispiel. Auf einem Reviere kosten die Fichtenkulturen durchschnittlich pro Morgen 6 Thlr. Man wünscht zu wissen, welchen Netto-Vorertrag man den

Beständen in ihrem 30. Altersjahre entnehmen müsste, damit durch ihn der Forstkasse die gleichsam dargeliehenen Kulturkosten mit 3 Proc. Zinsen zurückerstattet würden?

Der zu entnehmende Vorertrag ist etwas Anderes nicht, als der 30jährige 3procentige Nachwerth von 6 Thlrn., und dieser ist nach der Nachwerthstafel 2,427 $\times$ 6 $=$ 14,56 Thlr.

5. Beispiel. Nach den Cotta'schen Bestandestafeln haben Kiefernwälder mittlerer Bonität im Alter von 60 Jahren 60 Normalklafter und im Alter von
80 » 82 » Holzmasse pro Acker.
Wie gross müsste die letztere sein, wenn man verlangen wollte, dass in dieser 20jährigen Wirthschaftsperiode der Bestandesfond sich eben so vermehren sollte als ein Kapital zu 3 Proc. (Zinseszins)?

Da das Geldkapital sich stets nach Zinseszins vermehrt, muss auch hier so gerechnet werden, wenn man sich keine Illusionen bereiten will. Nun giebt aber die Tafel den 20jährigen Nachwerth eines Kapitales 60 zu 60 $N_1 = 60 \times 1,806 = 108,4$, d. h. der Bestand müsste nicht von 60 auf 82, sondern von 60 auf 108 gestiegen sein!

6. Beispiel. Nach einem besonders spekulativen Nutzungsplane eines österreichischen Forstwirths solle und könne man einem Bestande entnehmen pro Joch

im 10. u. 20.	Altersjahre	einen	Vorertrag	von	je	30 fl.
im 30. u. 40.	»	»	»	»	»	50 fl.
im 50. u. 60.	»	»	»	»	»	100 fl
im 70.	»	»	»	»	»	200 fl.
und im 80.	»	den Hauptertrag		von	je	300 fl.

Man soll und will nun wissen, in welcher Grösse sich die einzelnen Vorerträge gegen den Hauptertrag vergleichen und zu welchem Endwerthe sich sämmtliche Erträge summiren, wenn man den Sparkassenzinsfuss 3 Proc. dabei annimmt?

Der 70jähr.	Nachw.	von 30 ist	= 7,918 ·	30	= 237,54
» 60jähr.	»	» 30 »	= 5,892 ·	30	= 176,76
» 50jähr.	»	» 50 »	= 4,384 ·	50	= 219,20
» 40jähr.	»	» 50 »	= 3,262 ·	50	= 163,10
» 30jähr.	»	» 100 »	= 2,427 ·	100	= 242,7
» 20jähr.	»	» 100 »	= 1,806 ·	100	= 180,6
» 10jähr.	»	» 200 »	= 1,344 ·	200	= 268,8
		Dazu an Endeertrag			300
				Summa	1788,7fl.

Und es zeigen die einzelnen Posten und die Summe deutlich, wie sehr man durch zweckmässige Vorentnahmen, sei es auch auf Kosten des Hauptertrags, die Waldrenten zu erhöhen vermag.

§. 64. Berechnung von Vorwerthen und Diskonten.

1. Beispiel. Um wieviel Procent muss man jeden erst nach 20 Jahren eingehenden Forstertrag vermindern, um ihn auf den gegenwärtigen oder Baarwerth zu bringen, wenn man die Annahme einer 4procentigen jährlichen Zinsverzinsung als gerechtfertigt erkennt?

Oder: Wie gross ist der 20jährige Vorwerth eines Kapitals 100 bei 4 Proc. — Die Vorwerthstafel antwortet: 0,456 × 100 = 45,6 Thlr.; also der gesuchte Diskont: 100 — 45,6 = 54,4 Thlr. oder 54,4 Procent.

Der Abzug muss also volle 10 Proc. mehr betragen als die Methode der einfachen Zinsrechnung (S. 49 Beisp. 4) ergab.

2. Beispiel. Ein Familienvater will seinem eben geborenen Kinde durch eine Kapitaleinlage in eine $3\frac{1}{2}$ Proc. gebende Bank oder Sparkasse ein mit dem vollendeten 24. Jahre zu erhebende Aussteuer von 1000 Thlrn. sichern. Wie gross muss die Einlage sein?

Gleich dem 24jährigen $3\frac{1}{2}$procentigen Vorwerthe von 1000 Thlrn.

a. Durch blosse Augenschätzung und Kopfrechnung:
Die Spalte $3\frac{1}{2}$ Proc. gäbe ungefähr
bei 20 Jahren $V = 50\frac{1}{2}$ Hundertel,
» 25 Jahren $V = 42\frac{1}{2}$ »
sonach die Diff. pro 1 Jahr $= \frac{50\frac{1}{2} - 42\frac{1}{2}}{5}$
$= 1\frac{1}{2}$; also gehört zu 24 Jahren der $V = 42\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$
$= 41$ Hundertel oder 0,41, wovon $V_{1000} = 0{,}41 \times 1000$
$= 410$ Thlr.

b. Genaueres Verfahren:

Vorwerth von 20 J. bei $3\frac{1}{2}$ Proc. $= \frac{0{,}554 + 0{,}456}{2} = 0{,}505$

» » 4 J. bei $3\frac{1}{2}$ Proc. $= \frac{0{,}888 + 0{,}855}{2} = 0{,}871$

» » 24 J. $= 0{,}505 \times 0{,}871 = 0{,}4398$;
also für das Kapital $1000 = 439{,}8$ Thlr.

(Die genaue Formelrechnung giebt 438,0 Thlr.)

3. Beispiel. Nach dem vom rein forstlichen Standpunkte aus gegebenen Wirthschaftsplane eines Reviers müsste nächstens ein Stangenort zur Hauung kommen, der sich jedoch eben so gut zum Ueberhalten in die folgende Periode und zu einem Abtriebe nach 20 Jahren eignete. Sein Schicksal soll daher nun vom rein finanziellen Standpunkte aus entschieden und deshalb geschätzt und ausgerechnet werden, welchen Vortheil oder Nachtheil die Forstkasse in dem einen oder anderen Falle erleidet. Wenn man der Schätzung gegenwärtig einen Reinertrag von 550 Thlrn. und bei 20 Jahre Ueberhaltung in Folge einer bedeutenden Mehrung des Nutzholzetats einen Reinertrag von 1000 Thlrn. nachweist, wie gestaltet sich da die Rechnung, wenn die Forstkasse nur eine 3procentige Verzinsung ihres Vermögens beansprucht?

Der 20jähr. Vorwerth von 1000 Thlrn. à 3 Proc. ist nach der Tafel $= 0{,}554 \times 1000 = 554$ Thlr.; also um 4 Thlr. grösser als der Ertrag des Bestandes beim sofortigen Abtriebe.

Würde aber eine 4procentige Verzinsung beansprucht,

dann wäre der Vorwerth = 1000 × 0,456 = 456 Thlr.; das Ueberhalten brächte also der Kasse einen baaren Verlust von 550 — 456 = 94 Thlrn.

4. Beispiel. Man soll sämmtliche im 6. Beispiele S. 65 aufgeführten Erträge der betreffenden 80jährigen Wirthschaftsperiode auf ihren 3procentigen Anfangswerth reduziren, um ihren Ertrag mit dem Boden- und dem Kulturkostenwerthe vergleichen zu können.

30 fl.	nach	10 Jahr.	sind	= 30 . 0,744	= 22,32	Baarw.
30 fl.	»	20 Jahr.	»	= 30 . 0,554	= 16,62	»
50 fl.	»	30 Jahr.	»	= 50 . 0,412	= 20,60	»
50 fl.	»	40 Jahr.	»	= 50 . 0,306	= 15,30	»
100 fl.	»	50 Jahr.	»	= 100 . 0,228	= 22,8	»
100 fl.	»	60 Jahr.	»	= 100 . 0,170	= 17,0	»
200 fl.	»	70 Jahr.	»	= 200 . 0,126	= 25,2	»
300 fl.	»	80 Jahr.	»	= 300 . 0,094	= 28,2	»
				Summa	= 168,04 fl.	

Dasselbe Resultat müsste sich aber auch ergeben haben, wenn man den S. 66 schon berechneten Endwerth von 1788,7 fl. auf seinen 80jährigen Vorwerth reduzirte. Und in der That giebt auch 1788,7 × 0,094 das in Betracht der Verhältnisse genügend übereinstimmende Resultat 168,14 fl *).

§. 65. **Berechnung eines Kapitales nach gegebenem Zinseszins.**

Beispiel. Ein Nutzungsobjekt, das alle 10 Jahre 50 Thlr. Ertrag abwirft, hat welchen Werth bei 4procentiger Verzinsung der Gelder?

Gleich einem Kapitale, das in 10 Jahren 50 Thlr. 4procentigen Zinseszins bringt. Nach der Nachwerthstafel aber steigt das Kapital 1 in 10 Jahren auf den Nachwerth 1,480, d. h. sein Zinseszins ist 0,48.

Soviele Male aber der gegebene Zinseszins grösser ist als der der Nachwerthstafel,

*) Man versuche einmal eine dergleichen Probe bei Nach- und Vorwerthsberechnung nach einfachen Zinsen! Nie kann und wird sie stimmen.

soviele Male ist das gefragte Kapital grösser als 1. Also $K = \frac{50}{0,48} = 104,1$ Thlr.,

d. h. dividire den gegebenen Zinseszins durch den um 1 verminderten entsprechenden Einheitsnachwerth.

§. 66. Berechnung einer Zins- oder Zuwachszeit.

1. Beispiel. Als Entschädigung für ein seit längerer Zeit von A widerrechtlich angeeignetes Nutzniessungskapital von 1000 Thlr. geschätztem Werthe wird durch B die Herauszahlung von 2600 Thlrn. verlangt. Seit wann müsste A im Besitze jener Sache sein, wenn man der Antwort den Zinsfuss 4 Proc. unterlegt?

2600 Thlr. sind als der 4procentige Nachwerth von 1000 Thlr. anzusehen, oder $N_{1000} = 2600$; also der Einheitsnachwerth $N_1 = 2{,}600$, welcher, in der 4 Proc.-Spalte der Nachwerthstabelle aufgesucht, auf nahe 25 Jahre zeigt.

2. Beispiel. Wäre die Forderung z. B. auf 2235 gestellt gewesen, und man wollte die ganze Rechnung im Kopfe ausführen, so würde man so verfahren:

Der gegebene Einheitsnachwerth $\frac{2235}{1000} = 2{,}235$ liegt zwischen 25 und 20 Jahren (der 4 Proc.-Spalte) und ist gegen den letzteren grösser um 44 (Tausendtel, nämlich $2{,}235 - 2{,}191 = 0{,}044$). Die hier einschlagende Differenz für 1 Jahr ist aber $= \frac{475}{5} = 95$ (Tausendtel; nämlich $2{,}666 - 2{,}191 = 0{,}475$ = Diff. pro 5 Jahre); also entsprechen obige 44 einer Differenz von $44 : 95 = 0{,}5$ Jahren (über 20 Jahre); das gesuchte n ist mithin $= 20\frac{1}{2}$ Jahr.

(Das nach der Formel genau berechnete Resultat ist: 20,5006 Jahre.)

3. Beispiel. Wie lange braucht ein Kapital bei 2, 3, 4, 5 Proc., um sich zu verdoppeln.

Auflösung. — Suche in den betreffenden Spalten die Zeit zu dem Nachwerthe 2.

1) Dieselbe ermittelt sich bei 2 Proc. zu 35 Jahren.

2) Bei 3 Proc.?

a. Zwischen 20 und 25. Nach blosser Augenschätzung etwa zu 23 Jahren.

b. Nach einfacher Zwischenrechnung: 2,094 — 1,806 = 288 = Diff. von 5 Jahren, das überschüssige 94 entspricht also einer Diff. von $5 \cdot \frac{94}{288}$ Jahre = *circa* $^5/_3$ Jahre, wonach $n = 25 - 1^2/_3 = 23^1/_3$ Jahr.

c. Genaue Rechnung: 20jähr. Nachwerth = 1,806
3jähr. » = 1,092
23jähr. Nachwerth = 1,806 × 1,092 = 1,972; und nun nach der einfachen Zinsrechnung zu suchen, wie lange 1,97 auf Zinsen zu 3 Proc. stehen müsse, um zu 2,00 (oder 197 und zu 200) anzuwachsen. Die einfache Formel der einfachen Zinsrechnung war $N = K + enK$, wo $N = 200$, $K = 197$, $e = 0,03$;

also $200 = 197 + 0,03 \times n \times 197$

$$3 = 5,91\ n, \quad \text{woraus} \quad \frac{3}{5,91} = n = \tfrac{1}{2}\ \text{J.},$$

woraus die genaue Zeit $= 23^1/_2$ Jahr und aus der Vergleichung mit obigen 23 und resp. $23^1/_3$ Jahr folgt, wie sehr oft schon die einfache Zwischenschätzung ausreicht.

3) Bei 4 Proc.? Zwischen 15 und 20 Jahren, und augenscheinlich ziemlich in der Mitte, oder $= 17^1/_2$ Jahr. (Die Methode der genauen Auflösung giebt $17^2/_3$ Jahr.)

4) Bei 5 Proc.? Zwischen 10 und 15 Jahren, augenscheinlich etwa bei 14. — Nach einfacher Zwischenrechnung jedoch: |

$$\frac{2079 - 1629}{5} = \frac{450}{5} = 90 = \text{Diff. pro 1 Jahr};$$

$$\text{sonach } 79 = \text{Diff. pro } \frac{79}{90} = {}^8/_9\ \text{J.},$$

woraus $15 - {}^8/_9 = 14^1/_9$ Jahr folgen würde.

(Die genaue Rechnung giebt 14,2 Jahr.)

§. 67. **Berechnung des Zuwachsprocents oder Zinsfusses.**

1. Beispiel. Von einem auf 500 Thlr. geschätzten Grundstücke hat ein Unberechtigter 15 Jahre lang die Nutzniessung gezogen, und bietet auf desfallsige Entschädigungsklage für diese 15jährige Nutzniessung ein Aequivalent von 180 Thlrn. Vor Annahme dieses Gebotes will die klagende Partei wissen, zu wieviel Procent der Ertrag des benutzten Gutes dabei berechnet sei?

Der Beklagte sagt also: 500 Thlr. sind in 15 Jahren auf den Nachwerth 680 gekommen; d. h. der 15jähr. Einheitsnachwerth $= \frac{680}{500} = 1,36$; und dieser entspricht nach der Zeile 15 der Nachwerthstabelle einem Zinsfusse von ein wenig über 2 Proc.

2. Beispiel. Nach Cotta's Tafeln haben die Buchenbestände mittlerer Bonität im Alter von 60 Jahren 32 Normalklafter und in dem von 80 Jahren 47 Klafter. Wie hoch stellt sich demgemäss das (finanzielle) Zuwachsprocent von dergleichen Beständen in der erwähnten Wirthschaftsperiode, dafern man die nicht unbillige Forderung stellt, man solle bei allen forstlich finanziellen Rechnungen dem Holzfond das Mehrungsgesetz des Kapitalfonds unterstellen?

Nach dieser Forderung ist 47 der 20jährige Zinseszins-Nachwerth vom Fond 32; der gegebene 20jähr. Einheitsnachwerth also $= \frac{47}{32} = 1,47$.

Dieser Nachwerth, in der Zeile 20 Jahr aufgesucht, fällt knapp unter 2 Proc., so dass die Antwort lautet: fast 2 Proc.

3. Beispiel. In der 20jährigen Wirthschaftsperiode vom 100. bis 120. Jahre steigert sich dagegen nach Cotta's Erfahrungen der Bestandesfond von 63 auf 79. Welches Zuwachsprocent hat er sonach in dieser Zeit, wenn man wiederum seine Mehrungsweise der eines Kapitals gleichstellt?

Der 20jährige Nachwerth von 63 oder N_{63} ist $= 79$, also der $x$jähr. Einheitswerth $N_1 = \frac{79}{63} = 1{,}254$.

Da dieser Nachwerth, in der Zeile von 20 Jahren aufgesucht, weit unter 2 Proc., also unter die Tabelle fällt, nehme man eine 2jährige Zinsversinsung (mit doppeltem Procentsatze) an; dann hat man nur 10 Zinstermine, und die Tabelle zeigt in der Terminzeile 10 den Nachwerth 1,254 zwischen 2 und 3 Proc. liegend; und zwar genauer so:

Nachw. v. 3 Proc. = 1,344	Nachw. v. 2 + x Proc. = 1,254
» » 2 » = 1,219	» » 2 » = 1,219
Diff. pro 1 Proc. = 0,125	Diff. pro x Proc. = 0,035

so dass $x = \frac{35}{125} =$ fast $^1/_4$, oder das zunächst gesuchte 2jährliche Zuwachsprocent $= 2^1/_4$, sonach das eigentlich gesuchte jährliche $= 1^1/_8$ Proc.

(Die genaue algebraische Auflösung giebt 1,137, also zwischen $1^1/_7$ und $1^1/_8$ Procent.)

Fünftes Kapitel.

Der Messknecht als Rentenrechner.

§. 68. Schon Eingangs des vorigen Kapitels ist angedeutet worden, in wiefern dem höheren Gewerbstreibenden und allem staatswirthschaftlichen Publikum auch die grössere Beachtung der Lehren der rationellen Rentenberechnung nicht genugsam empfohlen, die häufigere Anwendung derselben nicht genug nahe gelegt und darum von unserer, der Mathematiker, Seite, die Erleichterung dieser Anwendung nicht genug angestrebt werden kann; indem alle Zahlenbestimmung über Abnutzungen, Servituten, Versicherungen, Tilgungsfonds, Wald- und sonstige Werthe ren-

tenartiger Nutzungen und noch viele andere wichtige Finanzfragen der Privat- und Staatswirthschaft ganz wesentlich auf der Rentenrechnungskunst beruht.

Es ist erstaunlich, welchen Selbsttäuschungen auch hierbei in der Regel man sich hingiebt, und wie wenig oder wie fehlerhaft in den Gebieten der Betriebswirthschaft fast aller technischen Branchen hierin gearbeitet wird.

§. 69. Man braucht dabei noch gar nicht einmal solche grobe Fälle anzunehmen, wie sie der folgende charakterisirt. In einer gewissen Gegend Sachsens bewirthschaften nämlich die kleinen Landwirthe ihre Waldparcellen mit Kiefern in 40jährigem Umtriebe, erhalten dabei durchschnittlich einen Gesammtertrag von 360 Thlrn. pro Acker und behaupten demgemäss, dass ihnen ihr Holzbau eine jährliche Bodenrente von $\frac{360}{40} = 9$ Thlrn. pro Acker abwürfe. Würfen sie aber einen sachverständigen Blick auf die Renten-Endwerthstafel des Messknechts, so würden sie gewahren, in der 3 Proc.-Spalte, dass wer 40 Jahre lang einen Thaler einnimmt und ihn nur mit 3 Proc. etwa in einer Sparkasse anlegt, am Ende 75 Thlr. besitzt, dass also ein Endwerth von 360, der $\frac{360}{75} \doteq 4\frac{1}{5}$mal so gross ist, nur einer Jahresrente von $4\frac{1}{5}$ Thlr. entsprechen kann, auch wenn jene Grundbesitzer von ihren Grund- und Betriebskapitalien nur eine 3procentige Verzinsung beanspruchen. Wer aber kann und wird sich heut zu Tage mit einem solchen Zinsfusse begnügen. Das Mindeste ist doch wohl 4 Proc., das zu beanspruchen ist, und in diesem Falle entspräche jener Waldertrag, wie die Zeile 40 der Endwerthstafel sagt, gar nur einer Rente von $\frac{360}{95} = 3\frac{3}{4}$ Thlr.!

Wenn auch nicht immer so starke, doch ähnliche Irrthümer und Täuschungen kommen aber im Leben so häufig vor und eine klare Einsicht und praktische Fertigkeit in der Behandlung dieser wichtigen Finanzverhältnisse eines jedweden Geschäftsbetriebs thut dem Publikum so

Noth, dass es dasselbe dem Messknecht vielleicht Dank wissen wird, wenn dieser auch hier nicht bloss den nackten Gebrauch seiner Tafeln und die mechanische Dressur desselben lehrt, sondern es versucht, durch Vorausschickung einer kurzen populären Theorie seine Besitzer, auch ohne tiefere Einweihung in die Mathematik, zu bewussten und selbständigen Rentenrechnungskünstlern zu machen.

§. 70. Wenn ich mir vornehme, von jetzt an zu Ende jedes Jahres 1 Thlr. so anzulegen, dass die Zinsen alljährlich zum Kapitale geschlagen werden, wie es z. B. bei den Sparkassen und bei jedem der Bereicherung gewidmeten Geschäfte geschieht, so hat man, wenn dabei eine 3procentige Zinsverzinsung angenommen wird, gemäss der Nachwerthstafel des Knechtes und den Sätzen des vorigen Kapitels:

am Ende des 1. Jahres: die 1. Einlage ohne Zinsen oder den Endwerth 1;

» » » 2. » die neue Einlage ohne Zinsen und die vorhergehende zum 1jährigen Nachwerthe angewachsen; also den Endwerth: $1 + 1{,}03$ oder $E = 2{,}03$;

» » » 3. » die 3. Einlage ohne Zinsen; die 2. im einjährigen Nachwerthe und die 1. im zweijährigen Nachwerthe; $E = 1 + 1{,}03 + 1{,}061 = 3{,}091$;

» » » 4. » die 4. Einlage ohne Zinsen; die 3. im 1jähr. N; die 2. im 2jähr. N; die 1. im 3jähr. N; also $E = 1 + 1{,}03 + 1{,}061 + 1{,}093 = 4{,}184$.

Auf solche Weise findet sich die Summe, bis zu welcher eine zehn Jahre lang zu Ende jedes Jahres stattfindende Anlage von 1 (Thaler, Gulden u. s. w.) mit Einschluss der letzten am Endpunkte noch fälligen anwächst, d. h. der Endwerth (E) der zehnmaligen Jahresrente 1, $E = 1 +$ Summe der ersten 9 Nachwerthe $= 11{,}46$.

Man vergleiche diese und die obigen Endwerthsgrössen mit der 3 Proc.-Spalte der Endwerthstabelle der Rententafel auf des Knechtes Rückseite, und man wird über die Bedeutung dieser Zahlen sofort im Klaren sein. Vermöge dessen lesen wir z. B. aus ihr:

Der Endwerth einer 20 Jahre lang zu Ende jedes Jahres eingehenden Rente von 1 Thlr. ist bei 2 Proc. Verzinsung = 24,30 Thlr.; bei 3 Proc. = 26,87 Thlr.; bei 4 Proc. = 29,78 Thlr.

§. 71. Eine ganz ähnliche Bewandtniss hat es mit der Tabelle der Anfangswerthe.

Denken wir uns 20 zu Ende jedes Jahres erfolgende Einnahmen in der Grösse von 1 Thaler, und fragen wir nach dem gegenwärtigen Werthe oder Kaufpreise dieser mit Sicherheit erfolgenden künftigen Erträge, so bildet sich derselbe aus der Summe aller Vorwerthe derselben, also bei 3 Proc.:

aus	dem	1jähr.	Vorwerthe	des	1. Ertrags	= 0,970
»	»	2jähr.	»	»	2. »	= 0,943
»	»	3jähr.	»	»	3. »	= 0,915
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	»	20jähr.	»	»	20. »	= 0,554
					Summa	= 14,88,

wie es die Tabelle der Renten-Anfangswerthe auch richtig ergiebt.

Nach dem vorigen Paragraph war der Endwerth dieser 20 Erträge $E = 26{,}87$; nach hier der Anfangswerth $A = 14{,}88$ und das heisst: Es ist in Bezug auf absoluten Geldwerth ganz einerlei, ob man sofort 14,88 Thlr., oder 20 Jahre lang jährlich 1 Thlr. oder nach 20 Jahren 26,87 Thlr. empfängt. In der That, wenn man den Anfangswerth 14,88 Thlr. einer 3procentigen Sparkasse überlässt, muss diese nach 20 Jahren (siehe die Nachwerthstafel) die Summe $14{,}88 \times 1{,}806 = 26{,}87$ Thlr. auszahlen.

Oder, wenn man den Endwerth jener 20 Jahreseinnah-

men mit 3 Proc. Diskontirung verkaufte und deshalb auf den Vorwerth reduziren wollte, so liefert die Vorwerthstafel die Antwort: 26,87 × 0,554 = 14,88 Thlr., ebenfalls genau übereinstimmend.

Diese Uebereinstimmungen finden aber durchaus nicht statt, wenn man die betreffenden Werthe nach dem Principe der einfachen Zinsrechnung ermitteln wollte. Die Anwendung dieser Rechnung hierbei führt in den Exempeln zu den mannigfachsten inneren Widersprüchen; und da sie übrigens auch mit dem wirklichen Leben in totalen Widerspruch tritt, so ist auch hier die Zinsesrechnung die theoretisch und praktisch allein richtige.

§. 72. Bezeichnungen und Begriffe.

In den vorigen Beispielen nahmen wir die Grösse der Jahresanlagen oder Einnahmen zu 1 Thlr. oder Gulden an. Hätten wir 100 Thlr. genommen, so würde jeder der oben aufgeführten einzelnen Nach- oder Vorwerthe und natürlich auch deren Summe 100mal grösser geworden sein. Bezeichnet man also mit E_1 oder kurzweg mit E den Endwerth und mit A_1 oder A den Anfangswerth für die Rente 1 und für die Rente 100 mit E und A und dem angehängten Zeiger 100, so ist $E_{100} = 100 \times E$; $A_{100} = 100 \times A$ oder allgemein für die Rentengrösse r:

$$1)\ E_r = r \times E; \quad 2)\ A_r = r \times A$$

als leicht verständliche Formeln für den End- und den Anfangswerth einer gleichförmigen nachschussweisen Jahresrente von der Grösse r.

Eine Rente nämlich heisst jede wiederkehrende Leistung, mag sie nun als Einnahme oder Ausgabe, in baarem Gelde oder als Niessnutz, als Servituts-Last oder Servituts-Recht od. dergl. figuriren.

Gleichförmig heissen dabei obige Renten, weil sie in gleichen Grössen und nach gleichen Zwischenräumen (Rententerminen) wiederkehren.

Jahres- oder jährliche Rente, weil ihre (Zinsverzinsungs- und Leistungs-) Termine um einen Jahreszeitraum von einander abstehen; zum Unterschiede von zwei-, drei-, vierjährlichen Renten, wo erst alle

zwei, drei, vier Jahre neue Leistungen gewährt werden; wie zum Unterschiede von halb- oder vierteljährlichen, wo alle Halb- oder Vierteljahre neue Zurechnung an Kapital und gewöhnlich auch zugleich an Zinsen stattfindet.

Nachschussweise aber heisst sie, weil die Leistung zu Ende jedes Rententermines (Jahres) stattfand. Wären dagegen jene 20 Leistungen so beschaffen, dass von jetzt an sogleich und alle Jahr eine Anlage stattfände, so geschähe die letzte zu Anfang des 20. und überhaupt jede Leistung zu Anfang jedes Rentenjahres, gleichsam vorschussweise.

Alle im Laufe eines Jahres erfolgenden Einnahmen werden in der Regel als zu Ende desselben erfolgend betrachtet, indem man nicht wohl sie eher als disponibel betrachten und verwenden kann; sie bilden demgemäss eine nachschussweise Rente. Alle im Laufe eines Jahres nothwendigen Ausgaben (Gehalte, Löhne, Anschaffungen, Kulturkosten u. s. w.) sind dagegen als vorschussweise Rentenglieder zu betrachten; denn man muss annehmen, dass diese Gelder als Betriebskapitalien des laufenden Jahres schon zu Anfange desselben bereit liegen müssen.

Da sich aber vorschussweise Renten gar leicht und einfach auf nachschussweise zurückführen lassen, auch letztere überhaupt die bei Weitem am häufigsten vorkommenden sind, so wollen wir zur Vereinfachung der Rentenrechnungskunst erstere stets durch Zurückführung auf letztere lösen und unter Renten kurzweg immer nachschussweise verstehen.

§. 73. (Fortsetzung.) Ausserdem merke man sich noch folgende Begriffe:

Vollrente heisst eine solche, welche im ersten Jahre beginnt und endlos ist, wie z. B. die Zinsen eines mit vollkommener Sicherheit angelegten Kapitals oder die Erträge eines unzerstörbaren Nutzungsobjektes.

Rentenstück: jede Rente, die nur als ein Theil der vollen zu betrachten ist. Vorderes Rentenstück oder Vorderrente: eine im ersten Jahre beginnende, aber nur

eine Zeit lang dauernde Rente. Hinteres Rentenstück oder Hinterrente: eine erst später beginnende, gleichsam aufgeschobene, aber endlose Rente. Mittleres Rentenstück oder Mittelrente: eine erst später beginnende und nur eine gewisse Zeit lang dauernde Rente.

Periodische Rente nennen wir diejenige, bei welcher die Rententermine mehrere Zinsverzinsungstermine in sich schliessen, wie z. B. bei einem alle 5 Jahre wiederkehrenden mit jährlicher Verzinsung anzulegenden Ertrage. — (Wenn dagegen die Zinsverzinsungstermine mit den Rententerminen zusammenfallen, wie z. B. bei einer 10-maligen alle 5 Jahre wiederkehrenden Einnahme von 100 Thlrn., die zu 3 Proc. so angelegt sein soll, dass erst alle 5 Jahre die Zinsen kapitalisirt werden, so ist eine solche Rente gleichbedeutend mit einer 10maligen einfachen oder Jahresrente zu $3 \times 5 = 15$ Proc. und streng genommen keine periodische.) Daher wollen wir unter

Einfacher Rente immer diejenige verstehen, bei welcher die Renten- und die Zinsverzinsungstermine einerlei sind; so die Jahresrente mit jährlicher Zinsverzinsung, die halbjährliche Rente mit halbjährlicher Zinsverzinsung, die fünfjährliche Rente mit fünfjährlicher Zinsverzinsung, und, weil diese Art die gewöhnliche ist, unter Rente kurzweg: immer die einfache und nachschussweise verstehen.

§. 74. (Fortsetzung.) Baarwerth (B) einer Rente nennen wir den gegenwärtigen Werth derselben. Bei Vollrenten und vorderen Rentenstücken ist der Anfangswerth A mit dem Baarwerthe B ganz gleichbedeutend; nicht so aber bei mittleren und hinteren Rentenstücken, deren Anfangswerth immer noch ein Nachwerth ist. Bildlich lassen sich die verschiedenen Rentenarten durch Figuren wie folgende veranschaulichen, in denen

A den Zeitpunkt und die Grösse des Anfangswerthes,
B » » » » » » Baarwerthes,
E » » » » » » Endwerthes,
r » » » » » eines Rentengliedes,
m und n Jahreszahlen bedeuten.

Fig. 1. (Einfache und nachschussweise) Voll-Rente.

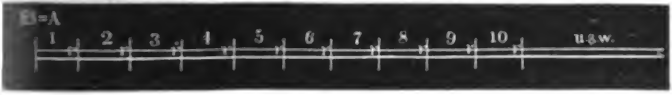


Fig. 2. Hinter-Rente.

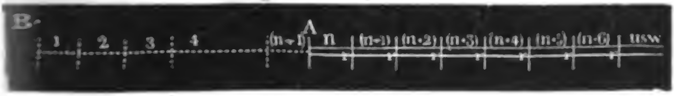


Fig. 3. (Nachschussweise) Vorder-Rente.

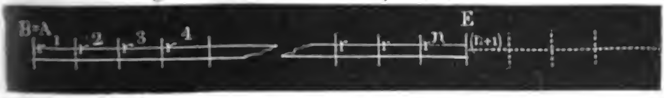


Fig. 4. Vorschussweise Vorder-Rente.

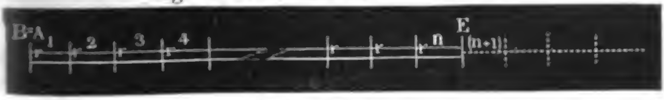


Fig. 5. Mittel-Rente.

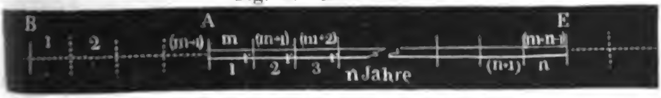


Fig. 6. Periodische Voll Rente.

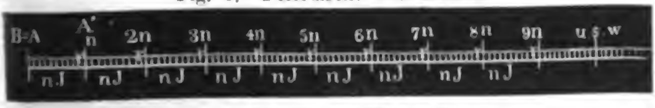


Fig. 7. Periodische Hinter-Rente.

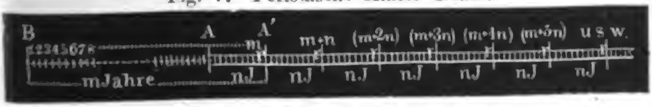


Fig. 8. Periodische Vorder-Rente.

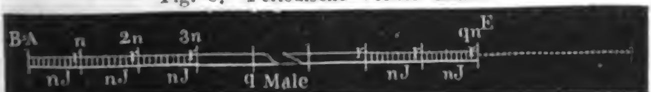
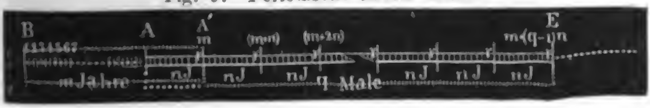


Fig. 9. Periodische Mittel-Rente.



§. 75. Die Ablesung der Rententafel des Knechts und zwar zunächst der Endwerthstafel ist nun das, womit wir uns vorerst vertraut machen müssen, ehe wir zur Behandlung der einzelnen Rentenarten vorschreiten. Wenn Zinsfuss und Zeit in dieser Tafel vollständig enthalten sind, ist diese Ablesung von selbst verständlich; als z. B.:

1) Der Endwerth einer 40 Jahre lang fortgesetzten Einlage in einer 3procentigen Sparkasse ist nach Zeile 40 Jahr und 3 Proc.-Spalte = 75,40mal so gross als die Einlage.

Und für zwischenliegende Zinsfusse und Jahre wird man eine in vielen Fällen hinreichende Annäherung durch die einfache Zwischenrechnung (arithmetische Interpolation) erhalten. Z. B.:

2) Der Endwerth einer 42maligen Rente bei 3 Proc.?

Die 45malige = 92,72
» 40malige = 75,40

Diff. pro 1 Jahr $= \frac{17,32}{5} = 3,46$; also pro 2 Jahr $= 3,46 \times 2 = 6,92$; also E der 42maligen Rente $= 75,40 + 6,92 = 82,32$

(während die genaue Rechnung $E = 82,023$ giebt).

3) Der Endwerth einer 40maligen Rente, wenn die Rentenglieder als zu $3\frac{1}{2}$ Proc. angelegt betrachtet werden sollen?

E bei 4 Proc. = 95,03
E bei 3 Proc. = 75,40

Diff. pro $\frac{1}{2}$ Proc. $= \frac{19,63}{2} = 9,81$; also E bei $3\frac{1}{2}$ Proc. $= 75,40 + 9,81 = 85,21$.

(Die genaue Rechnung giebt 84,6.)

In Fällen, wo man für ein in der Tafel nicht enthaltenes Jahr, z. B. 42 oder 120, den Anfangs- oder Endwerth durch vollkommen genaue Zwischenrechnung zu suchen Ursache hat, verfährt man also:

4) Z. B. um den Endwerth zum Jahr 42 bei 3 Proc. zu finden:

Endwerth der 40maligen Rente = 75,40 und deren zweijähriger Nachwerth = 75,40 × 1,061 =	79,99
dazu den Endwerth der noch fehlenden 2maligen Rente . . . . =	2.03
Summa =	82,02

(Vergl. hiermit sub 3.)

5) Um den Endwerth einer 120maligen Rente 1 bei 3 Proc. genau zu finden:

Endwerth der 100maligen Rente = 607,3, und deren 20jähriger Nachwerth = 607,3 × 1,806 =	1096,78
dazu den Endwerth der noch fehlenden 20maligen Rente laut Tafel . . . . . =	26,87
Summa =	1123,65

§. 76 Die Ablesungen der Anfangswerthstafel und die dazu etwa nöthig werdenden Zwischenrechnungen sind den eben betrachteten ganz ähnlich und werden auch vollständig aus folgenden Beispielen erhellen.

1) Eine 40malige Jahresrente von 1 fl. hat bei Annahme des Zinsfusses 3 zu Anfang des 1. Jahres laut Spalte 3 Proc., Zeile 40 Jahr einen Kapitalwerth von 23,11 fl.; und beim Zinsfuss 4 Proc. = 19,79 fl.

2) Der Anfangswerth einer 42maligen Jahresrente von 1 Thlr. bei 3 Proc.?

Aus einfacher Einschaltung: *A* zu 45 Jahr = 24,52
A zu 40 » = 23,11

Diff. pro 1 Jahr = $\frac{1,41}{5}$

= 0,28; also pro 2 Jahr = 0,56; folglich Anfangswerth zu 42 Jahr = 23,11 + 0,56 = 23,67 Thlr.
(Die genaue Rechnung giebt 23,70.)

3) Den Anfangswerth einer 120maligen Jahresrente von 1 Thlr. bei 3 Proc. genau abzulesen.

a. Nach vorigem Paragraph Beisp. 5 ist deren Endwerth = 1123,65 Thlr., und dieser auf den 120jährigen Vorwerth gebracht = 1123,65 × 100jähriger

Vorwerth $\times$ 20jähriger Vorwerth = 1123,65 $\times$ 0,052 $\times$ 0,554 = 32,37 Thlr.

b. Anfangswerth einer 100maligen Rente (oder der ersten 100 Glieder) . . . . . . = 31,60
Anfangswerth einer 20maligen = 14,88, auf den 100jährigen Vorwerth reduzirt = 14,88 $\times$ 0,052 = 0,77

Summa = 32,37 Thlr.

4) Für $3\frac{1}{2}$ Proc. den Anfangswerth einer 50maligen Rente durch einfache Einschaltung abzulesen?
Man nimmt das Mittel zwischen 3 und 4 Proc., also zwischen den Zahlen 25,73 und 21,48, welches sich zu 23,60 ergiebt (während der genaue Werth 23,46 ist).

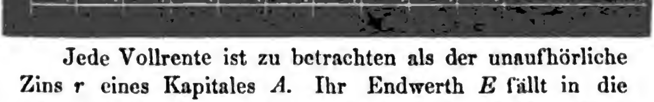
§. 77. Um die genaue Renten-Anfangs- oder Endwerthszahl auch für einen in der Tafel nicht vorhandenen Zwischenzinsfuss $3\frac{1}{2}$ oder $3\frac{3}{4}$ Proc. zu finden, thut man am besten, sich der Formel und der Logarithmen zu bedienen.

Im Leben selbst wird dies aber höchst selten erforderlich werden; denn wo, wie etwa zwischen streitenden Parteien, die Wahl des Zinsfusses zwischen 3 und 4 schwankt, wird gewöhnlich immer so verfahren, dass man den fraglichen Werth erst mit 3 und dann mit 4 Procent berechnet und nun auf dieser mathematischen Basis über eine dazwischen aufzustellende Vergleichssumme verhandelt.

Gehen wir also nun zur Berechnung der einzelnen Rentenerscheinungen über.

§. 78. Die Vollrenten.

Fig. 10.



Jede Vollrente ist zu betrachten als der unaufhörliche Zins r eines Kapitales A. Ihr Endwerth E fällt in die Unendlichkeit, ist also nicht angebbar; ihr Anfangswerth aber ist nach den Grundregeln S. 48 der Zinsrechnung (wonach der $n$fache Zins = $K \times e \times n$, also der einfache,

d. h. jährliche $= K \times e = r$ und demnach $K = \frac{e}{r}$ ist) durch die Formel $A = \frac{r}{e} = r \times \frac{1}{e} = r \times \frac{100}{p}$ gegeben, wo p das Procent und $e = \frac{p}{100}$ den Einheitszins wie früher bedeutet; desgleichen $e = \frac{r}{A}$, und $p = 100\,e = \frac{100r}{A}$ und natürlich auch $r = A\,e = \frac{A \cdot p}{100}$ und worin die Regeln liegen:

1) Um den Anfangs- und Baarwerth (A und B) einer vollen gleichförmigen Jahresrente (r) zu finden, dividire die letztere durch den Einheitszins oder nimm sie so vielfach, als das Zinsprocent in 100 enthalten ist. (50mal bei 2 Proc., $33\frac{1}{3}$mal bei 3 Proc.; 25mal bei 4 Proc., 20mal bei 5 Proc.). — Ist die Rente vorschussweiser Art, so wäre dieser Werth noch um den eines Rentengliedes zu vermehren.
2) Die Grösse r der Rentenglieder findet sich durch Multiplikation des Anfangswerthes mit dem Einheitszinse.
3) Ist der Zinsfuss gesucht, so dividire die 100fache Rente durch ihren Anfangswerth.

§. 79. Beispiele über Vollrenten.

1. Beispiel. Den Kapitalwerth einer jährlichen, als endlos zu betrachtenden Nutzniessung, welche soeben wieder bevorsteht, und durchschnittlich auf 50 Thlr. Jahreswerth geschätzt ist, für den Zinsfuss 3 und 4 Proc. für den gegenwärtigen Augenblick anzugeben.

Bei 3 Proc. $= 50 \times 33\frac{1}{3} = 1666\frac{2}{3}$ Thlr.
» 4 Proc. $= 50 \times 25 = 1250$ Thlr.,

wozu aber noch bei beiden Resultaten die »so eben« erfolgende erste Nutzungsgrösse von 50 Thlrn. aufzurechnen ist.

2. Beispiel. Der finanzielle Werth eines mit 600 Thlr. Reinertrag nachhaltig zu bewirthschaftenden Waldgrundstückes, unter Voraussetzung, dass das Kapital leicht zu 5 Proc. verzinslich angelegt werden könne,

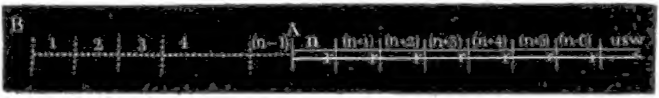
ist $= 600 \times \frac{100}{5} = 600 \times 20 = 12000$ Thlr.

3. **Beispiel.** Zu welchem Zinsfusse rechnet man, wenn eine Rente von 15 Thlrn. durch ein Kapital von 600 Thlrn. abgelöst werden soll?

$$p = \frac{1500}{600} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Proc.}$$

§. 80. **Die aufgeschobenen Vollrenten oder hinteren Rentenstücke.**

Fig. 11.



Bezeichnet n die Nummer des Jahres, zu Ende (oder im Laufe) dessen die endlose Rente r das erste Mal fällig wird, so ergeben sich augenscheinlich folgende Regeln:

1) Der Endwerth E fällt ins Unendliche und ist sonach nicht angebbar.
2) Der Anfangswerth A ist gleich dem der Vollrente ($= r : e$ oder $= r \times \frac{100}{p}$).
3) Der Baarwerth B gleich dem $(n-1)$jährigen Vorwerthe des Anfangswerthes.
   (Ein Unterschied zwischen nach- und vorschussweiser Rente ist hier nicht statthaft.)
4) Die Grösse r der Rente: Nach Regel 2 des vorigen Paragraphen.
5) Im Falle aber die Zeit n zu bestimmen wäre: Suche mittelst der Zinstafeln die Zeit $(n-1)$, nach welcher der Baarwerth B zum Anfangswerth A anwächst, und vermehre die gefundene Jahresnummer um 1.
6) Bei gesuchtem Zinsfusse: Nach Regel 3 des vorigen Paragraphen, sobald A bekannt ist. Bei unbekanntem A dagegen ist der Zinsfuss durch Versuche so zu wählen, dass man für A denselben Werth erhält, man mag ihn als Anfangswerth der Rente r oder als $(n-1)$jährigen Nachwerth der Baargrösse B berechnen.

§. 81. **Beispiele über Hinterrenten.**

1. **Beispiel.** (Gesucht der Baarwerth B.)

Ein Grundstück, dessen Erträge erst mit dem 16. Jahre nutzbar werden, indem bis dahin alle Voreinnahmen zur Verbesserung desselben zu verwenden sind, und welches dann einen im Laufe des 16. Jahres beginnenden regelmässigen Jahresertrag von 300 Thlrn. verspricht, hat bei Annahme des Zinsfusses 4 absoluten Kaufswerth?

Anfangswerth A der aufgeschobenen Rente $= 300 \cdot \frac{100}{4} = 7500$ Thlr.; also, da $n = 16$ ist, der $n - 1$- $=$ 15jährige Vorwerth, nach der 4 Proc.-Spalte der Vorwerthstafel $= 7500 \times 0{,}555 = 4162{,}5$ Thlr.

2. **Beispiel.** (Gesucht die Rentengrösse r.)

Irgend ein Nutzungsobjekt, z. B. ein Bergwerksantheil oder Waldstück, ist mit 500 Thlrn. angekauft, gewährt aber 10 Jahre lang keinen Ertrag. Man will wissen, welcher regelmässige Jahresertrag mit dem 11. Jahre beginnen müsste, wenn man 4procentige Verzinsung seines Kapitales verlangt.— Es ist $B = 500$; $n = 11$ und also der Anfangswerth A der gesuchten Rente $=$ dem $n - 1$- $=$ 10jährigen Nachwerthe des Baarwerthes $B = 500$; also $A = 500 \times 1{,}480 = 740$, und sonach der 4procentige Zins (die Rente r) dieses Kapitales

$= 740 \times e = 740 \times 0{,}04 = 29{,}6$ Thlr.

3. **Beispiel.** (Gesucht die Zeit n des ersten Renteneingangs.)

Wenn bei einem der Verbesserung sehr bedürftigen Ertragsobjekte, z. B. einer Wiese, das mit 100 Thlrn. angekauft ist, und bei gehöriger Kultur 12 Thlr. jährlichen Reinertrag verspricht, die bisherigen Erträge immer wieder auf die Verbesserung verwendet werden sollen, und zwar so lange, dass sich bei dem erwarteten Reinertrage von 12 Thlrn. eine 6procentige Verzinsung des Kaufkapitales herausstellt: wann könnte man dann den 1. Ertrag zur Wirthschaftkasse beziehen?

Die Rente $r = 12$, ihr Anfangswerth A also $= 12 \times \frac{100}{p} = 12 \times \frac{100}{6} = 200$.

Suche nun die Zeit, in welcher der Kaufswerth 100 bei 6 Proc. zum Nachwerth 200 anwächst. Nach S. 59 nehmen wir, da 6 Proc. die Tafel übergreift, 3 Proc. (pro Halbjahr) und bekommen dann nach der 3 Proc.-Spalte der Nachwerthstafel ziemlich nahe 24 Zinstermine oder Halbjahre, also 12 Ganzjahre $= n - 1$; also $n = 13$ Jahre.

4. Beispiel. (Gesucht der Zinsfuss e oder p.)

Ein Grundstück, das erst nach 25 Jahren einen Reinertrag und zwar in der regelmässigen Grösse von 100 Thlrn. abzuwerfen Aussicht giebt, steht mit der Summe von 2000 Thlrn. Kaufspreis in Frage. Zu wieviel Procent würde sich bei diesem Kaufsabschlusse das Anlagekapital verzinsen?

Es ist $n - 1 = 25$.

Nehmen wir versuchsweise erst 3 Proc., so erhalten wir als 25jähr. Nachwerth von 2000 Thlrn. $= 2000 \times 2{,}094 = 4188$ Thlrn. $= A$, und als gleichbedeutend den Rentenanfangswerth $100 \times \frac{100}{3} = 3333{,}3$ Thlr. $= A$.

Da dies nicht übereinstimmt, nehmen wir 2 Proc.; dann ist der 25jähr. Nachwerth $= 2000 \times 1{,}641 = 3282$ Thlr. $= A$, und als gleichbedeutend der Rentenanfangswerth $= 100 \times 50 = 5000$ Thlr. $= A$.

Es war also 3 Proc. zu gross, 2 Proc. zu klein. Will man nun den zwischen 2 und 3 liegenden Zinsfuss noch etwas näher kennen, so sucht man weiter den 25 jähr. Nachw. bei $2\frac{1}{2}$ Proc. $= 2000 \times \frac{1{,}641 + 2{,}094}{2} = 3735$ Thlr. und den ihm gleich sein sollenden Rentenanfangswerth $= 100 \times \frac{100}{2\frac{1}{2}} = 4000$ Thlr.,

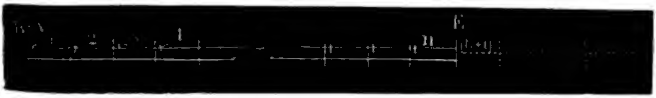
wonach ersichtlich, dass der Zinsfuss noch etwas weniges grösser als $2\frac{1}{2}$ Proc. ist.

5. **Beispiel. Zusatz.** Weit kürzer gestaltet sich die Rechnung, wenn für die eine Seite derselben der Zinsfuss gegeben, z. B. wenn gesagt wäre, bis zum Zeitpunkte der eigentlichen Nutzung (25 Jahre lang) verlange man nur 3procentige Zinsverzinsung und wolle nur von da ab die Verzinsungsweise kennen lernen; denn dann ergäbe sich bestimmt das A = dem 3procentigen 25jährigen Nachwerthe von 2000 = 4188 Thlr., und demgemäss nach Regel 3, S. 83 der Verzinsungsfuss $p = \frac{100 \times 100}{4188} = 2{,}38$ Proc.

§. 82. Vordere Rentenstücke.

I.

Fig. 12.



Bei Berücksichtigung der Paragraphen (75—77), die von dem Wesen der Rententafel des Knechtes handeln, ergeben sich leicht von selbst folgende Regeln:

1) Für den Endwerth E: Multiplizire den Einheitsendwerth der Tafel, welcher dem letzten Eingangsjahre n der Rente r entspricht, mit der Grösse der letzteren.

2) Für den Anfangs- oder Baarwerth A oder B: Multiplizire den Anfangswerth der Tafel, welcher dem letzten Eingangsjahr n entspricht, mit der Rentengrösse r.

3) Für die Grösse r der Rente: Soviele Male der Anfangs- oder Endwerth der Rente r grösser ist als der entsprechende der Tafel, soviele Male ist die Rente grösser als 1.

4) Für die Zahl n der Rentenglieder: Reduzire das gegebene A oder E durch Division mit r auf den Anfangs- oder Endwerth der Rente 1 und suche diesen

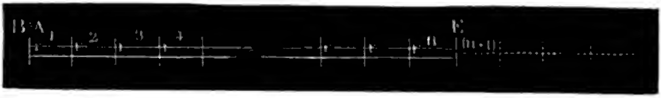
in der betreffenden Procentspalte der entsprechenden Tafel auf.

5) Für das untergelegte Zinsprocent p: Reduzire wie sub 4 den gegebenen Anfangs- oder Endwerth der Rente r auf den der Einheit und suche ihn in der betreffenden Jahreszeile der Tafel auf.

II.

Für die vorschussweise Rente

Fig. 13.



sind die obigen Regeln mit einigen leicht von selbst sich ergebenden Modifikationen ebenfalls anwendbar. Versetzen wir nämlich im Geiste jedes zu Anfang eines Jahres stehende r an das Ende desselben, so verwandelt sich dasselbe in seinen einjährigen Nachwerth und die Rente selbst in eine an Werth vollkommen gleiche nachschussweise. Daraus dann die Regel folgt:

6) Für die Berechnung vorschussweiser Renten: Nimm statt des gegebenen r seinen einjährigen Nachwerth und verfahre dann ganz nach obigen Regeln. Und im Falle r selbst die gesuchte Grösse wäre, hätte man den nach oben gefundenen Werth derselben (als einen einjährigen Nachwerth) nur auf den einjährigen Vorwerth noch zu bringen.

7) Würde man den Endwerth einer vorschussweisen Rente als E' auf den Moment des letzten Renteneingangs beziehen, so ist dies E' der einjährige Vorwerth des Endwerthes E. Da dieser aber nach (6) berechnet etwas Anderes nicht als der einjährige Nachwerth des nach (1) ermittelten ist, und die einjährige Vor- und einjährige Nachwerthsreduktion sich hebt, so folgt: Der Endwerth E' ist gleich dem einer $n$maligen nachschussweisen Rente. — Auch kann man sich das erste

r gesondert denken, und hat es dann einfach mit einer $n-1$maligen nachschussweisen Rente von einer Baargrösse r zu thun.

§. 83. Beispiele über Vorderrenten.

1. Beispiel. (Gesucht ein Anfangswerth.)

15 im Laufe des 1. Jahres schon beginnende jährliche Nutzungen à 100 Thlr. sind durch Kapitalzahlung abzulösen und bei der Berechnung des gegenwärtigen Kapitalwerthes eine 4procentige jährliche Verzinsung anzunehmen.

Laut Spalte 4 Proc., Zeile 15 (Jahre) der Rententabelle ist der gesuchte $A = 11{,}12 \times 100 = 1112$ Thlr.

2. Beispiel. (Desgl.) Ein Landwirth oder sonst ein Geschäftsmann hat von einem Kapitalisten die Summe von 2400 Thlrn. aufgenommen mit der Bedingung, anstatt der Rückzahlung und der Zinsen 30 Jahre lang eine hypothekarisch versicherte Tilgungsrente von 150 Thlrn. zu Ende jedes Jahres einzuzahlen. Auf welcher Seite und in welcher Weise liegt der absolute Vortheil, wenn 4procentige jährliche Verzinsung aller Gelder angenommen wird.

Der Anfangswerth jener Tilgungsrente nach Regel 2) ist $= 17{,}29 \times 150 = 2593{,}5$ Thlr.

Ausser, dass der Darleiher Kapital und 4procentige Zinseszinsen zurückbezahlt erhält, macht er also auch noch einen baaren Gewinn von 193,5 Thlr. durch diesen Kontrakt.

3. Beispiel. (Gesucht ein Endwerth E.)

Man will wissen, wie die beiden Leistungen des vorigen Vertrags sich zur Zeit seines Ablaufs gegen einander verhalten werden.

Das Darlehen 2400 Thlr. bei 4 Proc. Verzinsung ist, laut Nachwerthstabelle in 30 Jahren angewachsen zur Summe $3{,}243 \times 2400 = 7783{,}2$ Thlr.

Die 30malige Jahresrente von 150 Thlrn. dagegen, laut Endwerthstabelle, zur Summe $56{,}08 \times 150 = 8412{,}0$, wonach also, bei Ablauf des Vertrags, dem

Kapitalisten ein Gewinn von 8412,0 — 7783,2 = 628,8 Thlr. verbleibt.

Wenn die Rechnung nach allen Seiten hin probehaltig und richtig sein soll, muss der oben berechnete 193,5 Thlr. Anfangs- oder Baargewinn dem hier berechneten 629 Thlr. Endgewinn gleich sein; und in der That ist auch der 30jährige Nachwerth von 193,5 Thlr. = 193,5 × 3,243 = 628.

4. **Beispiel.** (Gesucht die Rentengrösse bei gegebenem A; Verwandlung eines Anfangswerthes in eine Rente.)

Die Kulturkosten einer gewissen Waldwirthschaft betragen pro Morgen 100 (Groschen od. dergl.). Man will wissen, wieviel davon auf das einzelne Jahr kommt, wenn man in 80jährigem Umtriebe wirthschaftet (die Bestände nach 80 Jahren abtreibt) und nur eine 3procentige Verzinsung der Betriebsgelder beansprucht?

Jene 100 Gr. sind der ausgelegte Anfangswerth einer 80maligen Jahresrente, deren Grösse nach Regel 3 = 100 dividirt durch das A der 80jährigen Einheitsrente der 3 Proc.-Spalte, = 100 : 30,20 = 3,3 oder 3,3 Procent der Kultursumme. Bei 4 Proc. würde $r = \frac{100}{23,92} =$ 4,2 oder 4,2 Proc. der Kultursumme.

1. **Zusatz.** Wenn ich also in jedem Lebensjahre dieses einen Bestandes pro Morgen 3,3 Proc. des Kulturaufwandes vom Ertrage wegnehme und in eine 3procentige Sparkasse lege, so würde dadurch der Forstkasse voller Ersatz für ihre Kulturauslage gewährt sein. Probe: 100 Thlr. Kapital nach 80 Jahren = 100 × 10,64 = 1064 Thlr. Kapital, und eine 80malige Jahreseinlage von 3,3 Thlr. erlangt in der Sparkasse laut Endwerthstafel Zeile 80 den Endwerth 3,3 × 321,4 = 1061 Thlr. Kapital.

2. **Zusatz.** Streng genommen ist die vorhergehende 80jährige Kulturrente als eine vorschussweise zu betrachten, weil sie zu Anfang jedes Jahres angelegt sein will. Als solche aufgefasst, fällt jedes Glied um 1 Jahr früher, als oben berechnet, also der ganze An-

fangswerth = einjähriger Vorwerth des obigen = 30,20 × 0,97 = 29,294.

Nun ist aber der wirkliche Anfangswerth = 100, also auch die wirkliche Rente = 100 : 29,294 = 3,4.

Bei 4 Proc. Zinsfuss r = 100 : (23,92 × 0,962) = 100 : 23,011 = 4,3.

Der Rentenwerth berichtigt sich sonach nur um $^1/_{10}$ Procent, und man sieht, wie man nur dort, wo die Berechnung mit besonderer Feinheit zu führen nothwendig ist, auf den Unterschied zwischen vorschussweisen und nachschussweisen Renten zu achten Ursache hat.

5. Beispiel. (Gesucht die Rentengrösse bei gegebenem E; Verwandlung eines Endwerths in eine Rente.)

Der im 6. Beispiele Seite 66 berechnete Endwerth (1788,7 fl.) eines vollen 80jährigen Umtriebs soll auf der Basis 3procentiger Verzinsung als Waldrente ausgedrückt werden.

Die Tafel giebt den E der 80jährigen Einheitsrente = 321,4; folglich die Grösse der betreffenden Waldrente = 1788,7 : 321,4 = 5,56 fl.

6. Beispiel. Die Versicherungsanstalt Janus in Hamburg verlangt eine jährliche vorschussweise Prämie von 6 Thlrn., wenn man einem neugebornen Kinde eine Summe von 1000 Thlrn., zahlbar bei vollendetem 50. Lebensjahre desselben, versichern will. Man will wissen, bis zu welcher Summe jene verlangten Einlagen in einer 3procentigen Sparkasse anwachsen würden.

50 Einlagen, zu Anfang jedes Jahres, bilden eine 50malige vorschussweise Rente, deren Endwerth nach Regel (6) S. 88 = dem einjährigen Nachwerthe einer dergleichen nachschussweisen, also = 112,8 × 6 × 1,03 = 697,1 Thlr.

7. Beispiel. Ein Wirthschafts- oder Fabriken-Inventarium ist so beschaffen, dass es jährlich 3 Proc. der Anschaffungskosten an Reparaturaufwand erfordert und nach 20 Jahren so abgenutzt ist, dass es er-

neuert werden muss, wobei der Werth des Restes zum 5. Theil des Anfangswerthes zu veranschlagen ist. Wie gross ist die jährliche Abnutzung dieses Inventars, wenn man der Rechnung den Zinsfuss 4 unterlegt?

Man setze die Anschaffungskosten = 100 Thlr. Davon sind nach 20 Jahren oder am Ende noch vorhanden $\frac{100}{5}$ = 20 Thlr., deren gegenwärtiger Werth (laut Vorwerthstafel) = 0,456 $\times$ 20 = 9,12, so dass in Wahrheit die Anschaffungskosten Netto nur betragen 100 — 9,12 = 90,88 Thlr.

Der Anfangswerth einer 20jährigen Einheitsrente 1 aber ist nach der Anfangswerthtafel = 13,59, folglich die Grösse r der hier fraglichen Rente = 90,88 : 13,59 = 6,7 Thlr.

Dazu die 3 Proc. oder 3 Thlr. jährliche Reparatur, stellt sich die wirkliche Abnutzungsrente jährlich auf 9,7 Thlr. oder 9,7 Proc. der Inventarkosten.

8. Beispiel. (Gesucht die Dauer n der Rente.)

Ein Servitut, im Geldwerthe geschätzt auf jährlich 60 Thlr. Reinertrag, soll durch eine doppelt so grosse Jahresrente abgelöst werden. Wie lange muss diese Tilgungsrente dauern, wenn die Parteien sich über den Zinsfuss 4 Proc. geeinigt haben?

Der Kapitalwerth des betreffenden Nutzungsrechtes ist = dem Anfangswerth einer endlosen Rente von 60 Thlrn. = 60 $\times \frac{100}{4}$ = 1500 Thlr. Dies ist aber auch der Anfangswerth der Ablösungsrente von 120 Thlrn. Nach Regel 4 auf die Rente 1 reducirt, macht $A = \frac{1500}{120} = 12{,}5$; und in der 4 Proc. Spalte diesen Anfangswerth aufgesucht, zeigt zwischen 15 und 20 Jahre, oder nach einfacher Zwischenrechnung:

$$\begin{array}{ll} A \text{ zu } 20 \text{ J.} = 13{,}59 & A \text{ zu } 15 + x \text{ J.} = 12{,}5 \\ A \text{ zu } 15 \text{ J.} = 11{,}12 & A \text{ zu } 15 \text{ J.} = 11{,}12 \\ \hline \text{Diff. pro 1 J.} = \frac{2{,}47}{5} = 0{,}49; & \text{Diff. pro } x \text{ J.} = 1{,}38 \end{array}$$

also $x = 138 : 49 = 2{,}8$ Jahr, und somit $n = 15 + 2{,}8 = 17{,}8$ Mal oder Jahr.

Zusatz. Diese Antwort kann nun nichts Anderes bedeuten als: Die Rente ist 17 Jahre lang voll zu zahlen und im 18. Jahre noch soviel, dass der Anfangswerth seine Erfüllung erlange. Vollkommen genau würde sich dieser Rest folgendermaassen erörtern:

Voller Anfangswerth	= 12,5
Anfangswerth der 15maligen Rente, laut Rententafel	= 11,12
Anfangswerth des 16. Gliedes, laut Vorwerthstafel	= 0,535
Anfangswerth des 17. Gliedes, laut Vorwerthstafel	= 0,515
	12,17.

Es bleibt sonach noch zu zahlen ein Anfangswerth $= 12{,}5 - 12{,}17 = 0{,}33$, zahlbar am Ende des 18. Jahres in der Grösse seines 18jährigen Nachwerthes, $= 0{,}33 \times 2{,}04 = 0{,}68$ — Alles gültig für die Rente 1, also für die Rente $120 = 0{,}68 \times 120 = 81{,}6$.

(Die Ablösungssumme wird also vollständig getilgt, wenn 17 Jahre lang 120 Thlr. und im 18. noch 81,6 Thlr. gezahlt werden.)

9. Beispiel. Eine Hagelassekuranz-Gesellschaft verlangt von einem Landwirth an Versicherungsprämie 3 Proc. des versicherten Werthes. Wenn nun die Verhagelung immer eine totale wäre, binnen wieviel Jahren müsste sie wiederkehren, wenn zwischen beiden Vertragsparteien das Gleichgewicht bei 4 Proc. hergestellt sein sollte?

Die Rente $r = 3$, der Endwerth $E = 100$; also für die Einheitsrente $E_1 = \frac{100}{3} = 33{,}3$ und dieser liegt

zwischen den Jahren 20 und 25, und bei genauerer Ansicht zwischen 21 und 22 Jahren. D. h. wenn jener Landwirth alle 21 Jahre total verhagelt wird, erhält er gerade seine Versicherungssteuer mit 4procentigen Zinseszinsen zurück.

10. Beispiel. Gesucht der Zinsfuss p.

Die Berliner Lebensversicherungsbank verlangt von einem 32jährigen Manne, der sein Leben mit 1000 Thlrn. versichern will, eine jährliche Prämie von 27,8 Thlr. Wenn dieser nun bald nach vollendetem 51. Jahre stürbe, wie hoch hätte da die Bank die Einlagen verzinst?

Erste Anlage zu Anfang des 33. Jahres (circa = zu Ende des 32. J.).

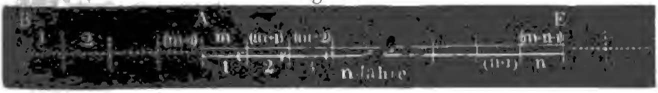
Letzte Anlage zu Anfang des 52. Jahres (od. zu Ende des 51. J.).

Nimmt man, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, an, dass die im Laufe des 52. Jahres auszuzahlende Versicherungssumme schon zu Anfang dieses Jahres (oder zu Ende des 51. J.) verabfolgt würde, so hätte man eine 20malige nachschussweise Rente mit dem Endwerthe 1000, oder auf die Rente 1 reduzirt, mit dem $E = \frac{1000}{27{,}8} = 36$, welcher, in der Zeile 20 J. aufgesucht, auf mehr als 5 Proc. deutet. Nehmen wir deshalb halbjährige Rententermine, an Zahl also 40, und an Grösse $\frac{27{,}8}{2} = 13{,}9$ an, so würde der Einheitsendwerth $E_1 = \frac{1000}{13{,}9} = 72$, was in Zeile 40 deutet auf 2,8 Proc. halbjährlich, also ganzjährlich 5,6 Proc. Zinsverzinsung.

§. 84. Mittlere Rentenstücke.

(Jahresrente, die im Laufe oder zu Ende des $m$ten Jahres das erste Mal eingeht und $n$mal, oder im $(m + n - 1)$ten Jahre das letzte Mal, erfolgt.)

Fig. 14.



Denken wir uns in den Zeitpunkt A versetzt, oder die $m - 1$ Vorderjahre hinweg, so haben wir ein vorderes Rentenstück, das in Bezug auf die Grössen A, E, r u. s. w. ganz nach den vorigen Paragraphen zu behandeln ist. Kommt aber der Baarwerth B in Frage, so hat man einfach nur zu bedenken, dass dies der $m - 1$jährige Vorwerth von A oder der $m + n - 1$-jährige von E ist, und umgekehrt.

Wer sich die leichte Mühe nicht verdriessen lassen, und sich in die Behandlung der vorderen Rentenstücke gehörig eingearbeitet hat, wird bei der Berechnung mittlerer keine nennenswerthe neue Schwierigkeit erfahren, wie folgende Beispiele beweisen werden.

§. 85. Beispiele über Mittelrenten.

1. Beispiel. (Gesucht der Baarwerth.) Mit welcher Baarsumme müsste man bei Annahme vierprocentiger Verzinsung der Gelder eine Nutzniessung ablösen, die im Laufe des 20. Jahres beginnt und 30 Jahre lang in der Grösse von 100 Thlrn. fortdauert?

Anfangswerth dieser 30maligen Rente nach Zeile 30 Jahr der Tafel $= 17{,}29 \times 100 = 1729$ Thlr. und die Baargrösse dieses 19jährigen Nachwerths laut Tafel $= 1729 \times 0{,}476 = 823$ Thlr.

2. Beispiel. (Gesucht die Rentengrösse.) Gegen Aufnahme von 1000 Thlrn. tritt ein Waldbesitzer 10 Jahresschläge ab, von denen aber der erste erst nach 15 Jahren, d. h. im Laufe des 16. Jahres beginnen soll. Wie gross müssten die Reinerträge sein, wenn Kapital und 5procentige Zinseszinsen dadurch gedeckt werden sollen?

Bringen wir jene $1000 = B$ auf den Zeitpunkt A oder den 15jährigen Nachwerth, so haben wir es dann mit einer gewöhnlichen Vorderrente zu thun. Es ist der 15jährige Nachwerth von 1000 bei 5 Proc. laut

Tafel = 2079; dies ist aber nun der Anfangswerth der 10maligen Tilgungsrente r, und da dieselbe laut Tafel für $r = 1$ die Grösse 8,983 hat, folgt $r = \frac{2079}{8,983} = 231,5$ Thlr.

§. 86. Periodische Vollrenten.

Fig. 15.



(Renten, die alle n Jahre wiederkehren und endlos fortgehen).

Ein Kapital 100 giebt bei 4 Procent alle 5 Jahre eine Interessensumme von $0,217 \times 100 = 21,7$ (Vergl. Zeile 5, Spalte 4 Proc. der Nachwerthstafel.) Ein alle 5 Jahre wiederkehrender Ertrag von 21,7 Thlrn. entspräche also einem baaren Kapitalwerthe von 100; und leicht ersieht man hierin folgendes Gesetz:

1) Geht eine Rente r nach n Jahren das erste Mal ein und kehrt alle n Jahre wieder, so findet sich ihr Werth zu Anfang der ersten Periode, d. h. ihr Baarwerth B, der hier mit dem Anfangswerthe A einerlei ist, indem man nach §. 65 mittels der Zinstafel das Kapital sucht, das in n Jahren r Thlr. Interessen trägt.

2) Der Anfangswerth A' einer periodischen Rente, deren erste Anlage sofort erfolgt, ist gleich dem nach Reg. 1) berechneten A vermehrt um eine Rentengrösse r, oder $A' = A + r$.

1. Beispiel. Eine alle 5 Jahre wiederkehrende Eichenschälnutzung von 50 Thlrn. entspricht bei 4 Proc. einem Kapitalwerthe von wieviel?

In 5 Jahren sind die Zinseszinsen des Kapitales 1 bei 4 Proc. = 0,217; nun aber sind gegeben die Zinseszinsen des Kapitals K bei 4 Proc. = 50; also ist $K = \frac{50}{0,217} = 230,4$ Thlr.

2. Beispiel. Wenn aber die nächste Nutzung eben bevorsteht?

Dann hat man den obigen Anfangswerth 230,4 Thlr. und noch die erste Nutzung 50; also zusammen 280,4 Thlr.

§. 87. Aufgeschobene periodische Renten; Hinterstücke periodischer Renten.

(Renten, die nach *m* Jahren das erste Mal erfolgen und alle *n* Jahre unaufhörlich wiederkehren.)

Fig. 16.



Der Anfangswerth, auf das Ende des *m*ten Jahres bezogen, ist der sub 2 des vorigen Paragraphen genannte $A' = A + r$; und der *m*jährige Vorwerth dieses A^1 ist der Baarwerth B. Aus diesen Wahrheiten ergiebt sich leicht, wie man die Behandlung aufgeschobener Renten nach der der vollen in gegebenen Fällen zu modifiziren hat.

1. **Beispiel.** An einem Maschinenwerk steht in 5 Jahren eine Erneuerung bevor, die alle 10 Jahre in derselben Höhe von 100 Thlrn. wiederkehrt. Welchem Kapitalwerthe entspricht diese Last, nach Maassgabe vom Zinsfusse 4; oder welche Summe vom Betriebskapitale wird durch dieselbe absorbirt; oder welche Summe muss man jetzt sofort zu 4 Proc. jährlicher Zinsverzinsung anlegen, um diese Anlage zur Deckung jener periodischen Ausgabe zu fundiren?

   Anfangswerth A' am Ende des 5. Jahres = 100 Thlr. + jene Summe, welche alle 10 Jahre 100 Thlr. Interessen trägt. Die Nachwerthstafel aber lehrt, das dieser zehnjährige Zinseszins $= 0{,}48 \times K$, also diess $K = \frac{100}{0{,}48} = 208$; mithin $A' = 100 + 208 = 308$, welche als nach 5 Jahren erfolgend, jetzt einen Werth von $308 \times 0{,}784 = 241{,}5$ Thlr. haben.

2. **Beispiel.** Durch einen jetzigen Aufwand von 100 Thlrn. könnte man einen Eichenbestand herstellen,

der nach 20 Jahren zum Nettoertrage käme und als Schälwald bewirthschaftet eine alle 10 Jahre wiederkehrende Rente gewährte. Wie gross müsste diese vom 20. Jahre ab sein, wenn das Anlagekapital sich zu 5 Proc. nutzen sollte?

Die 100 Thlr. auf den 20jährigen Nachwerth gebracht, geben den Anfangswerth A' oder $A + r$ der Rente; also $A' = 100 \times 2{,}653 = 265{,}3$ Thlr. Stäke nicht der erste Ertrag mit hierin, so könnte man sagen: Die Rente ist = dem zehnjährigen Zinseszinse dieses Fonds, also $= 265{,}3 \times 0{,}629 = 238{,}7$ Thlr., welche Zahl aber hier sehr falsch sein würde, da die jedenfalls bedeutende Rente erst abzuziehen wäre. Durch Versuche ist es wohl auf diesem Wege zu bewerkstelligen. Z. B.: Man schätze $r = 100$, so bleibt $A = 265{,}3 - 100 = 165{,}3$ als Anfangswerth, dessen 10jähriger Zinsertrag $= 165{,}3 \times 0{,}629 = 104{,}1$ Thlr. wäre, so dass man jetzt schon ziemlich befriedigend antworten könnte: Nach 20 Jahren müssen 100 Thlr. und dann alle 10 Jahre 104 Thlr. erfolgen.

Doch lässt sich die Sache auch direkt lösen, wenn wir den Anfangswerth auf den Anfang der ersten Periode, oder von jetzt an gerechnet, auf das Ende des 10. Jahres verlegen. Dann sind jene 100 Thlr. auf den 10jährigen Nachwerth angewachsen, also $= 100 \times 1{,}629 = 162{,}9$ Thlr., und diese sind der Anfangswerth oder Kapitalstock einer alle 10 Jahre erfolgenden Rente von $162{,}9 \times 0{,}629 = 103\,^1/_2$ Thlr.

§. 88. Vorder- und Mittelstücke periodischer Renten.

Fig. 17.

I.

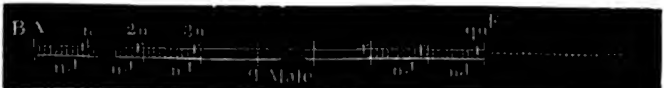
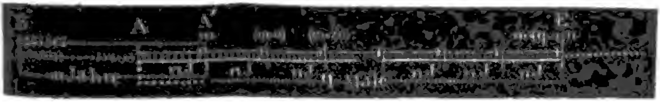


Fig. 18.

II.



Die erstere Figur verbildlicht eine Rente *r*, die alle *n* Jahre und im Ganzen *q* mal (oder zu Ende des *qn* ten Jahres das letzte Mal) eingeht; also eine periodische Vorderrente. Die andere Figur ist ein gleiches Rentenstück, dessen erster Eingang aber nach beliebig viel Jahren (*m*) stattfindet.

Man kann dergleichen Rentenstücke, ähnlich wie es bei den gleichförmigen Jahresrenten geschah, dadurch berechnen, dass man sie als eine volle bei *A* beginnende nachschussweise (d. h. *n* Jahre nach dem Momente *A* das erste Mal erfolgende) betrachtet und eben so das fehlende Hinterstück als eine dergleichen bei *E* beginnende.

Bei der Verschiedenartigkeit der möglichen Fälle sind allgemeine Regeln hier nicht angebracht. Wer das Vorige gehörig durchgelesen, hat sicher vom Geiste der Rentenrechnungskunst genug in sich aufgenommen, um sich hier von selbst zurechtfinden zu können; weshalb wir gleich zu einem nach obiger Weise zu behandelnden Beispiele gehen wollen.

Beispiel. Eine Nutzung in der Höhe von 100 Thlrn. geht nach 15 Jahren ein und kehrt in Zwischenzeiten von 5 zu 5 Jahren noch 9mal wieder. Welchen Kaufswerth hätte dieselbe jetzt und welche Höhe hätte sie zur Zeit und inclusive der letzten Wiederkehr, wenn eine 4proçentige Verzinsung der Gelder angenommen wird.

Auflösung. Mittelstück von der Form II.; $m = 15$; $n = 5$; $r = 100$. Gesucht *B* und *E*.

Das *A* der vollen Rente ist ein Fond, der alle *n* Jahre *r* Thlr. Zinsen, hier alle 5 J. 100 Thlr. trägt, und der nach § 65, S. 68 $= \frac{100}{0{,}217} = 460{,}8$. Und ganz

dieselbe Grösse muss natürlich auch der Anfangswerth der bei E beginnenden negativen Rente haben (weil diese, von da an gerechnet, auch eine volle ist). Nun ist aber jenes ein 15 — 5 = 10jähriger, dieses aber ein 15 + 9 × 5 = 15 + 45 = 60jähriger Nachwerth; daher mittels der Vorwerthstafel die Baargrösse des 1. = 460,8 × 0,676
» » » 2. = 460,8 × 0,095; und diese von jenem abgezogen lässt 460,8 × 0,581 = 267,7 Thlr. als Baarwerth B.

Und der Endwerth E, als ein 60jähriger Nachwerth von B = 267,7 × 10,52 = 2816 Thlrn.

§. 89. 1. **Zusatz.** Wenn die Periode n der Rente nicht über 3 — 4 Jahre in sich begreift, so kann man auch, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, die Rentengrösse r gleichförmig auf die einzelnen Jahre vertheilen und so die Rente in eine gewöhnliche Jahresrente umwandeln. Selbst bei 5jähriger Periode ist der Fehler — im Vergleich zu den sonstigen Verhältnissen des Geschäftslebens — noch als ziemlich gering zu betrachten, wenigstens sobald es sich um Anfangswerthe handelt.

Zum Beweis dessen wollen wir die vorige Rente nach dieser Vereinfachungsmethode behandeln. Dieselbe verwandelt sich demgemäss in eine nachschussweise Jahresrente von $\frac{100}{5}$ = 20 Thlrn., welche im Laufe des 11. Jahres beginnt und in dem des 60. Jahres schliesst, oder 50mal eingeht, also nach der Rententafel des Knechtes zu Ende des 10. oder Anfang des 11. Jahres einen Anfangswerth besitzt von A = 21,48 × 20 = 429,6, und also einen Baarwerth = 10jährigen Vorwerth von A = 429,6 × 0,676 = 290,4 Thlr. (also nur um 23 Thlr. zu gross).

Und der Endwerth = E einer 50maligen Jahresrente von 20 Thlrn. = 152,7 × 20 = 3054 Thlr. (allerdings um 200 Thlr. zu gross).

Sehr verringern lässt sich jedoch der Fehler dieser Rechnungsweise, wenn man nicht, wie hier geschehen, die

Rente 100 nur auf die 5 Vorjahre, sondern theils vor-, theils hinterwärts vertheilt.

Z. B.: Von jedem *r* der 5jährlichen Rente Fig. II. werden 3 Theile auf 3 Vor- und 2 Theile auf 2 Nachjahre vertheilt. Dadurch erhält man eine Jahresrente, die im 13. Jahre das erste Mal und im 62. Jahre das letzte Mal eingeht. Der Anfangswerth dieser 50maligen Rente bleibt natürlich derselbe als vorher, = 429,6, aber der Baarwerth ist kein 10-, sondern ein 12jähriger Vorwerth, darum $B = 429{,}6 \times 0{,}628 = 269{,}7$ Thlr.; jetzt also nur noch um 2 Thlr. zu gross.

Und der Endwerth E, zu betrachten als 60jähriger Nachwerth von $B = 269{,}7 \times 10{,}52 = 2837$ Thlr. (nur um 21 Thlr. unrichtig).

§. 90. 2. Zusatz. Der im Rechnen wenig Bewanderte, der lieber den ihm bekanntesten Weg wählt, wenn er auch ein Umweg ist, kann sich alles weitere Einmerken der hier oben besprochenen Regeln ersparen, wenn er alle Rentenglieder als einzelne Kapitale betrachtet, die er nun mittels der Zinstafeln — je nach Erforderniss der Aufgabe — auf ihren Vor- oder Nachwerth bringt.

Hiernach berechnet sich z. B. der Baarwerth der vorigen Rente also:

1)	Der	Ertrag	1	nach	15 J.	hat	an	Baarwerth	=	0,555
2)	»	»	1	»	20 J	»	»	»	=	0,456
3)	»	»	1	»	25 J.	»	»	»	=	0,375
4)	»	»	1	»	30 J.	»	»	»	=	0,308
5)	»	»	1	»	35 J.	»	»	»	=	0,253
6)	»	»	1	»	40 J.	»	»	»	=	0,208
7)	»	»	1	»	45 J.	»	»	»	=	0,171
8)	»	»	1	»	50 J.	»	»	»	=	0,141
9)	»	»	1	»	55 J.	»	»	»	=	0,118
10)	»	»	1	»	60 J.	»	»	»	=	0,095
								B	=	2,680

also der Baarwerth der Rente $100 = 100 \times 2{,}680$ = 268 Thlr.

Ganz auf ähnliche Weise kann man auch den Endwerth und überhaupt den Werth zu irgend

einem mittleren oder späteren Zeitpunkte irgend einer Rente berechnen; und es wird diese Rechnungsweise, sobald man es mit verhältnissmässig wenig Gliedern zu thun hat, auch an sich die rationellste.

§. 91. Zusammengesetzte und ungleichförmige Renten.

Die Formen unregelmässiger Terminzahlungen oder sonstiger Nutzungen können ausserordentlich verschiedenartig sein. Gleiche Termine bei ungleicher Rentengrösse; gleiche Rentengrösse bei ungleichen Terminen; ungleiche Termine und ungleiche Rentenglieder — sind die drei Hauptvarietäten. Oft sind diese so beschaffen, dass man die ganze unregelmässige Rente in gleichförmige Stücke zerlegen und auf diese die betreffenden Gesetze der Rentenrechnung anwenden kann. Oft ist dies aber auch nicht möglich, und dann muss man jedenfalls nach der Weise des vorigen Paragraphen, d. h. mittels Einzelberechnung, verfahren.

Zum Schlusse folgen hierbei noch ein Paar charakteristische Erläuterungsbeispiele.

1. Beispiel. Ein Ertragsobjekt ist so beschaffen, dass es jetzt 20 Jahre lang eine Rente von 100 Thlrn., dann 20 Jahre lang eine von 200 Thlrn. und dann stetig eine Jahresrente von 400 Thlrn. gewährt. Welchen Kapitalwerth hat dies Objekt bei 4 Proc. Zinsfuss?

Die Erträge können betrachtet werden als bestehend:

a. Aus einer Vollrente von 100 Thlrn., deren Baarwerth nach §. 78 $= 100 \times \frac{100}{4}$ . . . . . $= 2500$ Thlr.

b. Dazu eine 20 Jahre lang aufgeschobene Vollrente von 100 Thlrn., deren Baarwerth also $= 2500 \times 0{,}456$ $= 1140$ »

c. Dazu eine 40 Jahre lang aufgeschobene Vollrente von 200 Thlrn., deren Baarwerth $= 5000 \times 0{,}208$ $= 1040$ »

Summa $B = 4680$ Thlr.

2. **Beispiel.** Ein Servitut ist so beschaffen, dass es von jetzt an gerechnet im 6. Jahre beginnt und in dem Jahreswerthe von 10 Thlrn. zwanzig Jahre dauert, dann wieder zwanzig Jahre aussetzt und dann in derselben Weise wiederkehrt. Mit welcher Baarsumme bei 4 Proc. wäre dies Servitut abzulösen?

Die ersten 20 Jahresnutzungen auf ihren Endwerth gebracht, geben nach der Rententafel $10 \times 29{,}78 = 297{,}8$ Thlr., als eine alle 20 Jahre wiederkehrende summarische Nutzung. Es ist aber der Anfangswerth dieser 20jährigen periodischen Rente $= \frac{297{,}8}{1{,}191}$ (s. 1) S. 96) $= 250{,}0$ Thlr.

Dies gilt aber für den Anfang des 6. Jahres, ist also ein 5jähriger Nachwerth, folglich seine Baargrösse $= 250 \times 0{,}822 = 205{,}5$ Thlr.

(Weitere Beispiele siehe in dem Kapitel von der Waldwerthberechnung.)

Zweites Buch.

Praktische Planimetrie

oder

der Messknecht

als:

6) Trigonometrische Tafel.

7) Meter- und Zollmaass, Maassstab und Transporteur.

8) Winkelkopf und Winkelkreuz.

9) Nivellirer.

10) Horizontalwinkel-Messer und -Abstecker.

11) Höhen- und Tiefenwinkel-Messer und -Abstecker.

12) Horizontalreduktor geneigter Linien und Flächen.

13) Tiefen- und Höhenmesser (Hypsometer).

14) Flächenquadrirer gerad- und krummliniger Figuren.

15) Feld- und Forstvermesser (Geodät).

Sechstes Kapitel.

Der Messknecht als trigonometrische Tafel.

§. 92. Die Trigonometrie bildet eine hauptsächliche, man kann wohl sagen: die unterste, Basis der ausübenden Planimetrie. Bekanntlich hat es letztere immer mit der Messung oder Berechnung ebener (oder als eben gedachter) Figuren zu thun, sei es nun in Bezug auf die Grösse ihrer Flächen oder ihrer einzelnen Elemente. Diese Elemente aber, die zugleich die Fläche mit bedingen, sind, wenige krummlinige Fälle abgerechnet, gerade Linien und Winkel. Und die Lehre von dem Wesen, der Messung, der Abhängigkeit und dem Einflusse dieser Winkelgrössen in den Figuren bildet den eigenthümlichen und wesentlichen Kern der Trigonometrie, den man auch kurzweg als Winkellehre (Goniometrie) bezeichnen kann. Durch Anwendung dieser Winkellehre auf die Geometrie und Auflösung der Dreiecksfigur entsteht erst die eigentliche Trigonometrie (Dreieckslehre) und durch Anwendung auf Vielecksfiguren die Polygonometrie (Vieleckslehre).

§. 93. Es darf daher nicht befremden, dass der Einfluss dieser geometrischen Grundwissenschaft in allen Gebieten der geometrischen Praxis ein höchst bedeutender ist und dass wir ohne Kenntniss derselben — die übrigens, wie die Folge lehren wird, so leicht zu erlernen ist — in jener

Praxis stets Stümper bleiben müssten. Denn in allen, selbst den gewöhnlichsten Gebieten der technischen, forst- und landwirthschaftlichen und Ingenieur-Mathematik spielen die trigonometrischen Grössen eine hervorragende Rolle, und werden nur deshalb so wenig benutzt, weil man sie nicht im Kopfe haben und doch auch nicht eine trigonometrische Tafel immer mit sich herumschleppen kann. Schreiber dieses war oft schon in dem Falle, sich die trigonometrischen Tabellen herbei zu wünschen, wenn ihm plötzlich eine der vielen Aufgaben der praktischen Mathematik, die zu ihrer Lösung der trigonometrischen Zahlen bedürfen, ausserhalb seiner Stube aufstiess oder vorgelegt wurde. Und wie vielen Forstgeometern, Ingenieuren, Technikern und sonstigen mathematisch bethätigten Praktikern mag wohl Aehnliches begegnet sein!

Diejenige Brieftasche aber, welche den Messknecht enthält, ist zugleich eine allzeit fertige, und schnell Auskunft gebende und — unter Anwendung einiger einfacher Kunstgriffe — auch ganz vollständige trigonometrische Tafel, indem sie die Sehnen, Sinuse und Cosinuse, Tangenten und Cotangenten, Secanten und Cosecanten aller Winkel theils direkt durch blosse Ablesung, theils durch eine ganz einfache Zwischenrechnung bis mindestens auf das einzelne Hundertheilchen, öfters bis auf das Tausendtheilchen genau angiebt*).

§. 94. Indem die folgenden Paragraphen die Anwendung des Messknechts als trigonometrische Ta-

*) Ich habe bei dem hiesigen mathematischen Practicum mit den Studirenden unparteiisch komparative Versuche angestellt und gefunden, dass bei einigermaassen runden Zahlen die trigonometrischen Berechnungen nach dem Knechte weniger Zeit erforderten als die mittels der logrithmischen Tafeln ausgeführten; was sich durch die schnelle Auffindung der trigonometrischen Grössen mit der Messknechtstafel erklärt. (Siehe die Beispiele weiter unten.) D. V.

fel zu erläutern die Bestimmung haben, sei ein- für allemal Folgendes vorausgeschickt:

Sobald sich die Chorden, Sinuse, Cosinuse, Tangenten etc. etc. auf den Radius 1 beziehen, nennen wir sie **natürliche**, oder **Einheits-Chorden**, **Einheits-Sinuse** etc. etc. und bezeichnen sie, wenn α das Gradmaass des Winkels M bedeutet, durch $ch_1\ \alpha$; $sin_1\ \alpha$; $cos_1\ \alpha$; $tg_1\ \alpha$; $cot_1\ \alpha$; $sec_1\ \alpha$; $cosec_1\ \alpha$, oder auch kurzweg durch $ch.\ \alpha$, $sin.\ \alpha$, $tg.\ \alpha$ etc. etc. Diejenigen dagegen, die sich auf einen andern, z. B. 3mal grösseren Radius MA beziehen, (und folglich 3mal so gross sind) wollen wir **gemeine** nennen und so bezeichnen, dass die Grösse des entsprechenden Radius als Index beigefügt wird; so dass man hat: $sin_3\alpha = 3 sin.\alpha$. $tg_3\ \alpha = 3\ tg.\alpha$, wie auch die Fig. 20 und Fig. 21 veranschaulichen; allgemein also:

$ch_r\ \alpha = r\ ch.\alpha$
$tg_r\ \alpha = r\ tg.\alpha$
etc. etc.

Fig. 20.

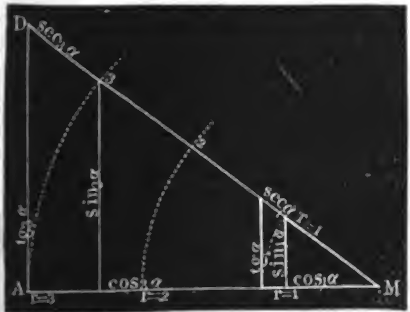
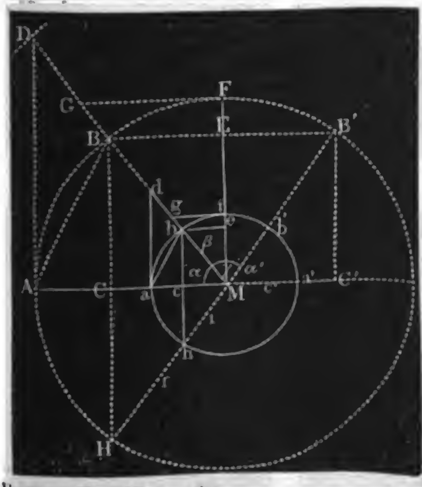


Fig. 21.



§. 95. Im Interesse derjenigen Freunde und Herren vom Messknecht, denen die Grundlehren der Trigonometrie unbekannt oder entschwunden sind, müssen wir überhaupt einige Paragraphen der Erläuterung hierüber noch vorausschicken; um so mehr, als diese so leichte Wissenschaft gar häufig viel schwerfälliger und umständlicher gemacht wird, als sie ist. Und da der Messknecht als trigonometrischer Geometer eine gar vielseitige Thätigkeit in allen folgenden Büchern dieses Werkchens noch zu entwickeln gedenkt, müssen wir seine mathematisch wenig gebildeteren Besitzer ganz besonders darauf aufmerksam machen, dass ein wenig Kopfarbeit über die Paragraphen dieses Kapitels ihnen ausserordentliche Erleichterungen und den selbstverständlichen Aufschluss vieler nachfolgender Kapitel gewährt.

Fig. 22a.

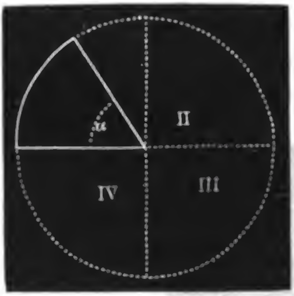


Fig. 22b.



Fig. 22c.



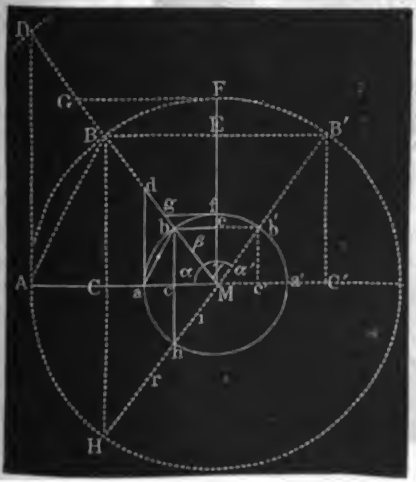
Fig. 22d.



§. 96. Jeden Winkel, mag er sein wo er will, können wir uns stets als vom Mittelpunkte eines Kreises ausgehend, oder mit seinem Scheitel im Kreiscentrum liegend vorstellen. Seine Oeffnung oder Grösse fällt dann entweder innerhalb des rechten Winkels, also zwischen 0 und 90 Grad, d. h. er ist ein spitzer oder ein Winkel des 1. Quadranten, wie $< \alpha$ Fig. 22ᵃ; oder er ist ein stumpfer, im Gradmaasse zwischen 0 und 180°, ein Winkel des 2. Quadranten, wie β Fig. 22ᵇ; oder endlich ein überstumpfer, convexer, und in so fern ein Winkel des 3. oder 4. Quadranten, wie γ und δ Fig. 22. Da sich aber jeder stumpfe und überstumpfe Winkel (β, γ, δ) immer auf einen spitzen, (α), den wir seinen Grundwinkel nennen wollen, zurückführen lässt, wie Fig. 22ᵃ, Fig. 22ᵇ, Fig. 22ᶜ und Fig. 22ᵈ es sehen lassen, so hat der Techniker fürs Gewöhnliche, gleichsam fürs Haus, ausreichende Trigonometrie, wenn er sich zunächst nur mit den goniometrischen Grössen des ersten Quadranten, d. h. des spitzen Winkels, und allenfalls noch mit dem Sinus und Cosinus der anderen bekannt macht.

§. 97. Der Radius des inneren Kreises, $Ma = Mb$, Fig. 23, sei die Einheit; seine Grösse also $= 1$; der des äusseren Kreises, $MA = MB$ sei beliebig viele Male, etwa r Male so gross, also $= r$; α bedeute den in Frage befindlichen Grundwinkel; β den, der ihn zum rechten Winkel od. 90° completirt, d. h.

Fig. 23.



β = Complementswinkel von α; und γ endlich einen stumpfen Winkel von solcher Grösse, dass sein Neben- oder Supplementswinkel α' so gross als α ist.

Wir nennen nun:

1) Die Linie $a\,b$ oder ihren Zahlenwerth: die natürliche oder Einheits-Chorde von α; und man schreibt: $a\,b = ch_1\alpha$, oder einfacher $a\,b = ch.\ \alpha$.

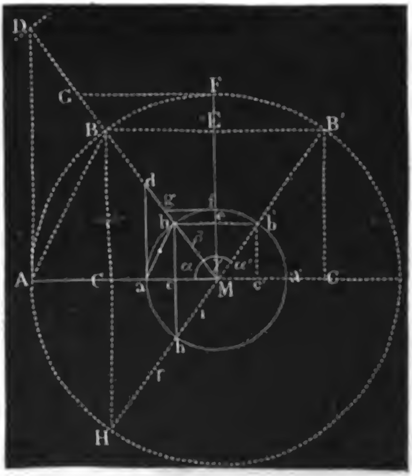
2) Die Linie bc: den Sinus (Stütze) des $< \alpha$, und zwar den natürlichen oder Einheitssinus; $b\,c = sin_1\alpha = sin\ \alpha$.

3) $a\,d$: die Tangente (Berührende) und zwar die natürliche oder Einheitstangente vom $< \alpha$, $= tg_1\alpha = tg.\ \alpha$.

4) Md: die natürliche oder Einheits-Secante (Durchschneidende), $= sec_1\ \alpha = sec.\ \alpha$. Und folgerecht also:

5) be: den Sinus vom $< \beta$, = Sinus des Complementes von α, = Complementssinus α, woraus durch Abkürzung geworden: *Cosinus* α; geschrieben: $be = cos_1\ \alpha$ oder $cos.\ \alpha$.

Fig. 24.



Also auch Mc (weil $= be$) als $sin.\ \beta$ oder $cos.\ \alpha$ zu betrachten.

6) $fg = tg.\beta$ = Cotangente $\alpha = cot_1\ \alpha$ od $cot.\ \alpha$.

7) $Mg = sec.\beta$ = Cosecante $\alpha = cosec_1\ \alpha$ oder $cosec.\ \alpha$.

Auch ist, wie leicht zu ersehen, immer

8) der Sinus (bc) eines $< \alpha$ stets die halbe Chorde (bh) vom $< 2\alpha$; oder: die *ch.* des doppelten Winkels halbirt giebt den *sin.* des einfachen.

Und mit Anwendung der im §. 94 vorgeschlagenen Schreibweise, hat man eben so folgerecht, (da der Radius $MA = r$, oder $r$mal so gross als Ma ist, also auch alle zu ihm gehörige Linien $r$mal so gross als die entsprechenden des Einheitsradius sind):

9) $AB = ch_r\, \alpha = r \times ch_1\, \alpha = r\ ch.\, \alpha.$

10) $BC = sin_r\, \alpha = r\ sin_1\, \alpha = r\ sin.\, \alpha.$

11) $MC = BE = \alpha = r\ cos.\, \alpha.$

12) $AD = tg_r\, \alpha = r\ tg.\, \alpha.$

13) $FG = cotg_r\, \alpha = r\ cotg.\, \alpha.$

14) $MD = sec_r\, \alpha = r\ sec.\, \alpha.$

15) $MG = cosec_r\, \alpha = r\ cosec.\, \alpha.$

§. 98. Beispiele zur Erläuterung der vorigen Sätze.

1) Wenn AD ein Baum und die Standlinie $MA = 30$ Fuss und der Höhenwinkel α knapp 49 Grad, und dessen natürliche Tangente 1,15 gross ist, so folgt:

$AD = tg_{30}\, 49^0 = 30 \,.\, tg.\ 49^0 = 30 \,.\, 1{,}15 = 34{,}5$ Fuss Höhe.

2) Ist MB eine Dammböschung und $= 30$ Fuss, so findet sich deren Grundbreite $MC = cos_{30}\, \alpha = 30 \,.\, cos.\, 49$, und da der natürliche Cosinus von $49^0 = 0{,}66$ ist, folgt:

$MC = 30 \times 0{,}66 = 19{,}8$ Fuss.

3) Repräsentirte MBC das halbe Profil eines Daches, und es wäre bekannt die Dachhöhe $BC = 10'$ und die Sparrenlänge $MB = 15'$, und man sollte daraus den Dachwinkel α ableiten, so hat man zwischen diesen drei Grössen die Gleichung:

$$BC = sin_{MB}\ \alpha = sin_{15}\ \alpha,$$

oder $10 = 15 \,.\, sin_1\ \alpha,$

mithin $\frac{10}{15} = sin_1\ \alpha = 0{,}67$, zu welcher Sinusgrösse eine trigonometrische Tafel das Gradmaass α = nahe 42° angiebt.

4) Oder wenn MA die Horizontal- oder Grundlänge eines steilen Berghanges MD zu 150 Ruthen und desgleichen der Steigungswinkel $\alpha = 49°$ bekannt und die wirkliche Länge MD des Weges daraus zu bestimmen wäre, so weiss man, dass:

$MD = sec_r\ \alpha = sec._{MA}\ \alpha = MA\ sec_1\ \alpha$ also,
$MD = 150\ sec_1\ 49°$, und da eine Secantentabelle die natürliche Secante von $49° = 1{,}5$ giebt:
$MD = 150 \times 1{,}5 = 225$ Ruthen.

5) Bei Auflösung des vorigen Beispiels lässt sich die Secante aber vermeiden, wenn man sie selbst als Radius (MD) denkt, wo dann MA als Cosinus α für den Radius MD erscheint, also nach obiger Schreibweise:

$MA = cos_{MD}\ \alpha = MD \times cos_1\ \alpha$, demnach

$150 = MD\ cos_1\ 49°$:

$$\frac{150}{cos_1\ 49} = MD = \frac{150}{0{,}66} = 225 \text{ Ruthen.}$$

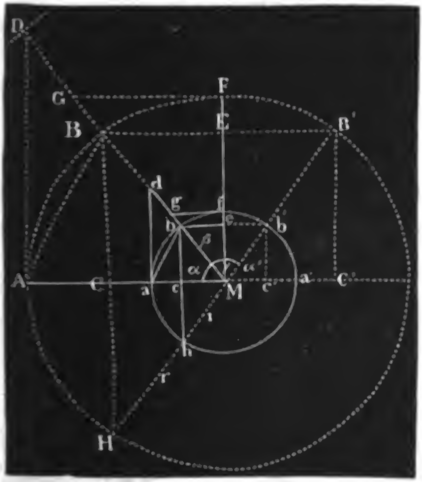
Und ähnlich wie hier **lassen sich stets die Secanten, Cosecanten und Cotangenten vermeiden.**

§. 99. Für der Trigonometrie Unkundige sei es mir verstattet, zur Erleichterung des Verständnisses dieses Kapitels noch folgende Sätze hinzuzufügen, welche theils aus der Figur 25 durch den blossen Augenschein, theils in Folge näherer Untersuchung der darin enthaltenen ähnlichen Dreiecke hervorgehen.

Lassen wir in dem Kreise $Mafa'$ den $< \alpha$ von der Grösse Null anfangen oder den Bogen ab vom Nullpunkt

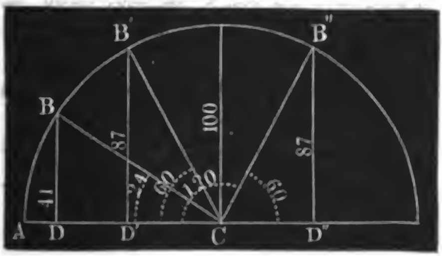
a ausgehen und über f nach a' hin oder über 90° nach 180° hin wachsen, so ergiebt sich:

Fig. 25.



1) Der Einheitssinus (od. Sinus kurzhin) von 0° ist = 0; von 30° = 0,5; von 45° = 0,707; von 60° = 0,866; von 90° = Mf = 1; sowie *sin.* $\gamma = b'c' =$ *sin.* α'. Die Sinusgrössen liegen also alle zwischen 0 und 1. Dem grössern Winkel gehört im ersten Quadranten ein grösserer Sinus zu. Im zweiten Quadranten, oder bei stumpfen Winkeln ist's umgekehrt. Und der Sinus eines stumpfen Winkels (γ) ist mit dem Sinus seines Nebenwinkels (α') ganz einerlei. Ist z. B. $\alpha' = 60°$, also $\gamma = 120°$, so hat man *sin.* 120° =

Fig. 26.



(180 — 120) = *sin.* 60° = 0,866 oder 0,87. — Wenn (Fig. 26) *sin.* $CA = 100$, ist $sin_{100} < ACB = sin_{100}$ 24° = BD = 41; $sin_{100} < ACB' = sin_{100}$ 60° = BD' = 87; $sin_{100} < ACB'' = sin_{100}$ 120° = 87; oder *sin.* 24° = 0,41; *sin.* 60° = *sin.* 120° = 87.

2) Der **Cosinus**, Fig. 25, von 0° ist = Ma = 1; *cos.* 30° = *sin.* (90—30) = *sin.* 60 = 0,866; *cos.* 45° = *sin.* (90—45) = *sin.* 45° = 0,707; *cos.* 60° = *sin.* 30 = 0,5; *cos.* 90° = 0; und wenn der Bogen af in den zweiten Quadranten hinüber wächst, der durch den Nullpunkt M gegangene Cosinus also in entgegengesetzter, „negativer" Lage, z. B. als $cos.\ \gamma = Mc' = - Mc = - cos.\ \alpha$, zum Vorschein kommt: *cos.* 120° = — *cos.* (180—120) = — *cos.* 60° = — 0,5; *cos.* 135° = — *cos.* (180—135) = — *cos.* 45 = — 0,707.

Die Cosinusgrössen liegen also ebenfalls alle zwischen 0 und 1. Im Gebiete der Grundwinkel oder im 1. Quadranten gehört zum grösseren Winkel stets ein kleinerer Cosinus. Im 2. Quadranten ist das umgekehrt; aber die Cosinuse stumpfer sind negativ, obwohl an Zahlengrösse ihrem Nebenwinkel gleich. — So ist (Fig. 26 auf voriger Seite) CD der 100fache Cosinus von $< ACB$ oder 24° = 91, oder cos_1 24° = 0,91; $CD' = cos_{100}$ 60° = 50, cos_1 60° = 0,50; $CD'' = cos_{100}$ 120° = — 50; cos_1 120° = — 0,50.

3) Die **Tangente** ad von 0° ist = 0; *tg.* 30° = 0,577; *tg.* 45° = 1; *tg.* 60° = 1,732; *tg.* 89° 50′ = 343,8; *tg.* 90° unendlich gross.

Die Zahlen der Tangente durchlaufen also von 0 an das ganze Zahlengebiet. Dem grösseren Winkel gehört im 1. Quadranten eine grössere Tangente. Und aus den ähnlichen Dreiecken Mcb und Mad folgt $tang.\ \alpha = \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha}$, wonach in Ermangelung einer Tangententafel durch Division des *cos.* in den *sin.* jede Tangente gefunden werden kann.

4) Die **Cotangente** fg ist, wie aus den ähnlichen Dreiecken

Mad und *Mfg* folgt, $= \frac{Ma}{ad} = 1$ dividirt durch die *tang.*, also $cotg.\ \alpha = \frac{1}{tg.\ \alpha}$ oder $tg.\ \alpha\ cotg.\ \alpha = 1$ und $tg.\ \alpha = \frac{1}{cotg.\ \alpha}$, so dass man aus der Tangente ganz leicht durch Division in 1 die entsprechende Cotangente finden kann und umgekehrt.

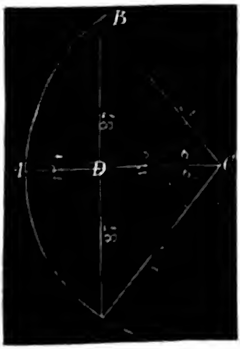
5) Die Secante von 0° ist $= 1$; $sec.\ 30^\circ = 1{,}15$; $sec.\ 60^\circ = 2{,}00$; $sec.\ 90^\circ$ unendlich. Die Secante wächst demnach mit ihrem Winkel von Null bis ins Unendliche; und aus den ähnlichen Dreiecken *Mcb* und *Mad* folgt $sec.\ \alpha = \frac{1}{cos.\ \alpha}$, woraus zu sehen, wie also jede Secante durch den *cos.* gefunden und ersetzt werden kann.

6) Für die Cosecante *Mg* aber hat man auf ähnliche Weise $cosec.\ \alpha = \frac{1}{sin.\ \alpha}$.

7) Endlich ist nochmals darauf aufmerksam zu machen, dass *ab* die Sehne oder Chorde $= ch_1\ \alpha$ und dass ihre Hälfte *bh* der Sinus des halben $< \alpha$ ist, und dass man sonach allgemein

$sin.\ {}^1\!/_2\ \alpha = {}^1\!/_2\ ch.\ \alpha$
also auch $sin.\ \alpha = {}^1\!/_2\ ch.\ 2\ \alpha$ } oder statt *sin.* α setzen kann: die halbe Sehne des doppelten Winkels.

Fig. 27.



So ist z. B. Fig. 27: $ch_{100}\ 120^\circ = 174$; $ch.\ 120^\circ = 1{,}74$, $sin_{100}\ 60^\circ = 87$; $sin.\ 60^\circ = 0{,}87$; oder $ch.\ 120^\circ = 2\ sin.\ 60^\circ$; $sin.\ 60^\circ = {}^1\!/_2\ ch.\ 120^\circ$.

§. 100. Die Chordentafel.

1) Auf der linken Hälfte der Vorderseite des Messknechts gewahrt man zur Rechten der mit 100 überschriebenen Hauptskala eine mit **Ch.** überzeichnete Eingangsspalte, in welche die Win-

kelgrade so eingetragen sind, dass die Hauptskala die zugehörigen Chordengrössen giebt, und zwar die 100fachen, wenn wir die Zahlen dieser Hauptskala als Ganze ansehen; die einfachen aber, dafern wir sie als Hundertel betrachten. Die Ch.-Spalte ist also die Eingangstabelle der Chordentafel. Um die Ablesung bis auf das einzelne Tausendtel zu ermöglichen, ist die Hauptskala in deutlicher Andeutung an dieser Eingangsspalte wiederholt worden; so dass man z. B. ohne Umständlichkeit abliest:

ch_{100} von $8^0 = 13{,}9$ oder $ch.\ 8^0 = 0{,}139$,
ch_{100} von $33{,}4^0 = 57{,}4$ oder $ch.33,\ 4^0 = 0{,}574$,
ch_{100} von $71{,}6^0 = 117$ oder $ch\ 71,\ 6^0 = 1{,}17$,
ch_{100} von $115{,}2^0 = 168{,}8$ oder $ch\ 115,\ 2^0 = 1{,}688$.

2) Um also aus der Hauptskala die natürliche Chorde abzulesen, braucht man nur von den Ganzen dieser Skala zwei Ziffern als Decimalen abzuschneiden und, im Falle der ferneren Ablesung, die Zehntel und Hundertel derselben als weitere Decimalen anzuhängen. Des Messknechts Chordentafel hat aber vor allen anderen bisher gebräuchlichen den für den praktischen Gebrauch sehr beachtenswerthen Vorzug, dass sie alle Interpolationsrechnung erspart und für jedes Zehntelgrad sogleich die Chorde bis auf das einzelne Tausendtel ablesen lässt.

3) Sollte für Jemandes Auge der Anfang der *Ch.*-Spalte zu fein sein, so lässt sich derselbe dadurch ganz vermeiden, dass man zum doppelten oder drei- oder mehrfachen Winkel die Chorde sucht, indem innerhalb der ersten zehn Grade, und für die Ablesung bis zum Tausendtheilchen, die Chorden den Winkeln proportional sind. Diese Proportionalität ist selbst innerhalb der ersten 20 Grade anzunehmen, dafern man die

Einheits-Chorde nur bis zu zwei Decimalen richtig braucht. Statt *ch.* 1,5° entnehme man für diesen Fall *ch.* 15° und schneide 1 Decimale mehr ab. Denn es ist *ch.* 1,5° genau genommen = 0,0262; und *ch.* 15° = 0,261 und, wenn man gleich eine Decimale mehr abschnitt, *ch.* 1,5° = 0,0261.

4) Je weiter die Winkel in den 2. Quadranten gehen, desto weniger veränderlich — desto unempfindlicher — werden die Chorden. Die Rechnung mit Sehnen von Winkeln über 110° muss man demnach zu vermeiden suchen, wenn man zuverlässige Resultate wünscht. Darum geht die Tafel auch nicht viel über diese Grenze hinaus

5) Dass ein Winkel, der über 180° hinausgeht, dieselbe Chorde hat, als der, der ihn zu 360° ergänzt, also *ch.* 207° = *ch.* (360 — 207) = *ch.* 153°, und dass man diesem Satze gemäss die Chorden solcher — überstumpfer — Winkel aufzusuchen hat dürfte wohl zu erwähnen kaum nöthig sein. Ebenso: dass man auch alle Chorden von 0 bis 180° aus dem Messknechte dadurch ablesen kann, dass man die Sinuse, die zu den Hälften dieser Winkel gehören, aufsucht und duplirt.

1. Beispiel. Die natürliche Chorde von 37,5°? — Der Strich 37,5 der *Ch.*-Spalte zeigt auf 64,3, (genauer 64,25) also ist *ch.* 37,5° = 0,643.

2 Beispiel. Die natürliche Chorde von 317,4°? — Da dieser Winkel 180° übersteigt, nimmt man seine Ergänzung zum Vollkreise, = 360 - 317,4 = 42,6°, und durch einfache Ablesung *ch.* 42,6° = 0,727.

3 Beispiel. Die Schenkel eines stumpfen Winkel waren 25 Ruthen lang, die Chorde 22; wie gross der Winkel?

$$ch_{25}\ \alpha = 22;\ ch_1\ \alpha = \frac{22}{25} = 0{,}88,\ \text{oder}\ ch_{100}\alpha$$
$$= 88.$$ Und zu 88 der Hauptskala zeigt die *Ch.*-Spalte das Gradmaass 52,2°.

4. Beispiel. Als man auf den Schenkeln eines über-

stumpfen Winkels 15 Ruthen abmass, ergab sich die Sehne zu 17,2 Ruthen; wie gross der Winkel?

$ch_1 \alpha = \frac{17,2}{15} = 1,147$, so dass in der Hauptskala

114,7 zu suchen, dazu die *Ch.*-Spalte 69,9° zeigt, wonach also der überstumpfe Winkel = 360 − 69,9 = 290,1 Grad hätte.

§. 101. Die Sinustafel.

a. Mittels der Sehnentabelle *Ch.* (wobei der Sinus genau bis aufs einzelne Tausendtel gefunden oder gegeben werden kann).

Bekanntlich ist der *sin.* α die Hälfte der Chorde von 2 α; d. h. 1) Willst du den Sinus eines Winkels α haben, so suche die Chorde von 2 α und halbire sie. 2) Willst du zu einem gegebenen Sinus den zugehörigen Winkel suchen, so betrachte sein Doppeltes als Sehne und nimm von dem ihr zuständigen Winkel die Hälfte. — Die Wirkung des Knechtes reicht bei dieser Methode jedoch nur bis $\frac{120}{2} = 60$ Grad.

1. Beispiel Den Sinus von $17\frac{1}{4}°$ anzugeben?
Es ist *Ch.* $34\frac{1}{2}°$ in Tausendteln = 593; davon die Hälfte, gleich als Decimalbruch geschrieben, macht *sin.* $17\frac{1}{4}° = 0,296$.

2. Beispiel. Den *sin.* 125,4° zu suchen. — Dieser ist = dem *sin.* des Nebenwinkels = *sin.* 54,6 = $\frac{1}{2}$ *Ch.* 109,2 = $\frac{1}{2} \times 1,630 = 0,815$.

3. Beispiel. Wie gross ist der Winkel, dessen Sinus = 0,793 ist? $sin x = 0,793$; $ch 2x = 2 \sin x = 1,586$ oder $ch_{100}\ 2x = 158,6$; folglich, da 158,6 in der Hauptskala aufgesucht in der *Ch.*-Spalte das Gradmaass $2x = 105,0°$ giebt, $x = 52,5°$.

§. 102. Die Sinustafel. (Fortsetzung.)

b. Mittels der Sinusskala der linken Ecke, welche für die nebenher laufenden Grade der Winkelskala

die Sinusgrössen wiederum im Procentsatze oder in Hunderteln (oder, als Ganze abgelesen, den hundertfachen Sinus) in selbstverständlicher Weise finden lehrt. Und eben so leicht, umgekehrt: den einem gegebenen Sinus zugehörigen Winkel.

1. Beispiel. Gieb den Sinus von $17\frac{1}{4}°$ an! — In der Grad-Skala der linken Unterecke $17\frac{1}{4}$ aufgesucht, zeigt bei der *SIN.*-Skala auf knapp 30, d. h. *sin.* $17\frac{1}{4} = 0{,}30$ fast. (Vergl. 1. Beisp. des vorigen Paragraphen.)

2. Beispiel. *Sin.* 125,4°? Oder, was gleich ist, *sin.* 54,6°? — In der Gradskala reichlich $54\frac{1}{2}°$ genommen, korrespondirt mit $81\frac{1}{2}$ der *SIN.*-Skala; also ist *sin.* $54{,}6 = 0{,}815$. (S. 2. Beisp. des vorigen Paragraphen.)

3. Beispiel. Den Winkel x zu suchen, dessen Sinus $= 0{,}714$ ist? — Der Pendelfaden auf $71\frac{4}{10}$ der *SIN.*-Skala gelegt, zeigt an Gradmaass ziemlich deutlich 45,6°.

Zusatz. Bei Winkeln über 45° thut man besser, mit dem Complementswinkel und der *COS.*-Spalte zu arbeiten.

§. 103. Die Cosinustafel.

a. Vermöge der *COS.*-Spalte der rechten Ecke,

welche die Cosinuszahlen nach Hunderteln enthält, wobei sie auch bis zu Tausendtheilchen eingeschätzt werden können, und deren Anlage selbstverständlich die Regeln giebt:

1) Um den Cosinus eines gegebenen Winkels zu finden: Suche in der Grad-Skala das Gradmaass und nimm aus der *COS.*-Skala den beistehenden Cosinus.

2) Um den Winkel eines gegebenen Cosinus zu finden: Suche in der *COS.*-Skala die Hundertel des Cosinus und nimm aus der Grad-Skala das beistehende Gradmaass.

1. Beispiel. *Cos.* $9\frac{1}{2}°$? — Der Pendelfaden, mitten zwischen 9 und 10° gelegt, zeigt in der *COS*-Skala reichlich $98\frac{1}{2}$, d. h. *cos.* $9\frac{1}{2}° = 0{,}987$.

2. Beispiel. *Cos.* $87\frac{1}{4}°$? Das Pendel auf $87\frac{1}{4}$ gelegt, zeigt in der Cosinusskala knapp 5, also *cos.* $87\frac{1}{4} = 0{,}049$ oder 0,048. (Die genaue Tafel: 0,048.)

3. Beispiel. Der Cosinus eines $< \alpha$ soll $= 0{,}65$ sein; wie gross ist dieser Winkel? Das Pendel auf 65 der *COS.*-Skala gestellt, zeigt $\alpha = 49{,}5°$.

§. 104. Die Cosinustafel (Fortsetzung.)

b. Indirekt mittels der Sehnentafel. Wenn der Winkel über 50° geht und der Cosinus genauer als bis aufs Hunderttheilchen verlangt wird, thut man wohl, sich zu erinnern, dass $cos.\ \alpha = sin.\ (90 - \alpha) = \frac{1}{2}\ ch.\ (180 - 2\,\alpha)$, also hier die Regel anzuwenden ist:

3) Um *cos.* α zu finden, ziehe $2\,\alpha$ von 180° ab, und suche zum Reste die halbe Sehne.

4) Um α zu finden, wenn dessen Cosinus gegeben, nimm letzteren doppelt, suche dazu als Sehne das zugehörige Gradmaass, und ziehe dessen Hälfte von 90 ab.

4. Beispiel. Um *cos.* $79\frac{1}{2}°$ zu finden, hat man also $79\frac{1}{2} \times 2 = 159$ und $180 - 159 = 21°$; dazu die Sehne laut *Ch.*-Spalte $= 0{,}364$, deren Hälfte $= 0{,}182 = cos.\ 79\frac{1}{2}°$.

5. Beispiel. *Cos.* $87\frac{1}{4}°$? — Es ist $180 - 174\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}°$; dazu ist die halbe natürliche Chorde sofort $\frac{0{,}096}{2} = 0{,}048$. (Vergl. Beispiel 2.)

6. Beispiel. Wie gross der Winkel, dessen *cos.* $= 0{,}65$ ist? Zu $65{,}2 = 130$ als Sehne gehört laut *Ch.*-Spalte das Gradmaass 80,9 dessen Hälfte $= 40{,}5°$ von 90° abgezogen 49,5° giebt.

§. 105. Die Tangententafel.

Vermöge der *TAN.*-Spalte der rechten Ecke, welche die Tangenten, dem Gradmaasse der Grad-Skala entsprechend, ebenfalls in Hunderteln angiebt.

Deutlich genug reicht sie indess nur bis zum 60. Grade. Die Tangenten höherer Grade kommen zwar selten in An-

wendung; würde aber dennoch eine solche genauer verlangt, so erinnere man sich, dass $tg.\,\alpha = \frac{1}{cotg.\;\alpha} = \frac{1}{tg.(90-\alpha)}$, dass man also dann die Tangente des Complementswinkels suchen und in 1 dividiren oder zu ihr nach Kap. 2 die Reciproke aufsuchen muss.

1) Regel für genauere Aufsuchung einer Tangente: Bei Winkeln unter 60° lies die Tangente einfach aus der *TAN.*-Skala ab; bei Winkeln über 60° nimm die Tangente des Complementswinkels und dividire sie in 1 (Kap. 2) oder setze sie als Nenner eines Stammbruchs.

2) Regel für Aufsuchung eines Gradmaasses. Soweit die *TAN.*-Skala zureicht, benutze diese. Uebersteigt die Tangente aber den zuverlässigen Theil dieser Skala, so dividire sie in 1, und suche zu der so erhaltenen Tangente (des Complementswinkels) das Gradmaass; das, von 90 abgezogen, den gesuchten Winkel gibt.

1. Beispiel. Suche die $tg.\ 15^1/_4{}^0$! — Das Pendel auf $15^1/_4{}^0$ gelegt, zeigt in der *Tg.*-Skala reichlich 27, also $tg.\ 15^1/_4 = 0{,}27$ oder schärfer 0,272.

2. Beispiel. Suche die $tg.\ 81^3/_4{}^0$! — Ist $= cotg.\ 8^1/_4$ $= \frac{1}{tg.\,8^1/_4{}^0}$. Zu $8^1/_4{}^0$ gehört aber die Tangente $14^1/_2$ (Hundertel); also $tg.\ 81^3/_4{}^0 = \frac{1}{0{,}145}$ oder $= 6{,}8$.

Zusatz. Auch durch unmittelbare Ablesung als $\frac{680 \text{ bis } 690}{100}$ $= 6{,}8$ bis $6{,}9$.

3. Beispiel. Die Tangente eines Winkels ist $= 0{,}98$; wie gross sonach der Winkel selbst? — Der Strich 98 der *Tg.*-Skala gelegt, zeigt unverkennbar knapp 44,5°, also etwas genauer: 44,4°.

4. Beispiel. Die Tangente eines Winkels soll $= 4$ sein; wie gross der zugehörige Winkel x? — Da $tg.\ x = 4$, so ist die Tangente des Complementswinkels $= {}^1/_4 =$

0,25; zu welcher deutlich der $< 14^0$ gehört, so dass das gesuchte $x = 90 - 14 = 76^0$.

Kürzer und gröber auch so: $tg_{100}\ x = 400$; und 400 in der *TAN.*-Skala aufgesucht, zeigt auch 76^0.

§. 106. **Die Cotangente**

kommt bekanntlich in trigonometrischen Formeln und Rechnungen nur ausnahmsweise vor, indem sie sich immer ganz leicht durch die Tangente ersetzen lässt.

Statt *cotg* 67^0 setzen wir mit Vortheil *tg.* 23^0; und statt *cot.* 17^0 desgleichen $\frac{1}{tg.\ 17^0}$ oder auch $tg.\ (90 - 17) = tg.\ 73^0$.

Ist indess die Grösse einer Cotangente zu wissen wirklich verlangt, oder zur Bestimmung eines Winkels in Zahlen gegeben, so wird man nach Vorstehendem die Aufgabe mittels der Tangententafel leicht lösen.

1. **Beispiel.** Welche Grösse hat die Cotang. $21^3/_4{}^0$? —

$$cotg.\ 21^3/_4 = \frac{1}{tg.\ 21^3/_4{}^0} = \frac{1}{0{,}40} = 2{,}5.$$

2. **Beispiel.** Welches Gradmaass hat der $< x$, dessen $cotg. = 3$ ist? — Da $tg.\ x = \frac{1}{cot.\ x} = {}^1/_3 = 0{,}33\,{}^1/_3$, so folgt, wenn der Pendelfaden nach $33\,{}^1/_3$ gelegt wird, $x = 18{,}4^0$.

§. 107. **Die Secantentafel.**

Vermöge der *SEC.*-Spalte der linken Ecke. Die Secantengrösse ist immer $= \frac{1}{cosinus}$ oder die Reciproke des Cosinus, und kann sonach auch mittels der *COS.*-Spalte gefunden werden. Letzteres ist aber nur dann von Vortheil, wenn die Secante als Divisor vorkommt, indem $\frac{1}{sec.\ \alpha} = cos.\ \alpha$ ist.

Die *SEC.*-Spalte gestattet aber die unmittelbare Ablesung der Secantengrössen der Winkel von 0 bis 90^0. Ihre Zahlen bedeuten Ganze, wenn man die Hundertfache, und Hundertel, wenn man die natürliche Secante sucht.

1. **Beispiel.** Gieb die Secante von $44{,}4^0$ an? — Der

Pendelfaden auf knapp $44\frac{1}{2}^0$ gestellt, zeigt 140, oder $sec_1\ 44{,}4^0 = 1{,}40$.

2. **Beispiel.** Gieb den $< x$ an, dessen Secante $2\frac{1}{2}$ ist? — Die hundertfache Secante dieses $< = 250$, in der *SEC.*-Spalte aufgesucht, zeigt auf $66{,}4^0$.

Zusatz. Wäre ausnahmsweise einmal eine sehr genaue Secante verlangt, so kann die *Ch.*-Spalte aushelfen,

da $sec.\ \alpha = \frac{1}{cos.\ \alpha} = \frac{1}{sin.\ (90 - \alpha)} = \frac{2}{ch.(180 - 2\alpha)}$;

oder auch

$$cosec.\ \alpha = \frac{1}{sin.\ \alpha} = \frac{2}{ch.\ 2\ \alpha} \text{ und } ch.\ 2\ \alpha = \frac{2}{cosec.\ \alpha}.$$

§. 108. **Die Cosecante.**

a. **Vermöge des Sinus.**

Da $cosec.\ \alpha = \frac{1}{sin.\ \alpha}$ und $sin.\ \alpha = \frac{1}{cosec.\ \alpha}$, so folgt, dass die Cosecante durch die Sinus- und durch die Chordentafel ganz in ähnlicher Weise wie die Cotangente durch die Tangententafel ihre Erledigung findet; wie sie denn auch deshalb in den Rechnungen fast nie vorkommt, sondern immer durch den Sinus ersetzt ist.

1. **Beispiel.** Die Cosec. 70^0 anzugeben? — Ist $= \frac{1}{sin.\ 70^0}$ $= 100 : 94 = 1{,}06$.

2. **Beispiel.** Welche Grösse müsste der $< x$ haben, dessen Cosecante 5mal so gross als der Halbmesser (also $= 5$) wäre?

$cosec.\ x = 5$ oder $sin.\ x = \frac{1}{cosec.\ x} = \frac{1}{5} = 0{,}20$ und zu $sin_{100}\ x = 20$ sagt die $<$-Spalte $x = 11{,}6^0$.

b. **Vermöge der Secante.**

Da die Cosecante eines Winkels etwas Anderes nicht ist, als die Secante seines Complementswinkels, so kommt man eben so leicht zum Ziel, statt des Winkels seine Ergänzung zu 90^0 und dazu die Secante zu suchen. Und, wenn eine Co-

secante gegeben und ihr Winkel gesucht, sie vorerst als Secante zu betrachten und den ihr entsprechenden Winkel von 90° abzuziehen.

3. Beispiel. Die Cosecante 63°? Ist = *sec.* 27°, also nach der *SEC.*-Spalte = 112,2 Hundertel = 1,122.

4. Beispiel. Wenn *cosec.* $\alpha = 1{,}24$, wie gross dann α? Zur *sec.* = 1,24 oder zu 124 der *SEC.*-Spalte gehört der < 36,3° also ist $\alpha = 53{,}7°$.

Anhang zum 6. Kapitel.

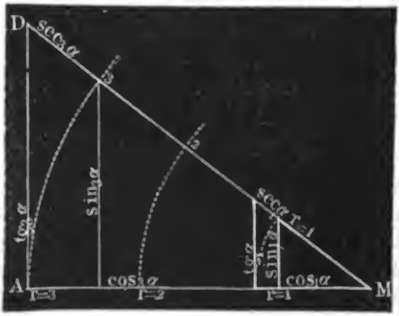
Mittels des Messknechts allein, ohne Winkelmesser und trigonometrische Tafeln, gelöste Beispiele aus der praktischen Trigonometrie.

§. 109. Rechtwinklige Trigonometrie.

Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreiecks müssen bekanntlich zwei bestimmende Stücke gegeben sein. Diese bilden mit dem zunächst gesuchten die drei Elemente der Aufgabe, unter denen immer zwei Seiten sind. Die ganze Praxis der rechtwinkligen Trigonometrie reducirt sich immer auf folgende einfache Regel: Betrachte eine der beiden Seiten als Kreisradius (r) und schreibe den trigonometrischen Werth der anderen (nach Seite 109) in Form einer Gleichung hin.

1. Beispiel. Welche Winkelsteilheit x hat die Strasse über den St. Gotthard, welche durchgängig in einer Steigung von 5 auf 100 angelegt ist?

Fig. 28.



Auflösung. Ist unter 100 die Horizontaldistanz (die Basis *MA* des

rechtwinklig zu denkenden Dreiecks) gemeint, so ist $5 =$ AD die Tangente, also $tg_{100}\, x = 5$, oder $100\; tg. x = 5$, oder $tg.\; x = \frac{5}{100}$. Der Pendelfaden, auf 5 (Hundertel) der *TAN.*-Skala gelegt, zeigt $x = 2{,}9$ Grad.

2. **Beispiel.** Die Mechanik berichtet uns, dass bei mittelgutem Fuhrwerke und mittelguter Landstrasse der Reibungswiderstand des Fuhrwerkes circa $^1/_{20}$ der Last beträgt, also beim Fortzuge eines 20 Centner schweren Wagens ein Pferd auf horizontaler Strasse eine Zugkraft von 1 Centner auszuüben hat, während bei Steigungen (ganz nahe) noch ein der Tangente des Steigungswinkels α und der Last Q proportionirter Widerstand $Q\; tang.\; \alpha$ dazu kommt. Man soll angeben: 1) welche Zugkraft jenes Pferd anzuwenden hat, wenn es die besprochene Last von 20 Centner die Gotthardstrasse (s. vor. Beisp.) hinanziehen soll, und 2) welche Last man überhaupt auf solcher Strasse auf 1 Pferd rechnen darf, wenn es, wie bei Anlage dieser Strasse beabsichtigt war, immer im kurzen Trabe soll gehen können, wobei seine Zugkraft zu $^3/_4$ Centner anzunehmen wäre?

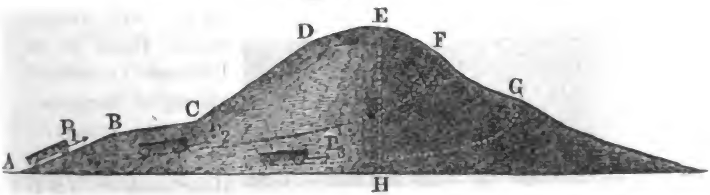
Ad 1. Zu dem Widerstande $\frac{Q}{20} = \frac{20}{20}$ Ctr. $= 1$ Ctr., kommt nach $Q\; tg.\, \alpha = 20\; tg.\, 2{,}9^0 = 20 \times 0{,}05 = 1$ Ctr. Zusammen also 2 Ctr. oder die doppelte Kraft.

Ad 2. Für die zu ziehende Last Q hat man

$$Q\,(^1/_{20} + tg.\; \alpha) = {^3/_4}\text{ Ctr.}$$
$$Q\,(^1/_{20} + {^1/_2}) = {^1/_{10}}\; Q = {^3/_4}\text{ Ctr.}$$

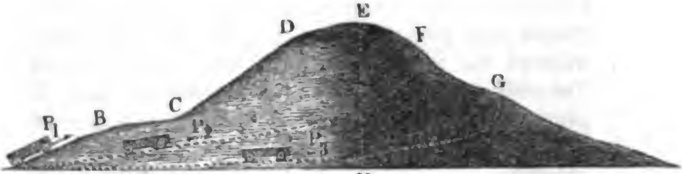
woraus $Q = 7^1/_2$ Ctr. Fracht per Pferd.

Fig. 29.



3. Beispiel. Ein Landwirth hatte, um zwei verschieden gebaute Wagen hinsichts ihres Ganges oder Reibungswiderstandes zu vergleichen, beide auf eine verschiedentlich ansteigende Strasse *BCD* gebracht, daselbst die Stellen aufgesucht, bei denen jeder der beiden Wagen von selbst zu rollen anfing, und gleich mittels des Messknechts und *TAN.* - Skala das Steigungsprocent (die Tangente des Reibungswinkels)

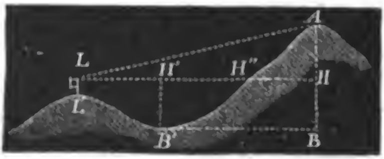
Fig. 30.



abgelesen, das bekanntlich gleich als Reibungskoëfficient gelten kann. Wenn nun das Pendel, als der eine Wagen zu rollen anfing, einen Elevationswinkel von $3\frac{1}{2}$ Grad oder eine Tangente = 0,06 (d. h. 6 Procent Steigung) und beim anderen knapp $2\frac{1}{2}$ Grad oder $tg. = 0{,}04$ zeigt, so folgt, dass der erste Wagen einen Widerstand macht von 6 Proc. oder circa $\frac{1}{17}$ der Last, der andere dagegen nur von 4 Proc. oder $\frac{1}{25}$ der Last; so dass 1 Pferd von 1 Ctr. Zugkraft mit jenem nur 17 Ctr., mit diesen aber 25 Ctr. auf horizontaler Strasse fortziehen kann.

4. Beispiel. Ein rüstiger Bergsteiger, der den Messknecht bei sich hatte und damit beobachtete, dass er durchschnittlich in einem Winkel von 12° und mit einer Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Fuss (in der Sekunde) steige, will wissen, welche Höhe er in 1 Stunde (= 3600″) stetigen Steigens unter sich bringt?

Fig. 31.



Wenn *BA* diese Höhe und $< AB'B$

den Steigungswinkel 12° vorstellt, so ist zwischen *B' A*, *BA* und < *B'* anzusehen: *B'A* als Radius, *BA* als Sinus; also $AB = AB' \sin_1 B' =$ Weg $\times$ *sin.* 12°, und wenn man *sin.* 12° mittels der *SIN.*-Skala sucht und daselbst 21 Hundertel findet: $AB = 3600 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 0{,}21 = 1890$ Fuss.

Bei 12 Grad Steigwinkel würde auch das Pendel bei *C* oder bei *Q*, Fig. 32, in der *TAN.*-Skala gleich das

Fig. 32.



Steigungsprocent oder die Tangente zu 21 (Hunderteln) angezeigt haben.

5. Beispiel. Um den Messknecht als ungefähren Distanzmesser zu benutzen, hatte man von einem Baume, dessen ganze Höhe man mit ziemlicher, durch vielfache Erfahrungen begründeter Sicherheit zu 80 Fuss zu schätzen vermochte, mit dem Knechte von *C* aus die Elevation des Scheitels *B* und des Fusses *A* beobachtet, jene zu 25¼°, diese zu 10¾°. Wie gross ergäbe der Knecht hiernach die Entfernung $CD = x$ vom Baume?

Fig. 33.



Die Höhe 80 Fuss ist $= DB - DA = x\ tg.\ 25\frac{1}{4} - x\ tg.\ 10\frac{3}{4} = x\ (tg.\ 25\frac{1}{4} - tg.\ 10\frac{3}{4})$, woraus $x = \frac{80}{tg.\ 25\frac{1}{4} - tg.\ 10\frac{3}{4}}$, woraus, da der Knecht auch gleich die Tangente angiebt, die kürzere Re-

gel folgt: Lies nicht die Winkel ab, sondern die Tangenten, und dividire mit deren Differenz in die bekannte Höhe des anvisirten Gegenstandes.

In Zahlen: $x = \frac{80}{0{,}472 - 0{,}190} = \frac{80}{0{,}282} = 8000 : 282$ $= 283$ Fuss.

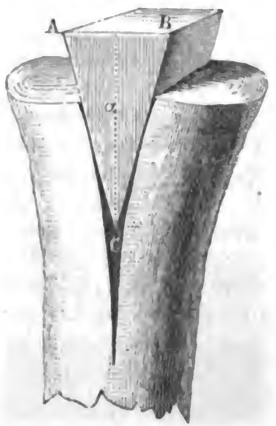
6. Beispiel. Und wenn man die schiefe Distanz CA wissen wollte? — Betrachte CA als Radius, dann ist CD der CA-fache *Cosin.* von $10^3/_4{}^0$; also

$$\frac{CA \,.\, cos.\ 10^3/_4{}^0 = CD}{CA = \frac{CD}{cos.\ 10^3/_4} = \frac{283}{0{,}982} = 288^1/_2 \text{ Fuss.}}$$

Oder $CA = CD \times sec.\ 10^3/_4{}^0 = 283 \times 1{,}02 = 288{,}6$ Fuss. Genauer $283 \times 1{,}017 = 287{,}8$.

7. Beispiel. Die Wirkungen zweier Keile vergleichen sich umgekehrt wie die Sinuse ihrer Schärfen oder Keilwinkel. (D. h. wenn die Schärfe des einen Keiles den Sinus 0,03 und die des anderen den Sinus 0,06, oder den doppelten hat, so verhält sich die Spaltkraft des ersteren zu der des zweiten wie 0,06 : 0,03 = 2 : 1.)

Fig. 34.



Man wünscht deshalb die Schärfe des beistehenden Keiles zu wissen, dessen Seite CA 12 Zoll und Rücken AB 3 Zoll lang ist.

Wird die Seite CA als Radius gedacht, ist AB dann die Chorde, d. h. $AC\, ch_1\, \alpha = AB$ oder $ch_1\, \alpha = \frac{AB}{AC} = {}^1/_4 = 0{,}25$ oder $ch_{100}\, \alpha = 25$ und darauf antwortet des Knechtes Chordentafel: $\alpha =$ reichlich $14^1/_2{}^0$.

§. 110. Fortsetzung der Beispiele über die praktische Trigonometrie des Knechtes.

Figur 35 u. s. w. stellen in einigen charakteristischen Bildern die Gesetze der Berg- oder sogenannten Situationszeichnung vor.

Der Grundriss (»Plan«) Fig. 37 mit seinen Horizontalkurven (»Zwischenhorizontalen, die man sich als wagerecht am Hange hingehende Wege, streng genommen in gleichen lothrechten Höhen über einander, vorstellen kann) lässt zwar wohl erkennen, dass der Plan *MROQ* keinem horizontalen Flurstücke, sondern einem Berge zugehört, der in *N* seinen Gipfel und bei *E* einen muldenförmigen Einhang (sanfte Schlucht) und in der Rich-

Fig. 35.

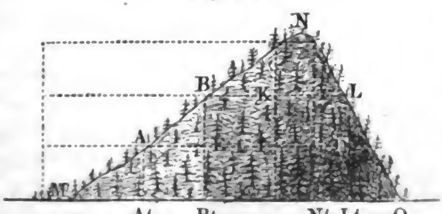


Fig. 63.

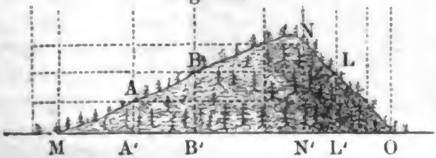


Fig. 37.

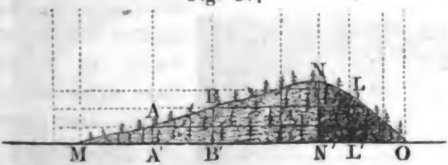
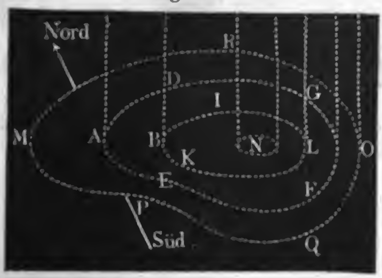


Fig. 38.



tung von NO und NG seine steilste, in der von NM seine sanfteste Abdachung hat; ingleichen, dass die Felder bei I einen nördlichen, bei G aber einen östlichen Abhang haben u. s. w. Trotzdem aber könnte man sich den Berg in allen Steilheiten über diesem Grundrisse denken, wie Fig. 37, 36, 35 zeigen, wenn man aus demselben nicht zugleich die Grösse der Böschungswinkel ersehen kann, wozu es indess nur der Einzeichnung einiger Winkel bedarf.

Fig. 39.

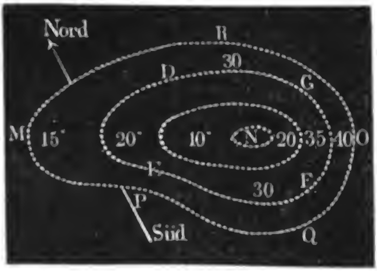


Fig. 40.

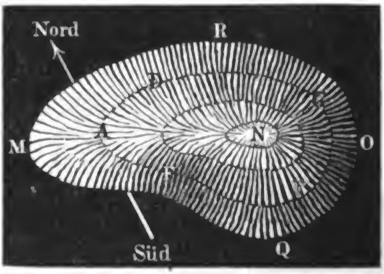


Fig. 39 zeigt dies; und man sieht leicht, dass die eingeschriebenen Böschungen der Bergform Fig. 35 entsprechen. Noch anschaulicher thut das aber Fig. 40, die nach dem Systeme der Lehmann'schen Bergschraffirung den Grundriss dieser Bergform liefert, aus dem man die Böschungswinkel von 5 zu 5 Grad muss sicher herauslesen können, wenn die Schraffirung richtig ist. In diesem Falle soll nämlich die Breite eines Strichs und des benachbarten Zwischenraumes zunächst immer dieselbe Grösse haben, die der Modul der Schraffirung genannt werden kann. Diesen Modul in 9 Theile zerlegt, muss sein:

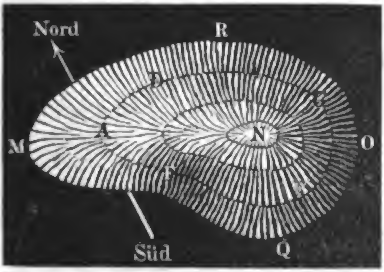
			die Stärke des Strichs		das Verhältniss des Strichs zum Zwischenraum
bei	5°	Bösch.	= 1/9	des Modul	wie 1 : 8
»	10°	»	= 2/9	»	wie 2 : 7
»	15°	»	= 3/9	»	wie 3 : 6
»	20°	»	= 4/9	»	wie 4 : 5
»	25°	»	= 5/9	»	wie 5 : 4
»	30°	»	= 6/9	»	wie 6 : 3
»	35°	»	= 7/9	»	wie 7 : 2
»	40°	»	= 8/9	»	wie 8 : 1.

Ueber 40° sind die Hänge selten noch kultivirbar und meist Felsen und werden in der Karte als solche angegeben.

Von den vielen interessanten Ermittelungen, wozu wir diese Figuren und Zahlen in Verbindung mit dem Maassstabe und Messknechte benutzen können, lassen wir nun hier nur einige folgen:

8. Beispiel. Die Grundbreite der Schicht *MA* (Fig. 36) ergiebt sich aus dem Grundrisse Fig. 41 und sei ≐ 30 Ruthen à 12 Fuss (= 360′) und allda ihr Böschungswinkel *α* aus der Schraffirung als 15 Grad erkennbar. Man soll hieraus die Höhe der zweiten (durch *A* gehenden) Horizontale ableiten. — Diese ist *MA′ tg. α* = 360 *tg.* 15°, was nach der *TAN.*-Skala = 360 × 0,27 = 97 Fuss giebt.

Fig. 41



9. Beispiel. In dieser Weise die Höhe des ganzen Berges abzuleiten, wenn aus dem Grundrisse zu entnehmen:

Böschungswinkel des Rückentheils *MA* = 15°; Grundlänge (Horizontalprojektion) = 30 Ruthen.

Böschungswinkel des Rückentheils $AB = 20°$; Grundlänge (Horizontalprojektion) = 20 Ruthen.

Böschungswinkel des Rückentheils $BN = 10°$; Grundlänge (Horizontalprojektion) = 40 Ruthen.

Höhe v. A über $M = 360\ tg.\ 15° = 360 \times 0{,}269 = 97{,}2$ Fuss
» » B » $A = 240\ tg.\ 20° = 240 \times 0{,}364 = 87{,}36$ »
» » N » $B = 480\ tg.\ 10° = 480 \times 0{,}176 = 84{,}48$ »

269,0Fuss.

(Die Rechnung nach einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel gab 268,7.)

10. **Beispiel.** Die ganze Berghöhe lässt sich aber auch aus der Grundlänge des ganzen Rückens und seinem mittleren (Tangenten-) Winkel x finden, indem man schliesst.

Da 3 Theile den $< 15°$, » 2 » » $< 20°$, » 4 » » $< 10°$, so folgt: $tg.\ x = \frac{3\ tg.\ 15 + 2\ tg.\ 20 + 4\ tg.\ 10}{9}$

und wenn man diesen $< x$ in Gradmaass wissen will:

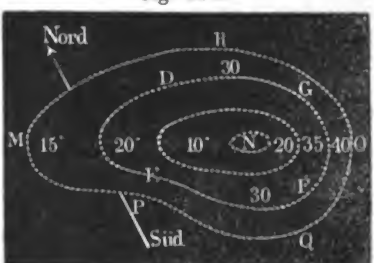
$$tg.\ x = \frac{3 \times 0{,}27 + 2 \times 0{,}36\frac{1}{2} + 4 \times 0{,}17\frac{1}{2}}{9} = 0{,}249$$

und in der *TANG.*-Skala 25 Hundertel aufgesucht, zeigt netto 14 Grad.

Und in der That ist auch $MN\ tg.\ x = 90\ tg.\ 14° =$ 1080′ . 0,249 = 269 Fuss Berghöhe.

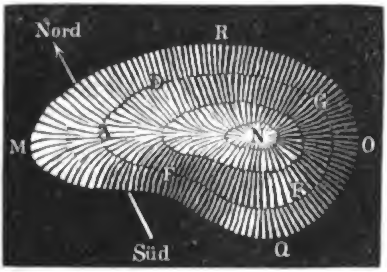
11. **Beispiel.** Die wirkliche, schiefe Länge der Bergabdachung, z. B. von N nach M aus dem Grundrisse Fig. 41 a. oder 41 b. abzuleiten.

Fig. 41 a.



Nimmt man für das Rückenstück MA seinen Grund

Fig. 41 b.



MA' als Radius, so ist MA die Secante des Neigungswinkels M, also die wirkliche, schiefe Länge:

$MA = 30 \; sec. \; 15^\circ = 30 \times 1{,}04 = 31{,}2$

$AB = 20 \; sec. \; 20^\circ = 20 \times 1{,}065 = 21{,}3$

$BN = 40 \; sec. \; 10^\circ = 40 \times 1{,}05 = 40{,}6$

$MN = 30 sec. 15 + 20 sec. 20 + 40 sec. 10 = 93{,}1$ Ruthen.

12. **Beispiel.** Dasselbe Resultat kann auch gleich aus der ganzen Grundlänge $MN' = 90$ Ruthen des Rückens (Fig. 36) und dessen mittleren Secantenwinkel x gefunden werden,

indem $sec. \; x = \dfrac{3 \; sec. \; 15 + 2 \; sec. \; 20 + 4 \; sec. \; 10^\circ}{9}$,

woraus $sec. \; x = 1{,}035$, also nach 103,5 der *SEC.*-Spalte der mittlere Secantenwinkel $x = 15^\circ$, und darum die ganze Rückenlänge auch $= 90 \; sec. \; 15^\circ = 90 \times 1{,}035 = 93{,}15^\circ$.

13. **Beispiel. Des Berges wirkliche Oberfläche aus dem Grundrisse** abzuleiten.

Durch Multiplikation der Grundfläche mit der Secante des Neigungswinkels der Bergfläche, wofür, bei verschiedenen Neigungen, der mittlere Secantenwinkel zu nehmen. Wenn man also aus der Zeichnung des Grundrisses, Fig. 41 b, geschätzt hätte, dass, die Grundfläche G als 100 gedacht,

10	Theile	oder	10%	über	sich	die	Böschung	5°
20	„	„	20%	„	„	„	„	10°
20	„	„	20%	„	„	„	„	15°
30	„	„	30%	„	„	„	„	20°
20	„	„	20%	„	„	„	„	30°

haben, so folgt für den mittleren Reduktionswinkel aus dem Grunde in die Oberfläche, d. i. den mittleren Secantenwinkel x —, $sec. x = 0{,}10\ sec.\ 5^\circ + 0{,}20\ sec.\ 10^\circ + 0{,}20\ sec.\ 15^\circ + 0{,}30\ sec.\ 20^\circ + 0{,}20\ sec.\ 30^\circ$, oder durch Aufsuchung in der *SEC.*-Skala, $sec. x = 0{,}1004 + 0{,}203 + 0{,}207 + 0{,}319 + 0{,}231 = 1{,}0604$ und nach 106 der Secantenskala $x = 19\frac{1}{2}^\circ$; d. h. ein Berg über derselben Grundfläche und mit gleichförmiger Steilheit von $19\frac{1}{2}^\circ$ hat dieselbe Oberfläche wie der gegebene ungleichförmige. Diese Oberfläche O ist aber $O = G\ sec.\ x = 100\ sec.\ 19\frac{1}{2}^\circ = 100 \times 1{,}06 = 106$; oder 6% grösser als die Grundfläche.

14. Beispiel. Das Verhältniss der Oberfläche eines Berges zu seiner Horizontalfläche (seinem Grunde) aus den geschätzten Oberflächen- und Neigungsgrössen abzuleiten.

Mit dem Messknecht in der Hand habe man nach Kapitel 11 auf dem Berge selbst geschätzt:

$\frac{1}{10}$	seiner	Oberfläche	zu	10°	Abdachung
$\frac{3}{10}$	„	„	„	15°	„
$\frac{5}{10}$	„	„	„	20°	„
$\frac{1}{10}$	„	„	„	25°	„

Es ist sonach Grundfläche G nach Kapitel 12

$$= \frac{cos.\ 10^\circ + 3\ cos.\ 15^\circ + 5\ cos.\ 20^\circ + cos.\ 25^\circ}{10} \times O$$

$$G = \frac{0{,}985 + 2{,}898 + 4{,}70 + 0{,}903}{10} \cdot O = 0{,}949\ O$$

oder fast $G = 0{,}95\ O$ oder $O : G = 100 : 95$.

Der mittlere horizontale Reduktionswinkel oder Cosinuswinkel ist sonach, dem $cos. = 0{,}95$ angehörend,

wie *COS.*-Skala zeigt, 18 Grad. Das gemeine (arithmet.) Mittel würde ebenfalls hier gegeben haben:

$$\frac{1 \,.\, 10 + 3 \,.\, 15 + 5 \,.\, 20 + 1 \,.\, 25}{10} = 18^{0}.$$

Zusatz. Ausser den auf Seite 113 bereits vorausgeschickten Beispielen kommen dergleichen hierher gehörige mehrfach noch in den folgenden Kapiteln vor.

Anwendung auf schiefwinklige Trigonometrie.

§. 111. Um hinsichts der Berechnung schiefwinkliger Dreiecke immer gehörig orientirt zu sein, thut man wohl, strenger als vorher zu unterscheiden, welche von den drei bestimmenden Stücken des Dreiecks gegeben sind. Man erhält dadurch 4 verschiedene Fälle; den ersten nämlich, wenn nur eine Seite und 2 Winkel; den zweiten, wenn 2 Seiten und ein Gegenwinkel; den dritten, wenn 2 Seiten und der Zwischenwinkel, und den vierten, wenn sämmtliche 3 Seiten gegeben sind. Gilt es der Berechnung irgend einer Seite oder eines Winkels, so kommen bekanntlich folgende Sätze und Formeln in Anwendung:

Fig. 41.

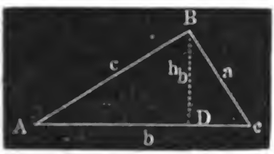
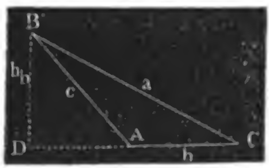


Fig. 42.



Regel 1. Jede 2 Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander wie die Sinuse ihrer Gegenwinkel; oder in Buchstaben: $a : b = sin.\ A : sin.\ B$

oder $a\ sin.\ B = b\ sin.\ A.$

(Dient zur Auflösung der Fälle (1) und (2) und kann auch so ausgedrückt werden: Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Chorden ihrer doppelten Gegenwinkel; $a : b = ch.\ 2\ A : ch.\ 2\ B.$)

Regel 2. Wie sich die Summe zweier Seiten zur Differenz derselben verhält, so verhält sich auch die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tan-

gente von deren halber Differenz; oder in algebraischer Sprache: $(b+a):(b-a)=tg.\,{}^1\!/_2(B+A):tg.\,{}^1\!/_2(B-A)$. (Dient, um den dritten Fall aufzulösen, d. h. aus b, a und C die Winkel B und A und dann auch mittels Satz 1 die fehlende Seite c zu finden.)

Regel 3. In jedem Dreiecke ist immer das Quadrat einer Seite so gross als die Summe der Quadrate der beiden anderen weniger dem doppelten Produkte aus diesen beiden Seiten und dem Cosinuse ihres Zwischenwinkels. Algebraisch: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos.\ C$, oder auch $c^2 = a^2 + b^2 - ab\ .\ chord.\ (180 - 2\ C)$. (Dient zunächst auch zur Auflösung des dritten Falles, indem sie aus den gegebenen Seiten a und b und ihrem Zwischenwinkel C die dritte Seite unmittelbar finden lehrt. Auf den Winkel reducirt als

$$cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ ab}$$ dient sie zugleich zur Auflösung des vierten Falles, nämlich zur Berechnung eines Winkels aus den bekannten drei Seiten.

Regel 4. Die trigonometrische Berechnung eines Höhenlothes kann mit den einfachen Gesetzen der Rectangulärtrigonometrie und die der Fläche durch Multiplikation einer Seite mit ihrem halben Höhenloth bewirkt werden. (Siehe auch die Regel des folgenden Beispiels 2.)

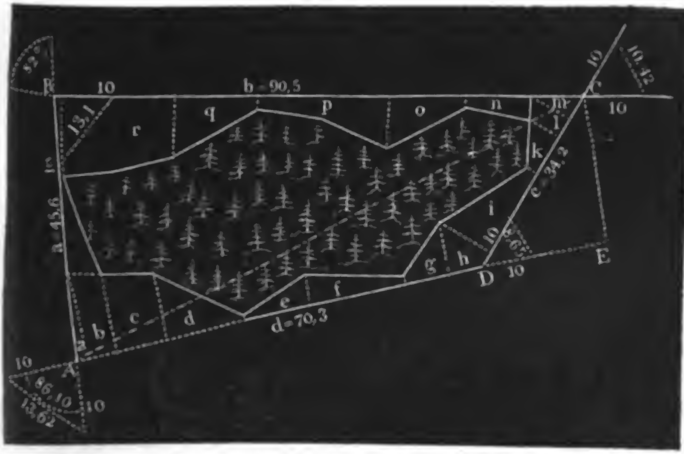
§. 112. Beispiele über schiefwinklige Trigonometrie.

1. Beispiel. Für das stumpfwinklige $\triangle\ .\ ACD$, von welchem $AD = 70{,}3$ und $DC = 34{,}2$ Ruthen und $< D$ (nach Kapitel 10) $= 128{,}8$ Grad gemessen ist, soll man aus den gemessenen Stücken das Höhenloth CE ableiten. —

Denkt man sich CD als Radius, so ist CE der CDfache Einheitssinus des $< D$, gleichviel ob man für D den spitzen oder stumpfen Winkel setzt (§ 99); also, da ersterer $= 180 - 128{,}8 = 51{,}2^\circ$ folgt $CE = CD\ sin.\ D = 34{,}2 \times sin.\ 51{,}2^\circ$.

Wählt man zur Auflösung die Chordentafel, so hat man
$CE = 17{,}1\ ch.\ 102{,}4 = 17{,}1 \times 1{,}558 = 26{,}65$ Ruthen.

Fig. 44.



Zieht man dagegen die Sinus-Skala vor, so hat man da nach
SIN-Skala *sin.* $51{,}2 = 0{,}78$ ist, $34{,}2 \times 0{,}78 = 26{,}7$ Rthn.

2. Beispiel. Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC ist bekanntlich $= \frac{AD\,.\,CE}{2}$, und wenn man hiervon den vorigen Werth von CE setzt

$$= \frac{AD}{2} \cdot CD\ .\ sin.\ D = \tfrac{1}{2}\ AD\ .\ CD\ .\ sin.\ D$$

oder auch $= \tfrac{1}{4}\ AD\ .\ CD\ .\ ch.\ 2\ D$,

worin die allgemein für jedes Dreieck giltige Regel liegt:

Das halbe Produkt zweier Seiten multiplizirt mit dem Sinus ihres Zwischenwinkels, oder das Viertel-Produkt zweier Seiten multiplizirt mit der Chorde ihres doppelten Zwischenwinkels, giebt des Dreiecks Fläche.

Hier in Zahlen, nach der zweiten Form des Satzes:

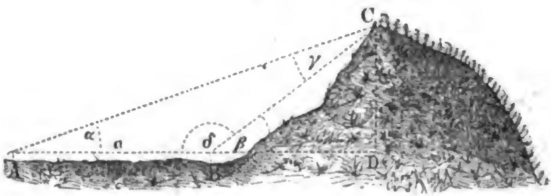
$$\tfrac{1}{4}\ .\ 70{,}3\ .\ 34{,}2\ .\ ch.\ 102{,}4 = \frac{70{,}3 \times 34{,}2 \times 1{,}558}{4}$$

$= 937{,}8$ □Ruthen.

3. Beispiel. Aus der gemessenen Horizontal-Standlinie $AB = a = 600$ Fuss und den mit dem Messknechte beobachteten Winkeln $\alpha = 27{,}3^0$ und $\beta = 31{,}5^0$ die schiefe Distanz BC zu berechnen.

Gegeben 1 Seite a und 2 Winkel α und δ $(= 180 - \beta)$. Gehört also in den ersten Fall; und es ist nach Regel 1

Fig. 45.



$AB : BC = sin.\ \gamma : sin.\ \alpha$; weil aber nach einem bekannten Dreieckssatze $\alpha + \gamma = \beta$ oder $\gamma = \beta - \alpha$ ist, so folgt $a : BC = sin.\ (\beta - \alpha) : sin.\ \alpha$ und daraus

$$BC = a \frac{sin.\ \alpha}{sin.\ (\beta - \alpha)} \text{ oder} = a \frac{ch.\ 2\ \alpha}{ch.\ (2\ \beta - 2\ \alpha)}.$$

In Zahlen nach der letzten Formel:

$$BC = 600 \frac{ch.\ 54{,}6}{ch.\ (63 - 54{,}6)} = 600 \frac{ch.\ 54{,}6}{ch.\ \ 8{,}4} = 600 \cdot \frac{0{,}917}{0{,}146}$$
$= 3768$ Fuss.

Nach der ersten Formel: $BC = 600 \dfrac{sin.\ 27{,}3}{sin.\ 4{,}2^0}$ und mittels Schätzung der $SIN.$-Skala $= 600 \cdot \dfrac{0{,}46}{0{,}073}$ $= 3780$ Fuss.

4. Beispiel. Die Höhe CD findet sich nun leicht als der CBfache Sinus von β, oder $H = CB\ sin.\ \beta$, und wenn statt CB der im vorigen Beispiele entwickelte Werth $a \dfrac{sin.\ \alpha}{sin.\ (\beta - \alpha)}$ eingesetzt wird; dann $H =$ $a \dfrac{sin.\ \alpha\ sin.\ \beta}{sin.\ (\beta - \alpha)}$, eine leicht verständliche Regel. Ebenso

durch die Chorden ausgedrückt:

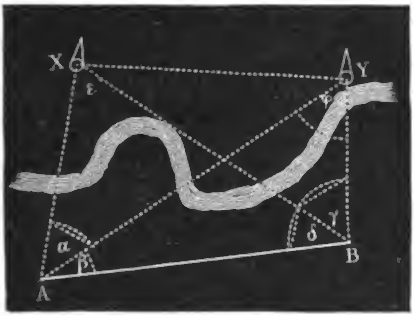
$$H = \frac{a}{2} \frac{ch.\ 2\,\alpha\ .\ ch.\ 2\,\beta}{ch.\ (2\,\beta - 2\,\alpha)}.$$

In Zahlen: $H = 300 \frac{ch.\ 54{,}6\ .\ ch.\ 63}{ch.\ 8{,}4}$

$$= 300\ .\ \frac{0{,}917\,.\,1{,}045}{0{,}146} = 1968 \text{ Fuss *)}.$$

5. **Beispiel.** Eine unzugängliche Distanz XY zu messen.

Fig. 46.



Mittels der Sehnentafel des Knechtes und einer Kette od. dgl. (Kap. 10) war ermittelt worden die Grösse der Standlinie $AB = 60$ Ruthen; des $< \alpha = 55{,}7^0$; des $< \beta = 33{,}4^0$, des $< \gamma = 48{,}3^0$ und des $< \delta = 46{,}3^0$, so dass daraus durch einfache Subtraktion sich ergab $< \varepsilon = 44{,}6$ und $< \varphi = 52{,}0^0$.

Vergleichende Auflösungen mittels des Messknechts und mittels der logarith. Tafeln.

a. Berechnung von AX. (Siehe Regel oder Formel 1.)

Mit Messknecht.

$$AX = \frac{AB\ sin.\ \delta}{sin.\ \varepsilon} = \frac{AB\ ch.\ 2\,\delta}{ch.\ 2\,\varepsilon}$$

$$= \frac{60\ ch.\ 92{,}6}{ch.\ 89{,}2} = 60\,\frac{1446}{1405} = 61{,}9.$$

(Berechnet in Zeit von $1\frac{1}{4}$ Min.)

---

*) Die Berechnung dieses Beispiels mittels einer gewöhnlichen trigonometrischen Tafel ergab 1963 Fuss und erheischte $3\frac{3}{4}$ Minuten, und die mittels der Knechtstafel 4 Minuten.

Mit logarithmisch-trigonometrischer Tafel.

$$AX = \frac{AB \sin.\ \delta}{\sin.\ \varepsilon} = \frac{60 \sin.\ 46{,}3}{\sin.\ 44{,}6^0};$$

$$\begin{aligned} \log.\ 60 &= 1{,}778151 \\ \log.\ \sin.\ 46{,}3^0 &= 0{,}859119 - 1 \\ \hline & \ 1{,}637270 \\ \log.\ \sin.\ 44{,}6 &= 0{,}844114 - 1 \\ \hline & \ 1{,}793156 \end{aligned}$$

wozu die Zahl = 62,10 Ruthen gehört.
(Berechnet in Zeit von 2 Minuten.)

b. Berechnung von AY. (Siehe Regel oder Formel 1.)

Mit dem Knechte.

$$AY = \frac{60 \sin.\ (\delta + \gamma)}{\sin.\ \varphi} = \frac{60 \sin.\ 94{,}6^0}{\sin.\ 52{,}0^0}$$

$$= \frac{60 \times \sin. 85{,}4}{\sin.\ 52{,}0} = \frac{60 \times 0{,}9957}{0{,}788} = 75{,}8 \text{ Ruthen.}$$

(Zeit $1^3/_4$ Minute.)

Mit logarithmisch-trigonometrischer Tafel.

$$AY = \frac{60 \sin.\ (\delta + \gamma)}{\sin.\ \varphi} = 60\ \frac{\sin.\ 94{,}6}{\sin.\ 52{,}0};$$

$$\begin{aligned} \log.\ 60 &= 1{,}778151 \\ \log.\ \sin.\ 94{,}6 = \log.\ \sin.\ 85{,}4 &= 0{,}998388 - 1 \\ \hline & \ 1{,}776539 \\ \log.\ \sin.\ 52{,}0^0 &= 0{,}896532 - 1 \\ \hline Num.\ \log.\ 1{,}880007 &= 75{,}86 \end{aligned}$$

(Zeit 2 Minuten.)

c. Berechnung von XY. (Siehe Regel oder Formel 3).

Mit dem Knechte.

$$\begin{aligned} XY &= \sqrt{AX^2 + AY^2 - 2\,.\,AX\,.\,AY \cos.\ \alpha} \\ &= \sqrt{61{,}9^2 + 75{,}8^2 - 2\,.\,61{,}9\,.\,75{,}8\,.\,\cos.\ 55{,}7} \\ &= \sqrt{3832 + 5746 - 5302^{*)}} \\ &= \sqrt{4276} = 65{,}4 \text{ Ruthen.} \end{aligned}$$

*) $\cos.\ 55{,}7^0$ aus der $COS.$-Skala = 0,565.

(In knapp 5 Minuten berechnet). Wäre die Wurzel nach Kap. 3 auch mit dem Knechte ausgezogen worden, würde man erhalten haben, da zu 42,8 die *Sx.*-Spalte 217 giebt:

$$\begin{array}{r} 217 \\ \overline{651} \; (3 \\ 2) \quad 325 \\ \hline 65{,}4 \text{ Ruthen.} \end{array}$$

(In 4 Minuten Zeit.)

Mit logarithmisch-trigonometrischer Tafel.

$$X\,Y = \sqrt{61{,}9^2 + 75{,}8^2 - 2 \,.\, 61{,}9 \,.\, 75{,}8 \cos. 55{,}7}$$

$$\log.\ 61{,}9 = 1{,}791691$$
$$\overline{}\ (2$$
$$2 \log.\ 61{,}9 = 3{,}583382$$
$$Num.\ \log.\ 3{,}583382 = 3831{,}4;$$

$$\log.\ 75{,}8 = 1{,}879669$$
$$\overline{}\ (2$$
$$2 \log.\ 75{,}8 = 3{,}759338$$
$$Num.\ \log.\ 3{,}759338 = 5745{,}3.$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ 2 = & 0{,}301030 \\ \log.\ 61{,}9 = & 1{,}791691 \\ \log\ 75{,}8 = & 1{,}879669 \\ \log.\ \cos.\ 55^\circ\ 42' = & 0{,}750914 - 1 \\ \hline Num.\ \log. & 3{,}722157 = 5288{,}1 \end{array}$$

$$X\,Y = \sqrt{3831{,}4 + 5745{,}3 - 5288{,}1} = \sqrt{4288{,}6}$$
$$= 65{,}48 \text{ Ruthen.}$$

(In $6\frac{1}{2}$ Minuten ausgerechnet.)

6. Beispiel. Von C aus, Fig. 47, soll eine schnurgerade Linie (Flügel, Weg, Schneisse) nach A geführt und der Absteckungswinkel desselben, $< ACD$, aus den gemessenen Elementen $AD = d = 70{,}3$ Ruthen, $DC = c = 34{,}2^\circ$ und Aussenwinkel $D = 51{,}2$ Grad berechnet werden. —

(Dritter Fall; Formel 2.)

Gegeben $d = 70{,}3$; $c = 34{,}2$; $d + c = 104{,}5$; $d - c = 36{,}1$; $< ADC = 180 - 51{,}2 = 128{,}8^\circ$;

$$< ACD + < CAD = 180 - 128{,}8 = 51{,}2$$

$$\tfrac{1}{2}(< ACD + CAD) = 25{,}6^{\circ}.$$

Aber

$$(d+c):(d-c) = tg.\tfrac{1}{2}<(ACD+CAD) : tg.\tfrac{1}{2}<(ACD-CAD)$$

$$104{,}5 : 36{,}1 = tg.\ 25{,}6 : tg.\ \tfrac{1}{2} < (ACD + CAD)$$

$$tg.\ \tfrac{1}{2} < (ACD - CAD) = \frac{36{,}1 \times tg.\ 25{,}6^{\circ}}{104{,}5}$$

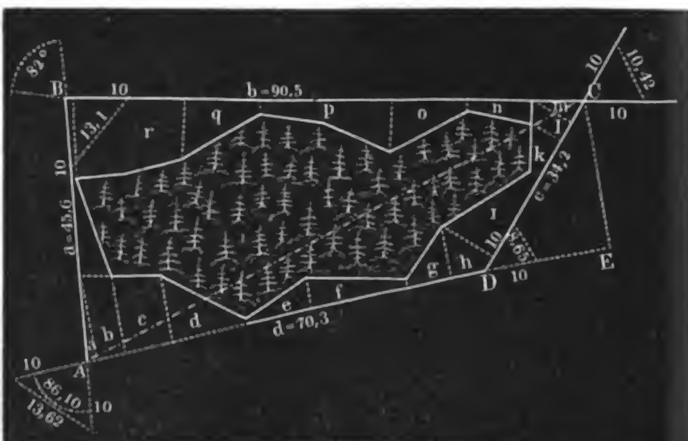
(und da die *TAN.*-Spalte die *tg.* 25,6 deutlich als 0,48 ergiebt) $= \frac{36{,}1 \times 0{,}48}{104{,}5} = 0{,}166$. Und sucht man diese Zahl (als 16,6) in der Tangentenskala auf, so ergiebt sich das gehörige Gradmaass von $\tfrac{1}{2} < (ACD - CAD) = 9{,}4^{\circ}$. Nun war aber die halbe Summe der beiden unbekannten Winkel

$$= \tfrac{1}{2} ACD + \tfrac{1}{2} CAD = 25{,}6^{\circ},$$

und die halbe Differenz der beiden unbekannten Winkel

$$= \tfrac{1}{2} ACD - \tfrac{1}{2} CAD = 9{,}4^{\circ},$$

Fig. 47.



folglich der grössere von ihnen

$$< ACD = 25{,}6 + 9{,}4 = 35{,}0^\circ$$

und der kleinere $< CAD = 25{,}6 - 9{,}4 = 16{,}2^\circ$.
Der Flügel *CA* ist also bei *C* mit einem Winkel von 35,0° gegen *CD*, und bei *A* mit einem von 16,2° gegen *AD* abzustecken. Beide Richtungen fallen dann in einander und der Flügel kann von beiden Seiten her angehauen werden.

(Wie der Messknecht auch das Abstecken dieser Winkel bewirkt, siehe Kapitel 10.)

(Die Anwendungen auf Polygonometrie siehe am Ende des 15. Kapitels.)

Siebentes Kapitel.

Der Messknecht als Metermaass, Universal-Zollstab, Decimal-Maassstab und Winkel-Transporteur.

---

1. Als Metermaass.

§. 113. Die mittelste Vertikalspalte der Vorderseite enthält, wie deutlich angezeigt ist, einen metrischen Maassstab, an dem man mittels Zirkels die Grösse des Milli-, Centi- und Decimeters, also auch, durch Verzehnfachung des letzteren, des Meters selbst abzunehmen vermag.

Wenn und wo es also gilt, die absolute Grösse der neufranzösischen Längenmaasse zu erkennen oder darzustellen, erbietet sich der Knecht, als Milli- oder Centi- oder Decimeterstab zu dienen.

2. Als Universal-Fuss- und Zoll-Stab.

§. 114. Da nun ferner aus der *a*-Tabelle (der Rückseite) leicht zu entnehmen, wie viel Milli- oder Centi-

oder Decimeter auf die Länge eines Fusses und Zolles dieses und jenes Landes gehen, und diese Grösse an dem Metermaassstabe der Vorderseite sofort abzugreifen ist, so wird dadurch der Knecht für seinen Herrn auch ein Universal-Fuss- und Zollstab, der ihm den verlangten Zoll oder Fuss irgend eines der betreffenden Länder in wirklicher Grösse angiebt; da die durch den Druck und das Aufziehen der Tafel etwa zu befürchtenden Verziehungen so unerheblich sind, dass sie die Brauchbarkeit dieses Metermaasses nur bei ganz genauen Messungen und Vergleichungen in Frage stellen.

1. Beispiel. Einem Baier soll sein Messknecht die Grösse eines preussischen Fusses angeben.

Die *a*-Tabelle sagt ihm, der preussische Fuss sei = 314 Millimeter = 31,4 Centimeter; er wird also mit dem Zirkel 10 Centimeter abnehmen, dreimal aneinander und noch 1,4 Centimeter dazu tragen.

2. Beispiel. Ein Sachse will die Grösse des Schweizer und dann des alten Pariser Zolls in Zirkel fassen.

Der Schweizer = badische Zoll ist = $\frac{1}{10}$ Fuss dieser Länder, hat also nach der *a*-Tabelle 30 Milli- oder 3 Decimeter; ist also leicht abzunehmen.

Der Pariser Zoll aber ist = $\frac{1}{12}$ Fuss parisisch $= \frac{325^{mm}}{12} = 27{,}1^{mm} = 2{,}71$ Centimeter. Man setzt also den Zirkel in den Nullpunkt des Centimeterstabes und den anderen Schenkel zwischen 2 und 3 in 7 Zehntel und ein Hundertel, welches letztere man schätzen muss.

3. Als Decimalmaassstab.

§. 115. Wenn man erwägt, dass 1) das Centimetermaass der Mittelspalte, 2) die Tangentenskala der rechten Ecke, von 0 bis 100, 3) die mit 100 überschriebene Hauptskala der Vorderseite, 4) die ersten 9 Grade der mit *INH*-(Inhalt) überschriebenen Hauptskala der Rückseite, und 5) die übrigen Theile dieser Skala, sämmtlich zehntheilige Maassstäbe sind; und wenn man mit dem Zirkel in der

Hand sich überzeugt hat, dass es — wie in der Regel — dem Drucker und dem Buchbinder nicht gelungen ist, die schöne, lobenswerth genaue Arbeit des Lithographen wesentlich zu alteriren, so wird man von selbst begreifen, in wie weit der Knecht als Decimalmaassstab seinem zeichnen wollenden Herrn dienst- und nutzbar werden könne.

Und da die Fälle gar nicht selten und unbeachtbar sind, wo Jemand einen Riss, bestehe derselbe nun in einer Bau-, oder Maschinen-, oder Plan-, oder sonstigen mathematischen Zeichnung, in irgend einer beliebigen Grösse auszuführen, aber keinen passenden Maassstab zur Hand hat, und sonach in der Lage wäre, sich einen solchen selber zeichnen zu müssen: so dürfte die Hülfsleistung des Messknechts als Maassstab um so weniger ganz gering zu achten sein, als er so viele dergleichen von verschiedener Grösse in sich vereinigt und dadurch auch zur bequemen proportionalen Vergrösserung oder Verkleinerung einer Zeichnung tauglich wird.

Noch etwas Näheres über die Praxis dieser Maassstäbe zu sagen, dürfte wohl Raumverschwendung sein.

4. Als Winkeltransporteur.

§. 116. Die Trigonometrie des vorigen Kapitels zeigt uns, wie man die Winkel nicht bloss durch Kreisbogen, sondern auch mittels gerader Linien theils messen, theils bilden könne.

Das bequemste trigonometrische Hülfsmittel, dafern man auf dem Papiere arbeitet, bietet die Chordentafel in Verbindung mit einem Decimalmaassstabe.

Fig. 48.

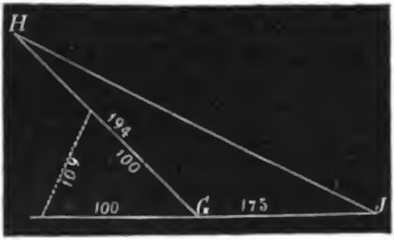


Wollen wir z. B. den $< G$ irgend einer gezeichneten Figur messen, so fassen wir mittels des Zirkels die bequemste Grösse 10 oder 100 von

irgend einem der Messknechtsmaassstäbe in Zirkel, tragen sie vom Scheitel des Winkels aus auf den Schenkel desselben oder, wie hier, seines Nebenwinkels; messen hierauf die so bestimmte und in Zirkel gefasste Chorde an demselben Maassstabe und suchen zu ihrer angezeigten Grösse das zuständige Gradmaass mittels der Chordentafel.

Beispiel. Hätte man in nebenstehender Figur das Maass 10 in Zirkel genommen und dann die (10fache) Chorde = 10,9, die natürliche also als 1,09 gefunden, welche, als 109 Hundertel in der Hauptskala 100 aufgesucht,

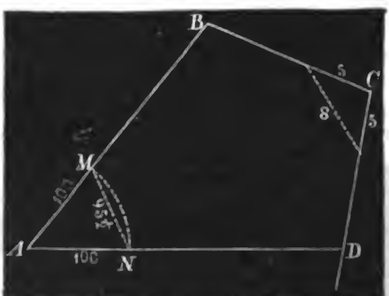
Fig. 49.



mittels der *Ch.*-Spalte das Gradmaass 66,0° ergiebt, so würde $< G = 180 - 66{,}0 = 114{,}0°$ gross sein.

Oder wollen wir am Punkte *A* der Linie *AD* einen Winkel von gegebener Grösse, etwa 57° netto, antragen, dessen Chorde sich mittels der *Ch.*-Spalte als 95,5 ausweist, so nehmen wir wieder von einem der Decimalmaassstäbe des Knechtes 10 oder 50 oder 100 in Zirkel, schlagen damit von *N* einen Bogen nach *M* hin und durchschneiden diesen Bogen von *N* aus mit dem bereits

Fig. 50.



gesuchten Chordenmaasse (hier 95,5 für $AN = 100$; die Hälfte 47,75 für $AN = 50$).

Insofern man nun das zum Auftragen und Ausmessen von Winkeln in den Reisszeugen und sonst wie vorfindliche Werkzeug kurzweg Transporteur zu nennen pflegt, ist in der That der Messknecht auch ein solcher, und zwar ein an Feinheit die gewöhnlichen kreisförmigen Transporteure unbedingt übertreffender.

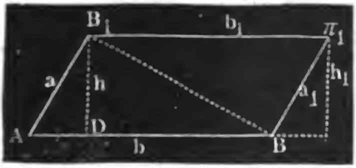
Achtes Kapitel.

Der Messknecht als Winkelkopf.

§. 117. In den Kreisen der niederen Technik, unter den Bauhandwerkern und dergl., wird bekanntlich der rechte Winkel als »Winkel« kurzhin bezeichnet; und es steht eine Linie »im Winkel« gegen eine andere, wenn sie rechtwinklig auf letztere geht. Daher der Name »Winkelkopf« für jene einfachen Apparate, die Einvisirung und Absteckung von rechtwinkligen Linien (»Perpendikeln«, »Lothen«, »Vertikalen«) bezwecken. Welch ein wichtiges und häufig vorkommendes Geschäft aber in der Praxis der Messkunde dies Abstecken winkelrechter Linien bildet, dürfte unseren Lesern nicht minder bekannt sein.

§. 118. Wenn es z. B. gilt, mit Kette und Stäben irgend einen schiefen Winkel von bestimmter Grösse A auf dem Felde aufzutragen, oder rechtwinklige Bauplätze u. dergl. Feld- und Probeflächen, oder Parallelen b und b' Fig. 51, abzustecken, kann man sich mit vielem Vortheile, oder muss sich des Errichtens und Fällens von Perpendikularen bedienen. Nament-

Fig. 51.



lich aber auch, wenn es gilt, ein Terrain nach der sogenannten Perpendikularmethode ohne Messtisch und sonstigen Winkelmesser aufzunehmen, wie dies Fig. 52 und Fig. 53 in Bezug auf einen Feldkomplex und Fig. 54 in Bezug auf ein Waldstück veranschaulicht.

Fig. 52.

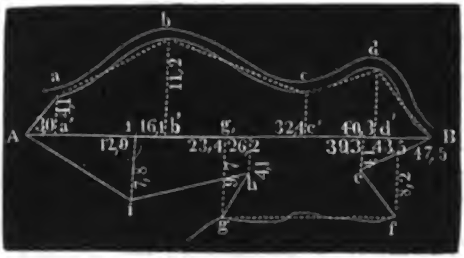
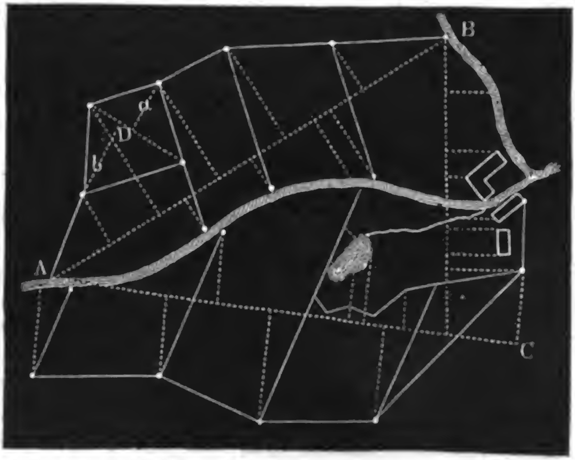


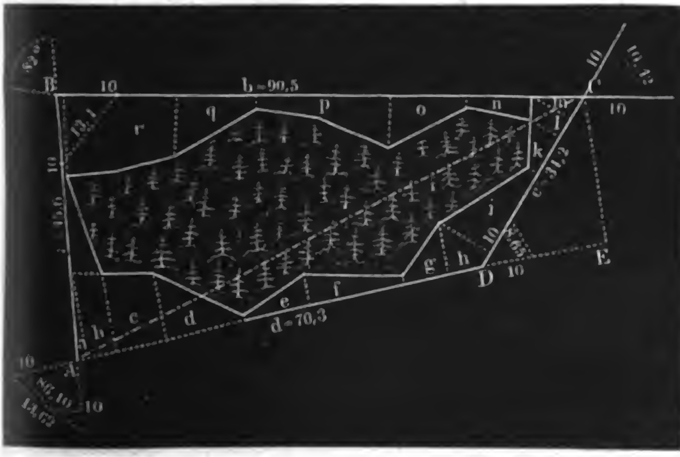
Fig. 53.



§. 119. Auch der dieser Vermessungsmethode gar nicht Kundige wird aus diesen bildlichen Darstellungen leicht von selbst entnehmen können, wie die Sache sich macht.

Mit Visirstäben nämlich steckt man innerhalb oder ausserhalb der Figur eine Standlinie, oder wenn die Figur zu kom-

Fig. 54.



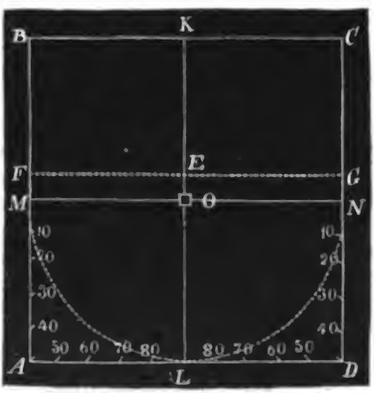
plizirt und ausgedehnt ist, mehrere (ein Standliniennetz) ab; versieht sich mit einer gehörigen Anzahl kleiner numerirter Pfählchen (Figurirpikets), so dass jede Nummer doppelt vorhanden ist, **setzt dieselben** in alle Figurpunkte *a*, *b*, *c*, *d* u. s. w. Fig. 52 ein und sucht mittels eines geeigneten Instrumentes (Winkelspiegel; Winkelkreuz; Winkelkopf) auf der zugehörigen Standlinie die Fusspunkte der von *a*, *b*, *c* u. s. w. gefällten Perpendikel, welche man entsprechend mit der zweiten Reihe der Nummerpfählchen *a'*, *b'* u. s. w. markirt. Die Abschnitte der Standlinien (Abscissen: *Aa'*, *Ab'*, *Ac'*...) und die ihnen zugeordneten rechtwinkligen Abschläge (Ordinaten: *a'a*, *b'b*, *c'c*,...) misst man nun, je nach dem verlangten Genauigkeitsgrade, mit Schritten, Leine oder Kette, und ist dann im Besitze aller Maasse, die man zur Zeichnung wie zur Berechnung braucht. Die Berechnung kann natürlich, da alle Längen und Breiten der entstandenen Dreiecke und Trapeze bekannt sind, auch ohne Anfertigung eines Risses,

und bloss mit Zuhülfenahme der Skizze und der ihr eingeschriebenen Maasse ausgeführt werden. Der in geometrischen Berechnungen Ungeübtere wird die Dreiecke und Trapeze einzeln berechnen, wie unten im Beispiel gezeigt ist; der Kundigere wird sich der abkürzenden Trapezialformel bedienen, wie Kapitel 14 lehrt.

Bei Aufnahmen aus dem Umfange, wie Fig. 54 sie darstellt, wird sowohl die trigonometrische Vermessungsmethode als auch die eben besprochene Perpendikelmessung in Anwendung kommen müssen; jene nämlich, um die Netzfigur zu erhalten, diese, um den Umfangspunkt der Figur durch Coordinaten (Längen und Breiten) an die Netzlinien zu fesseln. (Siehe Kapitel 15.)

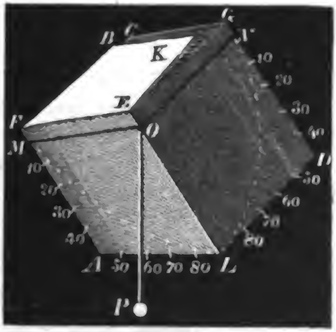
§. 120. Unser geometrisches Aschenbrödelchen würde sich aber in Bezug auf seine praktische Hausmathematik eines wesentlichen Mangels an Bildung schuldig machen, wenn es nicht auch dieser wichtigen Obliegenheit des Rechtwinkelabsteckers sich zu unterziehen vermöchte. Wie leicht ihm dies wird, wird eben so leicht der geneigte Leser begreifen, wenn er den Knecht, *ABCD* Fig. 53, vor

Fig. 55.



sich hin und dann, wie Fig. 54 zeigt, in Würfelform zu-

Fig. 56.



sammenlegt; die Kanten BK und CG mittels eines schmalen zusammengedrückten Blechbändchens, einer Klemme k, wie Fig. 57 und 58 (a. f. S.) zeigt, an einander presst, und diese Würfelecke auf oder an einem beliebigen Stativstocke mittels eines einzuschraubenden oder einzusteckenden Querzapfens z oder Z befestigt, wie umstehende Figuren zeigen. Damit die die Pendelseite des Knechtes durchdringende mit Schraubgewind versehene Spitze s das Instrumentchen möglichst wenig beschädige, soll diese Spitze nicht stärker als eine kräftige Nähnadel sein und durch einen der kleinen Kreise gehen, welche zu diesem Behufe auf der Pendelseite (in der Festigkeits-Tabelle) eingezeichnet sind. Auch wird man gut thun, zwischen die Tafel und das Mütterchen des Stiftes s ein dünnes Lederscheibchen von der Grösse eines sehr kleinen Pfennigs einzusetzen, theils um die Tafel zu schonen, theils um die Reibung und Befestigung zu verstärken. Zwei dergleichen Lederscheibchen eines auf der Innen-, eines auf der Aussenseite der Tafel, sind noch besser.

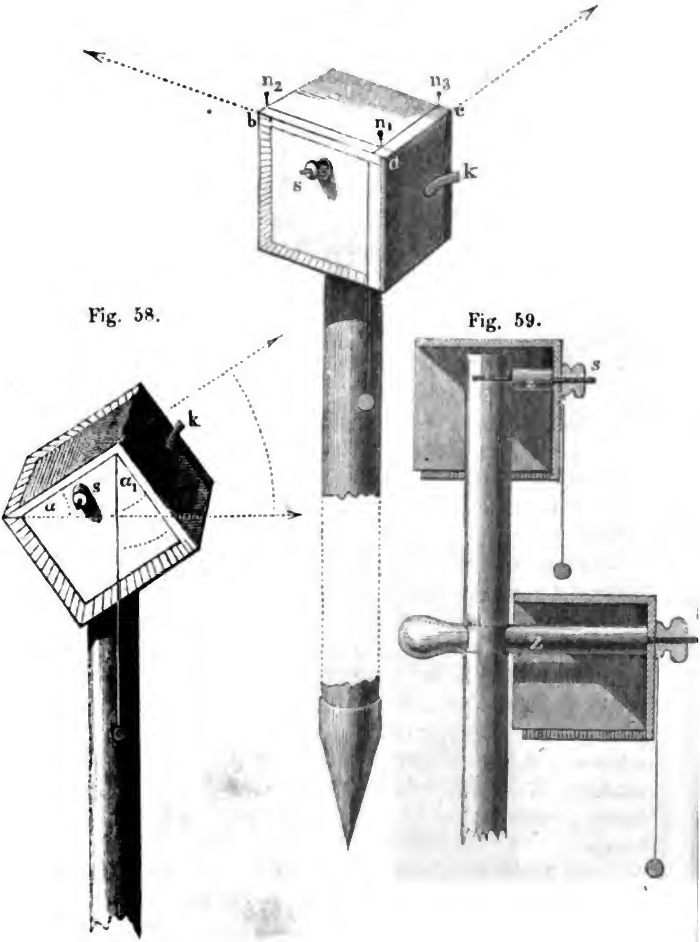
Die Befestigungsweise, wie z und s, Fig. 59, zeigt, ist bei einem niedrigen, etwa einem Spazierstocke, und die wie Z und S bei einem längeren, etwa einem 6 Fuss hohen Kettenstabe anwendbar.

§. 121. In wie fern nun die Würfelkanten ba und ac den rechten Winkel einvisiren und in wie fern die Visur

Fig. 57.

Fig. 58.

Fig. 59.



durch drei entsprechend lothrecht und parallel eingesteckte kurze Nadeln noch verfeinert werden kann; in wie fern also der Messknecht durch jene einfache und billige Geräthschaft und Umwandlung zu einem vollständigen Rechtwinkelabstecker oder Winkelkopf sich kultivirt, ist aus den obigen Fig. 57—59 klar genug ersichtlich. Namentlich zeigt auch Fig. 58, in wie fern der Messknechts-Winkelkopf an Vollständigkeit alle anderen bisher gebräuchlichen Winkelkreuze u. s. w. dadurch übertrifft, dass er mit gleicher Leichtigkeit horizontale (Fig. 57) wie schiefgeneigte (Fig. 58) Rechtwinkel absteckt, und also an dem steilsten Hange mit gleicher Bequemlichkeit als auf der Horizontalebene arbeitet.

§. 122. Es giebt unter des Verfassers Schülern und mathematischen Freunden sehr Viele, die den Messknecht lieb genug gewonnen haben, um ihn, selbst als Stativinstrument, sei es nun als Winkelkopf behufs des Absteckens und Aufnehmensvon Winkeln und Flächen, oder als Nivellirer oder als Stativhöhenmesser u. s. w., immer bei sich führen zu wollen. Wer, wie diese, dem Beispiele und Rathe des Verfassers folgen will, lässt sich seinen Spazierstock so einrichten, wie es Fig. 60 und 61 (a. f. S.) zeigt.

Der möglichst weit ausgebohrte Stock enthält einen zweiten, möglichst starken, *e*, der mit Hülfe eines Pressschräubchens *q* die, zwar nicht unbedingt wohl aber zur Bequemlichkeit nöthige, Verlängerung bewirkt. Der, natürlich abzuschraubende Stockknopf, der am zweckmässigsten birnförmig zu gestalten, ist hinlänglich ausgehöhlt, um den Querzapfen *z* sammt Mutter, die Klemme *k* und einige der genannten Visirnadeln aufzunehmen. Statt der letzteren wenden wir aber zur grösseren Sicherheit besondere Visirzwecken, wie sie Fig. 60 *n* in natürlicher Grösse zeigt, an, da diese immer von selbst genau lothrecht aufsitzen, sobald nur ihr Messingscheibchen vollständig aufsitzt. Behufs länger andauernder Arbeiten ist der untere Stift dieser Visirzwecken, der als eine feine Schraube eingerichtet ist, mit einem Mütterchen versehen, die das voll-

ständig genaue Aufsitzen des Scheibchens versichert. Die Figur *m* ist ein aus Messingblech geschnittenes und schwarz

Fig. 60.

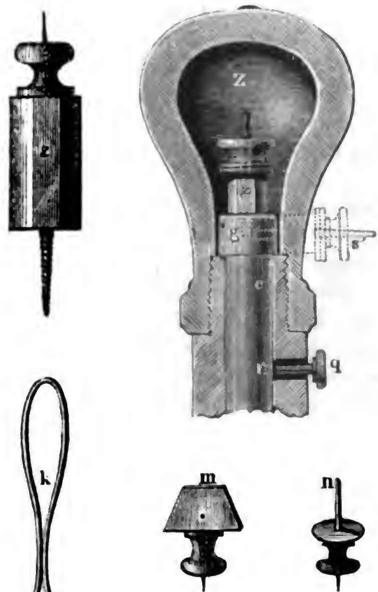
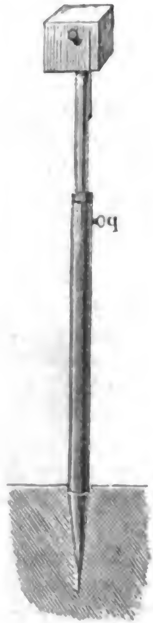


Fig. 61.



gefärbtes Diopter oder Visir, das wir, ebenfalls aufgeschraubt, anwenden, wenn wir mit dem Messknecht so sorgfältig als möglich nivelliren wollen. (S. folgd. Kap.) In der Regel aber reichen die Visirzwecken *n* schon aus.

Diese sämmtlichen Kleinigkeiten — von den Zwecken 3 Stück — haben in dem kleinen Zeughause *Z* des Knopfes Platz, wobei man den Zapfen *z* (der beim Gebrauche, wie *s* zeigt, seitwärts in das Knöpfchen *g* eingeschraubt wird) oben aufschrauben kann, wie die Hauptfigur zeigt. Das Pressschräubchen *q* kann am Stocke bleiben, dafern der Innenstock. wenn er herunter gelassen ist, eine kleine Grube *r*

erhält, die das vollständige Hineinschrauben von *q* gestattet *).

§. 123. Im Interesse der Schulen, die den Messknecht bereits unter ihre Lehrhülfsmittel aufgenommen haben oder noch aufnehmen wollen, sei hierbei noch bemerkt, dass **sich jeder Schüler seinen Messknecht auch ohne alle Kosten in obiges Stativinstrument umwandeln** kann. Statt der Visirzwecken und des Diopters nimmt er feine Stecknadeln, bis auf ½ Zoll verkürzt und durch Erhitzen und ins Wasser Werfen gehärtet. Statt der Klemme *k* ein Blechstreifchen, und statt des Zapfens *z* einen Pfropfen *t* von Kork oder weichem Holze, Fig. 62, welchen man in ein entsprechendes Bohrloch eines ganz gemeinen Stockes einsteckt und allda den Knecht mittels einer feinen Zwecke (wie man sie der Frau Mutter unvermerkt aus dem ersten besten Sopha ziehen kann) befestigt.

Fig. 62.



Nimmt man einen hohen Stock, etwa eine Kettenbake, so muss man den von Linden- oder Pappelholz gefertigten und durchgesteckten Pfropfen *T* natürlich länger machen, damit der Knecht seitwärts Platz hat, wie Fig. 62 bei *T* sehen lässt.

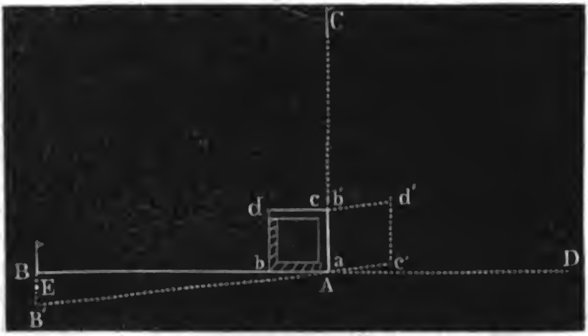
§. 124. Die unmittelbaren **Anwendungen dieses Winkelkopfs** und die einfachen Kunstgriffe dabei sind im Wesentlichen ganz dieselben wie beim Arbeiten mit einem anderen Winkelkopfe.

---

*) Dies ganze Zeughäuschen möblirt der Mechanikus Lehmann in Dresden, nach des Verfassers besonderer Anleitung, für den Preis von 12½ Sgr., wobei es 2 Visirzwecken, 1 Diopter, die Klemme und den Querzapfen enthält. Einzeln kostet der Zapfen *z* 4 Sgr., jedes andere Werkzeug 2½ Sgr.

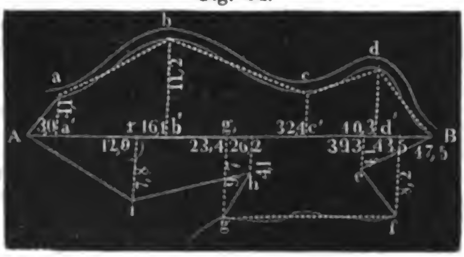
Will man z. B. in *A* Fig. 63 ein Perpendikel auf einer Grundlinie *AB* errichten, so stellt man den Messknecht so bei *A* auf, dass *a* über *A* und die Visirkante *ab* in der Richtung *AB* fällt; die andere Visirkante *ac* be-

Fig. 63.



stimmt dann das Perpendikel *AC*. Will man aber, etwa von *c*, Fig. 64, ein Perpendikel auf eine Basis *AB* fällen, so schätzt man erst den Fusspunkt *c'* und operirt über ihm so, als wollte man von ihm aus ein Perpendikel nach c hin errichten. Dies Perpendikel wird aber, wenn c' nicht richtig eingeschätzt war, links oder rechts bei c vorbei gehen. Man schätzt diese Abweichung und verbessert darnach den Standpunkt des Messknechts, was in der Wirklichkeit und bei einiger Uebung Alles fast noch schneller geht, als hier die Beschreibung. Das Pendel ist zwar hierzu nicht nothwendig, aber in vielen Fällen ein willkommener Regulator der Aufstellung.

Fig. 64.

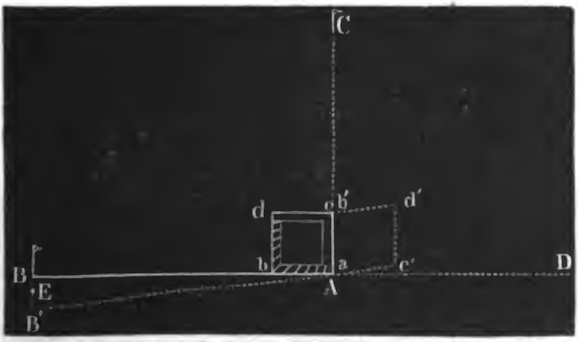


Wäre die Aufgabe zu lösen, zu einer gegebenen *AB* eine **Parallele**, etwa mit 20 Ruthen Entfernung abzustecken, so geschieht das bekanntlich ebenfalls am besten durch Errichtung zweier 20 Ruthen langer Perpendikel in zwei beliebigen (möglichst weit von einander entfernten) Punkten der Grundlinie.

Weitere Anwendungen des Winkelkopfes kommen in den folgenden Kapiteln vielfach vor.

§. 125. Die **Prüfung und Justirung** des Winkelkopfes, die dem **ordentlichen Gebrauche desselben nothwendig vorhergehen muss**, mag man nun zum Visiren die blossen Würfelkanten oder deren Verfeinerung durch Zwecken anwenden; ist sehr einfach folgende.

Fig. 65.



Man steckt das Instrument in irgend einem Punkte *A* in den Boden; in der Richtung jeder Visur *ab* und *ac* die Stäbe *B* und *C* möglichst entfernt, mindestens 100 Schritte, und dreht hierauf den Stock so, dass *ab* genau nach *C* weist. Dann muss auch *c'a* genau nach *B* weisen, da der Nebenwinkel *Cac'* oder *CaD* ebenfalls ein rechter Winkel sein muss, wenn *CaB* ein solcher wäre. Bei Anwendung der blossen Würfelkanten trifft dies wohl stets, zumal der Buchbinder von den gegebenen Normallinien nicht abweichen kann. Bei eingesteckten Visirnadeln wird es aber wohl vorkommen, dass der Steckpunkt der einen berichtigt werden muss, weshalb man vor der Justirung diese

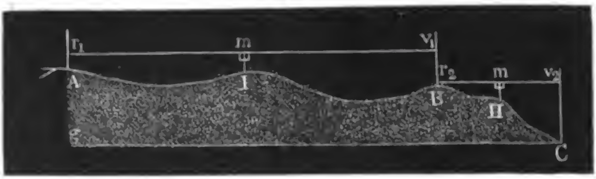
Stifte, oder wenigstens den einen, nur ganz lose einstecken muss. Zeigt nämlich bei der Prüfung dessen Visur nach *B'* anstatt nach *B*, so ist, weil *BB'* den Fehler in doppelter Grösse giebt, sein Stand dahin zu berichtigen, dass die Visur in die Mitte *E* des Fehlers zeigt. Konnte man die Punkte *B* und *C* nicht entfernt genug wählen, so hat man beim Umdrehen des Stockes auch zugleich ein Umstecken desselben nöthig, weil dann genauer darauf zu achten ist, dass die Ecke *a* lothrecht über demselben Punkt *A* steht, über dem sie früher stand.

Neuntes Kapitel.

Der Messknecht als Nivellirinstrument.

§. 126. Jedes Instrument, das die horizontale Einstellung eines Wagscheits oder einer Visur $r_1\,v_1$, Fig. 66, ver-

Fig. 66.



mittelt, kann als Niveau zu jener eigenthümlichen Methode des Höhenmessens, die man Nivelliren nennt, gebraucht werden.

Die Loth- oder Setzwage war lange Zeiten hindurch das einzige Nivellirinstrument, und wird noch von den Baugewerken, von den Mühlenzeugarbeitern und dergleichen Technikern zur Nivellirung von Bauplätzen, von Wassergefällen von nicht zu ausgedehnten Be- und Entwässerungen, Drainirungen und Planirungen angewendet, und würde sich zu vielen ähnlichen kleinen Arbeiten der Forst- und Landwirthschaft und des Ingenieurwesens noch öfter als brauchbar empfehlen, wenn nicht das Arbeiten mit der

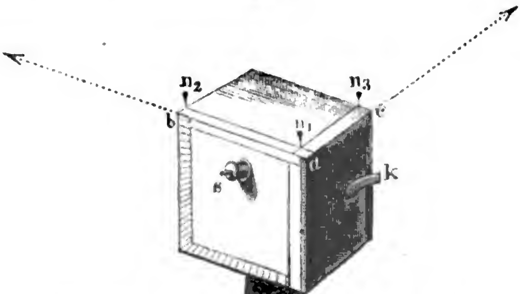
alten gewöhnlichen Setzwage zu aufhältlich und unbequem wäre. Sobald man aber die Lothwage zu einem Visirinstrument umgestaltet, erhält man ein Werkzeug, das nicht nur des schwerfälligen »Wagscheites« entbehren, sondern auch genauer eingestellt und so verwendet werden kann, dass man bei langsamer Arbeit die Genauigkeit der Setzwage zu überbieten, oder aber, wenn es nur um mehr grobe Resultate zu thun ist, die Arbeit viel schneller auszuführen vermag.

§. 127. Dass ein solches Instrumentlein jedoch bei windigem Wetter nur unvollkommen, mindestens nur mit Anwendung besonderen Schutzes, überhaupt aber dort nicht brauchbar sein kann, wo man die Genauigkeit einer empfindlichen Röhrenlibelle bedarf, ist selbstverständlich. Die Erfahrung hat indess schon genugsam bestätigt, dass der in ein Niveau verwandelte Messknecht sich zu allen jenen kleinen Nivellirungsarbeiten des forst- und landwirthschaftlichen, technischen und militairischen Ingenieurwesens als hinlänglich brauchbar bewährt, wo bei Lattenständen von 20 Schritt oder 60 Fuss Entfernung der Fehler der einzelnen Visur etwa $\frac{1}{2}$ Zoll, bei 30 Fuss Lattenweite aber $\frac{1}{4}$ Zoll betragen darf, indem mit diesen Zahlen die durch Versuche konstatirte Leistungsfähigkeit des Knechtes ausgedrückt ist, so dass er bei sonst verständiger Anwendung hiernach nicht sehr viel hinter der Genauigkeit der bisher so ausgedehnt im Gebrauche gewesenen kostspieligen Quecksilberkanalwage zurückbleiben wird; namentlich wenn man bedenkt, dass, wie bei ihr, so auch beim Knechte, durch gegenseitige Tilgung der Zwischenfehler sich oft überraschend genaue Endresultate ergeben. Uebrigens wollen wir von vornherein nicht zu bemerken unterlassen, dass unter allen Leistungen des Messknechts seine Nivellirarbeiten die geringfügigsten sind.

§. 128. Der vorhin angeführte, durch Versuche gefundene, Genauigkeitsgrad lässt sich auch durch Kalkül also finden. Das Pendel gestattet am Anfange der Tangentenskala zwar nicht mehr die A b l e s u n g der einzelnen Tausendtel, wohl aber noch die W a h r n e h m u n g, wenn das Pendel um 1

Tausendtel der ganzen Skala oder 1 Tausendtel der Tangente von seinem Einspielpunkte abweicht. Bei 20 Schritt = 60 Fuss = 600 Decimalzoll Entfernung der Ziellatte ist aber der jener Abweichung entsprechende Fehler = $600 \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}6$ Zoll; während er bei 10 Schritt Lattenweite nur 0,3 Zoll wird.

Fig. 67.

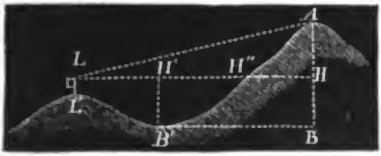




§. 129. Mit Rücksicht auf die vorausgeschickten Erläuterungen lässt sich aber nun behaupten, dass, wenn man den auf Seite 156 dargestellten Spazierstock, dem man nicht verfehlen wird, ein Zollmaass einzuschneiden, in der Hand und den Messknecht in der Brieftasche hat, es höchstens noch einer Ziellatte (wozu auch die erste beste Stange, der man das Zollmaass aufschneidet, dienen kann) bedarf, um im Besitze eines vollständigen Nivellirapparats zu sein. Denn sowie der mit dem aufgeschraubten Messknechte versehene Stock so aufgestellt wird, Fig. 67, dass der Pendelfaden auf dem Nullpunkte der Skala einspielt, muss die Visirkante *ba* und also auch die dadurch bewirkte Visirlinie eine Horizontale sein, wenn Alles am Knechte seine Richtigkeit hat. Weil aber diese blosse Würfelkante nicht zuverlässig genug ist, soll man ihn

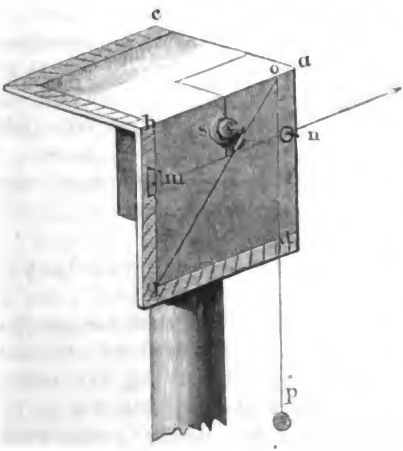
in der Weise nur zu ganz rohen Niveauvergleichungen anwenden, wozu er sich indess auch ganz zweckmässig erwiesen hat; z. B. wenn es gilt, über ein Thal *B'* hinweg am jenseitigen Hange den Punkt *H''*, Fig. 68, anzugeben, der mit unserem Standpunkte in ungefähr gleicher Höhe ist; oder an einem Hange hin einen nahe horizontalen Weg u. dergl. abzustecken.

Fig. 68.



§. 130. Sobald es aber einem ordentlichen Nivellement gilt, muss man die Visur verfeinern und berichtigen können. Zu dem Ende stecken wir das Visir *m* und den als Korn dienenden Stift *n* (s. Seite 156) möglichst weit von einander entfernt so in die Tafel, dass die Linie oder Visur *mn* genau rechtwinkelig auf der Nullpunktlinie *od*, Fig. 69, des Pendels steht, und befestigen den Knecht, wie Seite 154 angegeben, an seinem Stocke.

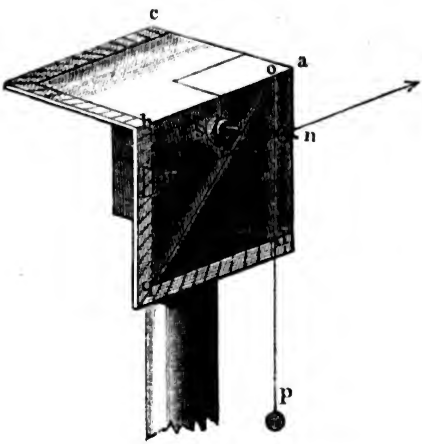
Fig. 69.



Statt des Visirs *m* und der Visirzweck *n* kann man auch zwei feine und kurze Nadeln, oder besser zwei angeschraubte Visirzwecken nehmen. Das Sicherste bleibt schon das Diopter *m*. — Die zwischen dem Worte Verlag auf des Messknechts Vorderseite befindlichen Ringelchen und die ihnen

gegenüberliegenden am Ende der betreffenden Linien sind vorzugsweise zu solchen Einsteckpunkten bestimmt. Doch können jene Visirwerkzeuge *m* und *n* auch in die Diagonale *b d* eingesteckt werden, Fig. 70, wo dann die andere Diagonale des Pendels Einspiel- oder Null-Linie wird.

Fig. 70.



Dass die Visur *m n* recht genau lothrecht auf der Pendel-Einspiellinie stehe, ist ein Haupterforderniss.

Die Untersuchung und Feststellung mittels Zirkels und Kreuzbogen reicht dazu nicht aus. Wir müssen unsere Prüfung nach Art und Weise derjenigen einrichten, welcher man alle Nivellirwagen zu unterwerfen hat.

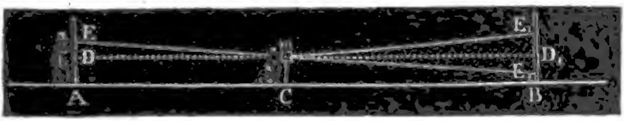
Man verfahre daher nach folgender

§. 131. Vorschrift zur Prüfung und Justirung der Visirzwecke.

Stecke das Korn *n*, Fig. 70, vor der Hand nur ganz lose in seinen durch die Zeichnung gegebenen Punkt. Gehe dann auf einen ziemlich wagerechten Platz, Fig. 71; stelle daselbst zwei Stäbe in einer Entfernung von $BA = 24$ bis 30 Schritt und ungefähr in der Mitte *C*, aber genau in der Linie *AB*, den Knecht so auf, dass die Pendelfläche des Knechts auf *A* weist und dabei das Pendel genau an- und einspielt. Gesetzt, das Korn wäre etwas zu hoch aufgesetzt, so würde die Visur statt des zur Zeit noch un-

bekannten Horizontalpunkts *D* den höheren *E* treffen, der sofort durch einen Stift, oder Strich am Stabe *A*,

Fig. 71.



markirt wird. Hierauf dreht man den Knecht so, dass seine Visirkante den Stab *B* trifft, und bestimmt mit derselben Vorsicht, wie vorher, den Punkt E_1. Wäre das Korn richtig eingesteckt, würde E_1 *m* *E* eine gerade Linie bilden. Um dies zu untersuchen, stelle man sich hinter *E* und visire von *E* über *m* nach dem Stabe *B*. Visirt das Auge hinter *E* mittels der beiden Richtpunkte *E* und *m* aber den dritten Punkt E_2 an, so giebt die Mitte dieser Differenz E_1 E_2 in D_1 den richtigen Horizontalpunkt. Jetzt hat man nun bloss das Korn so in die Tafel einzudrücken, dass es, wenn das Pendel einspielt, den Horizontalpunkt D_1 trifft. Nun ist die Visirebene justirt, und so lange man dasselbe Visir und Korn immer wieder in dieselben Löcher einsteckt, ist eine weitere Prüfung nicht nöthig.

Sehr einfach gelangt man auch zu dem Horizontalpunkte *D*, wenn man den Knecht am Ufer eines Teiches und an einem anderen 12—20 Schritt entfernten Punkte des Ufers einen Stab aufstellt mit einer Marke *D*, die genau so hoch über dem Wasserspiegel steht, als das Visir *m* des Knechtes.

§. 132. Muss man mit einem auf solche Weise nicht justirten Korne visiren, so kann man dessenungeachtet ein eben so richtiges Nivellement machen, sobald man nur die Vorsicht gebraucht, für eine und dieselbe Station *C* des Instrumentes die Entfernungen der Ziellatte *CA* und *CB* gleich gross zu machen. Denn bekanntlich ist das Gefälle von *A* bis $B = D_1 B - DA$; weil aber bei falschem Instrumente und gleichen Lattenentfernungen die Fehler *DE* und D_1 E_1 gleich werden, kann man auch setzen: Gefälle von *A* bis $B = E_1 B - EA$, also — so wie so —

gleich der Vorwärtszielhöhe minus die Rückwärtszielhöhe.

§. 133. Die Anwendbarkeit des Messknechts zum Nivelliren setzt natürlich stilles Wetter voraus. Die Genauigkeit anlangend, so kann diese, wegen der genaueren Einstellung des Pendels und der Verfeinerung und Justirung der Visur, als eine die Lothwage überbietende angesehen werden. (Seite 161.) Die hier in Tharand vielfach angestellten komparativen Versuche haben gezeigt, dass bei gehöriger Beachtung der unten folgenden Regeln auch hinsichts der Förderlichkeit der Knecht die Lothwage bei Weitem überbietet.

§. 134. Ausser dem Niveau, das der Knecht abgeben soll, braucht man aber bekanntlich zur Ausführung von Nivellirungsarbeiten noch eine Ziellatte. Diese kann Dir, lieber Leser, sehr billig und doch ausreichend gut, der erste beste Zimmergesell oder Pästelmeier Deines Hofes fabriciren, wenn Du nur darauf siehst, dass er genau nach folgender Vorschrift verfährt:

Nimm eine 10 — 12 Fuss lange Dach- oder starke Spalierlatte; hobele sie gut in eine gleiche Stärke; gieb ihr unten eine Soole von starkem Blech, und oben, wo nicht ein Röllchen, so doch einen glatten, runden Kanal, der als Schnurlauf dienen soll. Diese Latte theile auf der einen (hinteren) Seite von unten auf in Zolle und schreibe auch die Zollzahlen in diesem Sinne daran. Nimm hierauf als Zielscheibe ein quadratisches Brettchen von 8 — 10 Zoll Seite, nagele hinten darauf in gleichem Abstande von den Seiten die beiden Holzbacken *mm* Fig. 74 so, dass die Latte in dem von ihnen gebildeten Kanale bequem geschoben werden kann, und bringe an dem einen Backen inwendig eine Feder *f* und am anderen auswendig eine Pressschraube *p* an (die Feder kann zur Noth entbehrt werden; sie soll den gar zu leichten Gang hemmen) und nagele auf die Backen die Blechplatte *nn* Fig. 72, die ein drei Zoll hohes Fenster hat. Theile endlich die Vorderseite der Scheibe durch zwei Diagonalen in 4 Dreiecke (von denen das untere und obere roth, die beiden anderen weiss angestrichen werden)

und schneide in das Fenster zu beiden Seiten einen Strich *n n*, der genau der Mitte der Scheibe entspricht. Um die

Fig. 72.

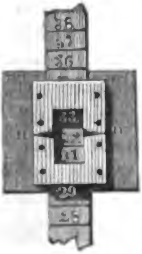


Fig. 73.

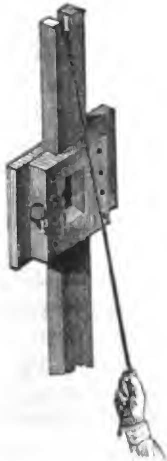
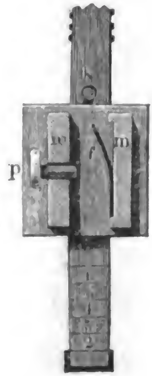


Fig. 74.



Scheibe auch in der Höhe dirigiren zu können, wird sie mittels eines Häkchens *k* an eine Schnur gehängt, diese über den Schnurlauf *l* geführt und von dem Lattenhalter in die rechte Hand genommen.

Sobald beim Gebrauche der Lattenführer die Scheibe nach den Winken des Visirers in die rechte Höhe eingerichtet hat, wird er sie durch die Schraube fest-, hierauf die Latte zur Controle nochmals aufstellen und dann den Stand der Marke am Fenster hinten ablesen, wobei noch die Zehntelzolle nach dem Augenmaasse ganz sicher eingeschätzt werden können.

§. 135. Wenn dies aber bei etwa schnell vorkommenden Fällen noch zu umständlich ist, so nimm die erste beste Latte, spanne ein richtiges Zollband oder trage die Zolle darauf und lasse statt der Scheibe einen kleinen Schieber von Pappe zur Noth selbst des Gehülfen Finger nehmen. Bei sehr steigendem Terrain sind

aber, weil der Gehülfe dann nicht hoch genug langen kann, zwei Latten nöthig. Am bequemsten ist es dann, die eine *EB*, mit zwei Visirpunkten, *C* und *E*, Fig. 75, zu versehen, die etwa gerade 10 und 100 Zoll über *B* sind, so dass, wenn der Fuss *B* bei der anderen Latte *AD* z. B. auf $20^{1}/_{2}$ zeigte, die Zielhöhe dann $= 120^{1}/_{2}$ Zoll betrüge, im Fall *E*, (und $30^{1}/_{2}$ Zoll im Falle *C*) als Visirziel gewählt war. Vermittelt man das bessere Aufeinanderschieben beider Latten durch ein Paar Halsbänder *M* und *N* von Holz oder Blech, so hat man sich eine in mancher Hinsicht noch einfachere und bequemer zu behandelnde Ziellatte mit noch geringeren Kosten hergestellt.

Fig. 75.



Bei Höhen unter 90 Zoll gebraucht man dann den Punkt *C*, bei grösseren den Punkt *E* als Zielpunkt.

Das Ablesen geschieht immer an dem mit Blech beschlagenem Fusse *B* auf der Latte *A D*, welche von *D* aufwärts in Zolle getheilt ist, denen man, je nachdem *C* oder *E* Visirpunkt war, 10 oder 100 beim Ablesen aufrechnet.

§. 136. Beim Nivelliren mit dem Messknechte unterlasse man ferner nicht, um möglichst sicher, bequem und schnell zu arbeiten, folgende Praxisregeln zu beachten.

1) Halte auf eine recht spitze Zwinge des Stockes.

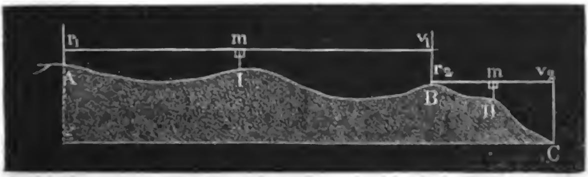
2) Suche für letzteren immer einen solchen Stationspunkt, wo er leicht in das Erdreich dringen kann, und scheue dem zu Liebe selbst einen Umweg nicht; denn man kann ja doch in jedem beliebigen Bogen und Zickzack mit dem Stationen vorwärts gehen.

3) Die Entfernung der Ziellatte vom Visir soll höchstens 20 Schritte und auch dies nur bei ganz gutem Lichte sein. Bedeutend zuverlässiger wird das Resul-

tat bei durchschnittlicher Lattenweite von nur 10 Schritten.

4) Für eine und dieselbe Station des Niveaus nimm auch die Lattenabstände möglichst gleich; so z. B. dass, wenn Du jetzt beim Fortstationiren desselben 12 Schritte von der Latte entfernt Dich aufstelltest, und nach bewirkter Rückvisur r_1 der Lattenführer von A nach dem (in der Regel beliebigen) Anbindepunkt B geht, die Länge der Vorwärtsvisur mv_1 auch ungefähr 12 Schritte betrage. Auf die nächste Station haben aber die Entfernungen beider vorigen keinen Einfluss.

Fig. 76.



5) Wird von A nach C hin nivellirt, so stelle den Stock in der (beliebigen) Station I gleich möglichst senkrecht ein und so, dass die Pendelfläche des Knechtes gleich eine möglichst scharfe Richtung nach der bereits stehenden Ziellatte A hat. Die gröberen Einstellungen des Pendels bewirke durch sanften Seitendruck oder Drehung mit dem Stocke; die feineren durch dergleichen am Messknechte mittels Drehung um den Zapfen. Denn das Pendel muss nicht nur scharf auf dem Nullpunkte ein-, sondern auch scharf an die Tafel, doch ohne Reibung, anspielen, und gleichzeitig muss die Visur die Latte treffen, so dass nach genauer Einstellung des Pendels keine Drehung des Stockes mehr nöthig ist.

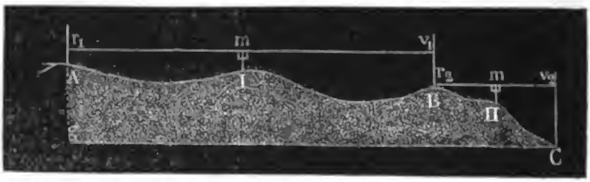
6) Nimm im Falle eines kurzen Stativstockes beim Visiren die halb knieende Stellung, Fig. 71 C an.

7) Nach erfolgter Ansagung der Rückwärtszielhöhe $r_1 A$ durch den Lattenführer drehe den Stock und regulire, wenn nöthig, des letzteren Stellung so, dass das Pen-

del beinahe ein- und anspielt und die Visur nach der Richtung hingeht, wo der nächste Lattenpunkt B etwa liegen wird. Ist dieser ein blosser Anbindepunkt, so stelle erst den Messknecht nach Nr. 5 ordentlich ein und dirigire erst hierauf den Lattenführer so, dass die Latte in die bereits feststehende Visur eingestellt wird, wobei die Ermittelung der Vorwärtsvisur $v_1 B$ ausserordentlich schnell erfolgt.

§. 137. Ergab sich, beim Stationiren von A aus nach rechts hin, für die erste Station I. beim Visiren nach der Latte A deren Zielhöhe — hier Rückwärtsvisur, Rückhöhe $= r_1 = 25{,}3$ Zoll und die Zielhöhe der in B aufgestellten Latte, die Vorhöhe, $v_1 = 68{,}9$ Zoll, so ist bekanntlich das Gefälle von A bis $B = v_1 - r_1 = 43{,}6$ Zoll = Rückhöhe minus Vorhöhe. Und war bei der zweiten

Fig. 77.



Station II. die Rückhöhe des Anbindepunktes $B = r_2 = 11$ Zoll und die Vorhöhe $v_2 = 70$ Zoll, so folgt daraus das Gefälle von B bis $C = 70 - 11 = 59$ Zoll $= v_2 - r_2$; und also von A bis $C = 43{,}6 + 59 = 102{,}6''$. Das Gefälle von A bis C fand sich demnach auch auf einmal durch $(68{,}9 + 70) - (25{,}3 + 11) = 138{,}9 - 36{,}3 = 102{,}6''$ oder in Buchstaben durch:

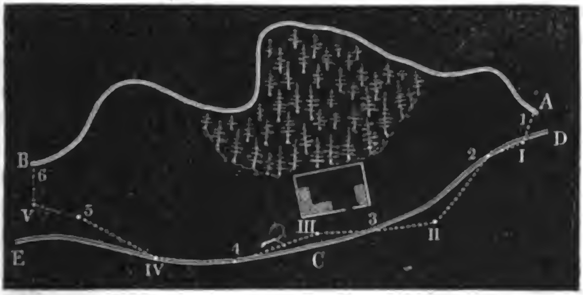
$$g = (v_1 + v_2) - (r_1 + r_2)$$

Es ist also allgemein, wenn n Stationen nöthig waren, um vom Anfangs- bis zum Endpunkte des Traktes zu gelangen, und wenn $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ und $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ die beobachteten Ziel-, jene die Rück-, diese die Vorhöhen bedeuten, das Gefälle vom 1. bis zum n. Lattenstande

$g = (v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_n) - (r_1 + r_2 + r_3 \ldots + r_n)$, d. h.: Summe aller Vorhöhen minus Summe aller Rückhöhen.

Erscheint bei Befolgung dieser Regel ein negatives Endresultat, so zeigt dies auf (negatives Gefälle) Steigung statt Gefälle.

Fig. 78.



§. 138. **Beispiel.** Beim Nivellement eines Baches von *A* bis *B* hat man es für vortheilhaft gefunden, sich in der Nähe der Strasse *DCE* hinzuziehen, und hat 5 Stationen und über sie folgendes Manual erhalten:

Station.	Rückhöhen.	Vorhöhen.	Notizen.
	Lattenpkt.	Lattenpkt.	
I.	» 1 od. *A* 88,2	» 2 . . 34,4	Punkt 1 ist die Lattenstellung am Wasserspiegel bei *A*.
II.	» 2 . . 31,3	» 3 . . 45,9	
III.	» 3 . . 27,9	» 4 . . 64,7	
IV.	» 4 . . 12,8	» 5 . . 57,5	
V.	» 5 . . 21,4	» 6 od. *B* 112,8	Punkt 6 ist am Wasserspiegel bei *B*.

$Sa._r = 181,6$ $Sa._v = 315,3$;
ab: 181,6
bleiben 133,7 Zoll,

oder, wenn es Decimalzolle sind, 13,37 Fuss Gefälle.

1. Zusatz. Würde man von B nach A hin, also aufwärts, gearbeitet haben, so hätte die Regel: »Summa v — Summa r« dieselbe Zahl, 13,4 Fuss, [aber negativ ergeben. Ein negatives Resultat bedeutet also Steigung, ein positives: Gefälle.

2. Zusatz. Wollte man zwischen A und B eine Mühle anlegen und 1,4 Fuss Gefälle für den Ober- und Untergraben ab-, also nur 12 Fuss als lebendiges Gefälle rechnen, und weiss man, dass der Bach pro Sekunde 10 Kubikfuss Wasser schüttet, so hätte man, als disponible rohe Wasserkraft (S. Mechan. Kräfte).

$$= \frac{\text{Wasserm. p. Sek.} \times \text{Gew. v. 1 Kubf. Wass.} \times \text{Gefälle}}{\text{dividirt durch die Pferdekraft}} \text{ Pferde}$$

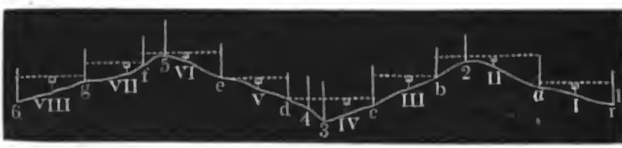
in preussischen Maassen

$$= \frac{10c' \times 66 \text{ Pfund} \times 12'}{510 \text{ Fusspfd.}} = 15\tfrac{1}{2} \text{ Pferdekraft.}$$

(Für Sachsen: 1 Kubikfuss Wasser = 49 Handelspfunden; 1 Pferdekraft = 550 Fusspfunden.)

§. 139. Soll nicht bloss die Höhendifferenz der Endpunkte eines Terrains, sondern auch die gewisser Zwischenpunkte mit angegeben werden, wie es z. B. beim Drainiren der Aecker, beim Abstecken von Be- und Entwässerungen, beim Planiren, beim Profiliren eines Terrains geschehen muss, so figurirt (verpfählt und numerirt) man erst diejenigen Terrainpunkte (1, 2, 3, 4, 5, Fig. 79), deren

Fig. 79.



Höhendifferenzen man wissen will, und arbeitet nun von dem einen Ende zum anderen ganz wie vorher, als wenn diese Zwischenpunkte nicht vorhanden wären, versäumt aber nicht, die Latte ausser in ihren beliebigen Anbindepunkten auch auf den Figurirpunkten, sobald man in deren Nähe kommt, aufstellen zu lassen. Bei der Berech-

nung thut man dann so, als wäre zunächst schon 2 der Endpunkt des Traktes; dann 3; dann 4 u. s. w.

Zahlenbeispiel zu Figur 79.

Station.	Rückhöhen r.		Vorhöhen v.		Notizen.
I.	Punkt 1.	45,4	Punkt *a*	22,2	Die blossen Anbindepunkte der Ziellatte bleiben in der wirklichen Ausführung ohne Bezeichnung oder Nummer, sind aber hier zur Erläuterung mit *a*, *b*, *c* . . bezeichnet worden. Jeder neue Lattenstand ist natürlich immer als ein Vorwärtsstand, ihre Zielhöhe als eine Vorhöhe zu betrachten, auch wenn die Richtung der Visur rückwärts geht.
II.	» *a*	60,2	» 2.	11,0	
			» *b*	74,3	
III.	» *b*	24,3	» *c*	67,1	
IV.	» *c*	15,5	» 3.	48,4	
			» 4.	19,1	
			» *d*	8,2	
V.	» *d*	38,4	» *e*	16,8	
VI.	» *e*	49,3	» 5.	14,7	
			» *f*	59,4	
VII.	» *f*	26,4	» *g*	52,4	
VIII.	» *g*	20,2	» 6.	48,8	

Zur Berechnung des Punktes 2 hat man also aus dem Manuale:

	r.		*v.*
1.	45,4	*a.*	22,2
a.	60.2	2.	11,0
	105,6		33,2

$$v - r = \left.\begin{array}{r} 33{,}2 \\ -\,105{,}6 \\ \hline -\;\;72{,}4 \end{array}\right\}$$

Punkt 2 ist d. h. 72,4 Zoll höher als Pkt 1.

Zur Berechnung des Punktes 3.

	r.		*v.*
1.	45,4	*a.*	22,2
a.	60,2	*b.*	74,3
b.	24,3	*c.*	67,1
c.	15 5	3.	48,4
	145,4		212,0

$$v - r = -\left.\begin{array}{r} 212{,}0 \\ 145{,}4 \\ \hline 66{,}6 \end{array}\right\}$$

Punkt 3 ist d. h. 66,6 Zoll tiefer als Pkt 1.

Zur Berechnung des Punktes 4 hat man in vorstehende Rechnung statt 48,4 nur 19,1 einzusetzen, oder die Summe der Vorhöhen um 48,4 — 19,1 = 29,3 Zoll zu vermindern, so dass

$$v - r = \left\{\begin{array}{r} 182{,}7 \\ -\;145{,}4 \\ \hline 37{,}3 \end{array}\right\} \text{also}$$

Punkt 4 um 37,3 Zoll tiefer als Punkt 1.

Zur Berechnung des Punktes 5 bleibt vom Manuale:

	r.		*v.*
	45,4		22,2
	60,2		74,3
	24,3		67,1
	15,5	*d.*	8,2
d.	38,4	*e.*	16,8
e.	49,3	5.	14,7
	233,1		203,2

$$v - r = \left\{\begin{array}{r} 203{,}3 \\ -\,233{,}1 \\ \hline -\,29{,}8 \end{array}\right\}$$

Punkt 5 ist d. h. 29,8 Zoll höher als Pkt 1.

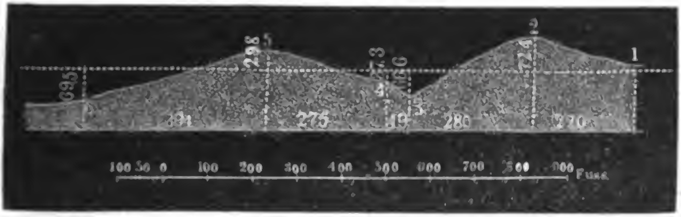
Zur Berechnung des letzten Punktes 6 dient das ganze Manual mit Ausschluss aller Zwischenpunkte 2, 3, 4, 5, so dass man hat:

Summa r $= 279{,}7$; Summa v $= 349{,}2$, also $v - r =$ $= 349{,}2 - 279{,}7 = 69{,}5$; d. h. der Punkt 6 ist 69,5 Zoll tiefer als Punkt 1.

Soll man die Figur dieses Terrainzuges durch einen

Profilriss veranschaulichen, so hat man noch die horizontalen Entfernungen von 1 bis 2; 2 bis 3 u. s. w. einzumessen und dann mittels einer durch den gewählten Grundpunkt, etwa 1, gelegten horizontalen Grundlinie die Abscissen (Längen) und die Ordinaten (Höhen und Tiefen), letztere häufig in einem 5- bis 10mal grösseren Maassstabe, in genauer Zeichnung aufzutragen. Wenn z. B. die Entfernungen 1 bis 2 = 220′, von 2 bis 3 = 280′ von 3 bis

Fig. 80.

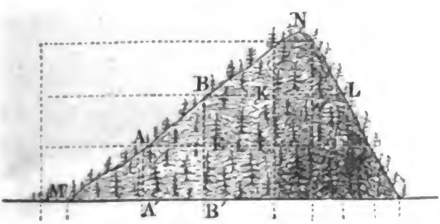


4 = 49′; von 4 bis 5 = 275′, von 5 bis 6 = 394′ waren, so gestaltet sich dieser Profilriss bei 12facher Vergrösserung der Höhen (wobei jeder Zoll zum Fusse wird), wie Fig. 80 zeigt.

§. 140. **Anderes Beispiel. An einem Hange, z. B. durch den Punkt *A*, eine Horizontale abzustecken.**

Stelle den Messknecht irgendwo zwischen *A* und *E* als

Fig. 81.

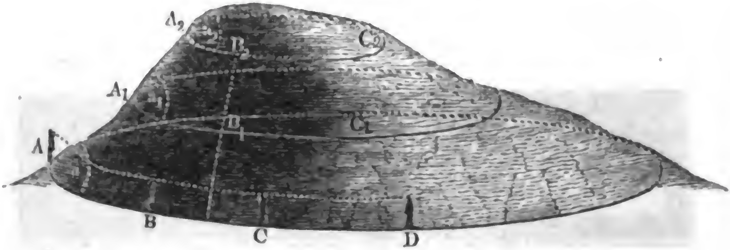


Nivellirwage und die Ziellatte in *A* auf; visire die Scheibe ein und lasse den Gehülfen mit dieser so gestellten Latte die Station *E* aufsuchen, bei welcher die Horizontalvisur wiederum die unverstellt gelassene Zielscheibe trifft. Hierauf wählt der Knecht seine zweite Station zwischen *E* und *F* und wie-

derholt von da aus ganz dieselbe Operation, als wenn E der Anfangspunkt wäre.

Zur Noth auch ohne Stativ und ohne Ziellatte ist diese Aufgabe zu lösen, wenn, wie Fig. 82 veranschaulicht,

Fig. 82.



der Beobachter den Gehülfen selbst gleich als Latte benutzt, indem er vorher seine (des Beobachters) Augenhöhe an letzterem erprobt, und diesen immer so dirigirt, dass, wenn er den so markirten Punkt desselben anvisirt, das am vorsichtig gewendeten Knechte anliegende Pendel auf 0 Grad zeigt. (Ich habe auf diese Weise mehrere Horizontalen, zur Probe um isolirte Berge herum, abgesteckt, und ganz befriedigende Resultate behufs der Anlage von Wegen und dergleichen erhalten.)

§. 141. Anderes Beispiel. Die Falllinie eines Hanges genau abzustecken; z. B. in B_1 Fig. 82.

Stecke aus B_1 nach vorigem Paragraph erst eine kurze Horizontale $A_1\,B_1$ ab und drehe den Messknecht um seinen Stift s so abwärts, dass er (wie Fig. 58 S. 154 zeigt, als Winkelkopf gebraucht) während die eine Kante der Horizontale $B_1\,A_1$ parallel ist, mit der anderen die Falllinie $B_1\,B_2$ angiebt.

Zehntes Kapitel.

Der Messknecht als Horizontal- und Feldwinkel-Messer und -Abstecker.

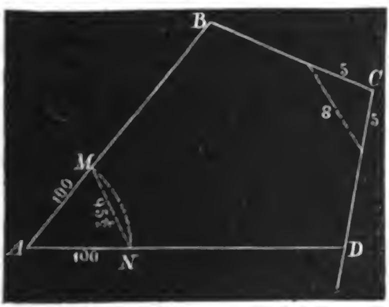
1. Winkelmessung mittels der Chorde.

§. 142. In seiner Eigenschaft als Chordentafel, als Trigonometer und als Winkelkopf stehen dem Knechte unterschiedliche Kräfte zu Gebote, die in der Ueberschrift dieses Kapitels angegebene Aufgabe zu lösen.

Das einfachste Verfahren der Messung eines Feld- oder Waldwinkels bietet uns der Gebrauch der Chordentafel des Knechtes und besteht in Folgendem.

Vom Scheitel A des Winkels aus schneidet man auf beiden Schenkeln beliebig gleiche Längen ab, wo möglich von solcher Zahlengrösse, dass sie in einem recht runden Verhältnisse zu 100 stehen, z. B. 10, 20, 50, 100 Schritte, Fusse, Ruthen u. s. w.; misst hierauf die Spannung (Chorde) MN, reducirt sie, was gleich im Kopfe geschehen kann, auf den Radius 100, sucht sie in dieser Grösse in der Hauptskala 100 der Messknechtstafel auf und nimmt aus der *Ch.*-Spalte das zugehörige Gradmaass. —

Fig. 83.



Bei Winkeln über 115° nimmt man die Messung entweder am Nebenwinkel vor, oder sucht die halbe Chorde

in der *SIN.*-Spalte auf, wo sich dann des gemessenen Winkels Hälfte ergiebt.

Für die Grösse des Winkels A z. B. hat man nach den beschriebenen Zahlen der Fig. 84 die 100fache Einheitschorde oder $ch_{100}\ A = 95{,}5$ und die Chordenspalte *Ch.* des Knechtes zeigt hierzu $A = 57^0$ (genau $57{,}05^0$). Für den Winkel C dagegen hat man die fünffache Chorde oder $ch_5\ C = 8$; daraus macht man entweder $ch_{100}\ C = 20 \,.\, 8 = 160$ oder $ch_1\ C = {}^8/_5 = 1{,}60$ und sucht diese Grössen (deren Zahlen man im letzteren Falle dadurch in die der 100fachen verwandelt, dass man in Gedanken das Komma um zwei Stellen nach rechts rückt) in der Hauptskala auf, wodurch sich in der *Ch.*-Spalte der Winkel $C = 106{,}3^0$ ergiebt.

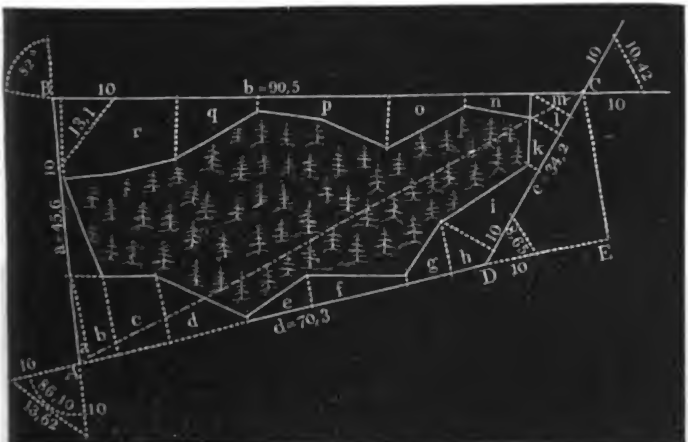
§. 143. Zusatz. Wäre das Terrain geneigt, und es wäre nicht die wirkliche, sondern die Horizontalgrösse des Winkels (der auf den Horizont reducirte Winkel) zu wissen verlangt, so muss man die drei gemessenen Linien nicht nach ihrer wirklichen, sondern nach ihrer horizontalen Länge nehmen, wie das Kapitel 12 lehrt; wobei es kommen kann, dass, wenn die Schenkel eine sehr von einander abweichende Neigung gegen den Horizont haben, die wirkliche Länge beider verschieden gewählt werden muss, damit deren Horizontalgrösse eine gleiche werde. Es kommt indess ein solches Verlangen nur höchst selten vor, da der Knecht die Horizontalgrösse der ganzen schiefen Fläche auf einmal reducirt, es also bei Aufnahmen viel gerathener ist, erst die wirkliche Grösse der schiefen Fläche, also auch ihrer Winkel zu messen, und dann jene Grösse auf den Horizontalgrund zu reduciren.

2. Winkelmessung mittels der Tangente.

§. 144. Gesetzt, es gelte der Messung des Winkels ADC oder seines Supplementes CDE, und man errichtet mit dem zum Winkelkopfe vorgerichteten Knechte in schicklicher rundzahliger Entfernung, DE, etwa $= 10$ Ruthen, ein Perpendikel EC, dessen Länge $= 12{,}4$ Ruthen sich ergäbe, so ist dies natürlich die 10fache Tangente

des Winkels CDE; so dass die Hundertfache = 124, was nach der *TANG.*-Skala auf 51,2 Grad zeigt. Und es liegt

Fig. 84.



darin sonach die Regel: Suche mittels Winkelkopfes für irgend einen Punkt E des einen Schenkels, d. h. für irgend einen Radius DE, des Winkels Tangente; bringe deren Maass auf den Radius 100 (etwa durch $\frac{CE}{DE} \cdot 100$) und suche sie so in der Tangentenskala auf. Oder: Des Winkels Loth CE dividire durch die Basis DE und suche zu der so gefundenen (Einheits-) Tangente nach Kapitel 6 das Gradmaass.

1. **Zusatz.** Bei sehr grossen Winkeln, die über des Knechtes Tangentenskala hinausgehen, sucht man den Complementswinkel DCE, indem man CE als Radius und ED als Tangente nimmt. Wäre z. B. $CE = 25$ R, $DE = 10$ R., so wäre $tg_{25}\, C = 10$, $tg_{100}\, C = 40$, wozu die Tangentenskala 21,8 Grad giebt; also wäre $< D = 90 - 21{,}8 = 68{,}2°$.

2. **Zusatz.** Auch kann man bei zu grossen Tangen-

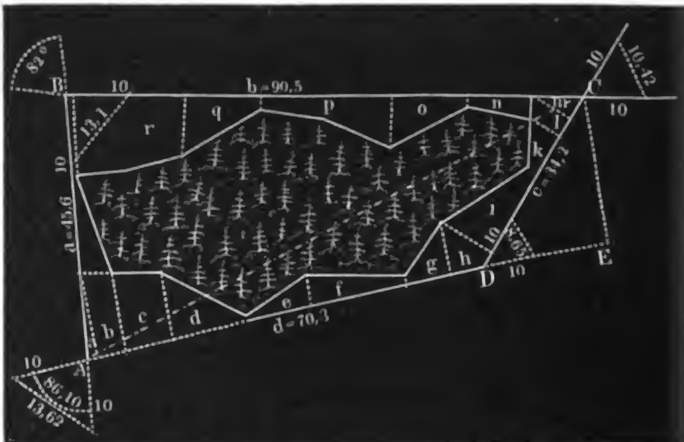
ten deren Reciproke nehmen, die dann sofort den Complementswinkel liefert. (S. Kapitel 6.)

3. **Zusatz.** Hinsichts der **Horizontalgrösse eines etwa schiefgeneigten Winkels** gilt, das im vorigen Paragraphen in dieser Beziehung Bemerkte auch hier. Beide Linien, Radius und Tangente, müssen dann in ihrer Horizontalgrösse aufgenommen werden.

3. Winkelmessung mittels des Cosinus.

§. 145. Da DE der Cosinus D für den Radius DC, also $\frac{DE}{DC}$ der Einheitscosinus ist, so folgt als **Regel:**

Fig. 85.



Suche für einen Punkt C, der eine schickliche Länge DC auf dem einen Schenkel abschneidet, auf dem anderen Schenkel mit dem Winkelkopfe den Fusspunkt E seines Lothes, reducire (Kapitel 6) diesen gemeinen DCfachen Cosinus auf den hundertfachen, suche ihn so in der *COS.*-Spalte auf, und nimm aus der Gradmaass-Skala das Gradmaass.

Zusatz. Wenn der zu messende Winkel CDE sehr gross ist, oder wenn der Cosinus DE schwer zu messen wäre, so misst man statt seiner besser das Perpendikel

CE, sieht dasselbe als Cosinus des Complementswinkels an, und bestimmt aus *cos.* $C = CE : CD$, zunächst C.

Beispiel. Auf dem Schenkel DC wurde ein von D 10 Ruthen entfernter Punkt und auf dem anderen mittels Winkelkopfes der Fusspunkt E seines Lothes bestimmt, der 7,5 Ruthen von D entfernt war. Wie gross der Winkel D?

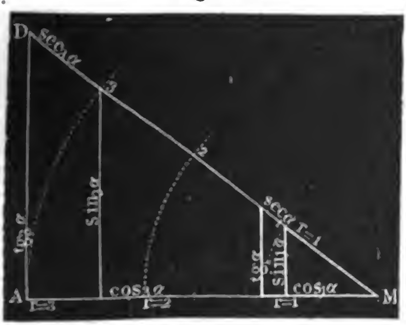
7,5 ist der 10fache *cos.* D, also *cos*, $D = \frac{7,5}{10} = 0,75$, und diese 75 Hundertel in der *Cos.*-Skala aufgesucht, deuten auf 41,3 Grad.

4. Absteckung eines nach Gradmaass gegebenen Winkels.

§. 146. Diese Arbeit vermag der Knecht in seiner doppelten Eigenschaft als Winkelkopf und Tangententafel gar leicht zu bewirken. Denn es erhellt nach Kapitel 6, dass, wenn der Scheitelpunkt M und die Lage MA des einen Schenkels gegeben ist, die des anderen einfach sich ergiebt nach der

Regel: Nimm aus der Tangenten-Skala die Einheits-Tangente des fraglichen Winkels, und in einer schicklichen Entfernung $MA = n$ vom Scheitelpunkte M entfernt errichte ein Perpendikel AD von der $n$fachen Länge der gefundenen Einheits-Tangente.

Fig. 86.



Beispiel. Im Beispiel 6 der S. 143 ward berechnet, dass, wenn von A, Fig. 85, aus eine durch C gehende Linie abgesteckt werden soll, solche mit AD einen Winkel von 16,2° bilden müsse. Man will die Lage von AC Fig. 85 durch ein 20 Ruth. von A ent-

fernt auf AD errichtetes Perpendikel bestimmen; wie lang wird letzteres zu nehmen sein?

Die $tang_1$ von 16,2° ist nach der *Tg.* Skala = 29 Hundertel, also die Länge des abzusteckenden Perpendikels 20 × 0,29 = 5,8 Ruth.

Elftes Kapitel.

Der Messknecht als Höhen und -Tiefenwinkel-Messer- und Abstecker.

Fig. 87.

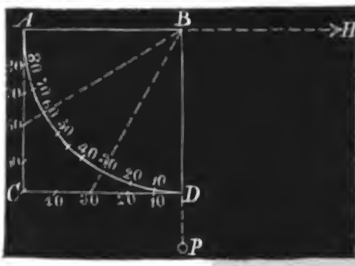
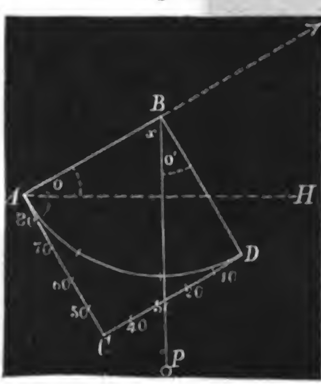


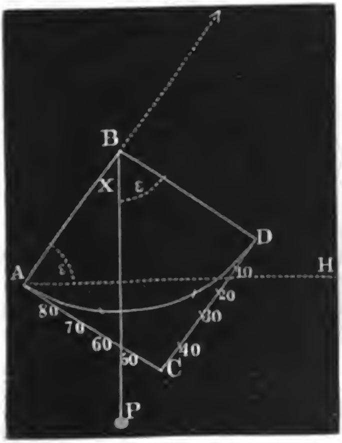
Fig. 88.



§. 147. Bedeutet AB die Visirkante der Pendelseite des Knechtes und BD die Nulllinie des Pendels, DCA aber eine bis 90 gehende, den Graden eines Quadrantenbogens AD genau entsprechende Gradtheilung, so spielt das Pendel in D auf Null-Grad, sobald die Visur AB die Horizontalrichtung AH besitzt.

Sobald sie aber mit letzterer den Höhen- oder Elevationswinkel 0 bildet, wird auch das Pendel auf 0 Grad einspielen; in Fig. 88 z. B. auf 30°, weil AB 30 Grad aufwärts geneigt gegen AH; in Fig. 89 dagegen

Fig. 89.

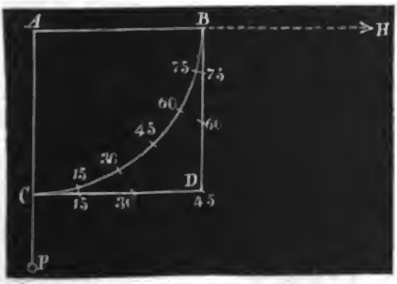


auf 50 Grad, weil die Visur *AB* mit 50 Grad Steigung empor geht.

Das vom Pendel gebildete Dreieck ist nämlich mit dem Höhendreieck immer gleichwinkelig (ähnlich).

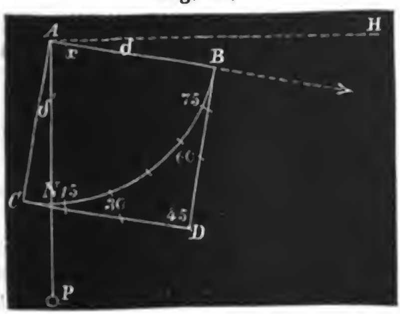
Ganz dasselbe gilt in Absicht auf die Tiefenvisuren oder die Depressionswinkel, wie Fig. 90, 91 und 92 erläutern.

Fig. 90.



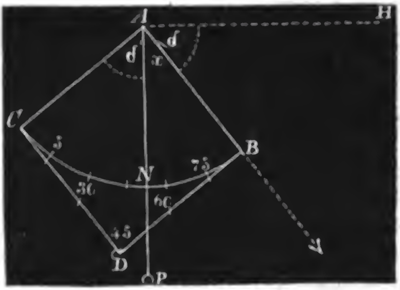
§ 148. Will oder muss man die Höhenwinkel ohne Stativ, also aus freier Hand ablesen, so hält man den Knecht, Fig. 93, mit festgestrecktem linken Arme möglichst weit vom Auge ab, und so gegen das Höhenobjekt, dass die Visirkante *LE*, wie Visir und Korn eines Gewehres, einen einzigen Punkt bilden und das Pendel in schwacher Reibung, aber noch hinlänglich beweglich, anliegt, wobei die rechte Hand zur Beruhigung des Pendels mitwirken kann. Ist diese er-

Fig. 91.



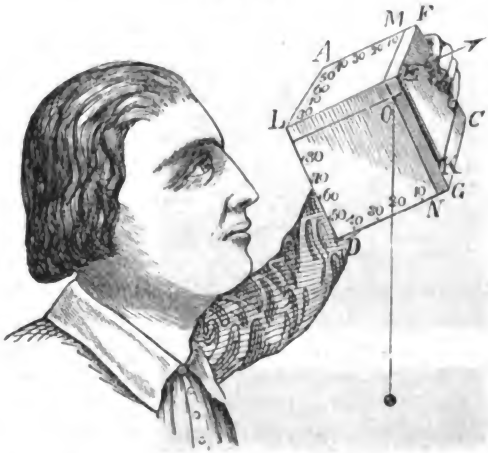
folgt, so neigt man den Knecht etwas mehr nach links bei fortwährendem Einhalten der Visur, so dass dadurch das Pendel so fest sich anlegt, dass man den Knecht bequem nun vor's Gesicht halten und seinen Pendelstand ablesen kann. Je länger der Pendelfaden, desto sicherer geschieht dies.

Fig. 92.



Wem das Wenden und gleichzeitige Festhalten der

Fig. 93.

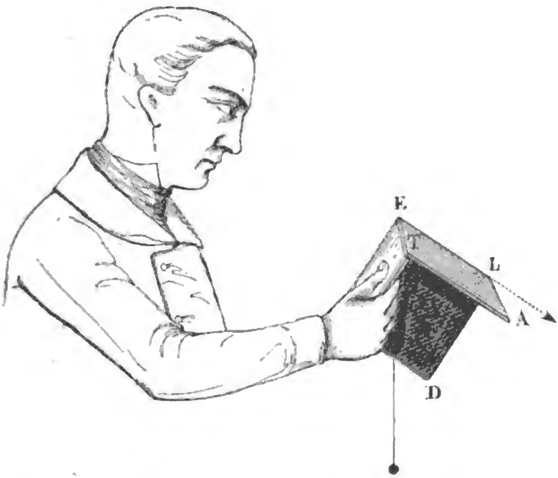


Visur nicht gelingen will, kann das Pendel dadurch fixiren, dass er die Pendelseite des Knechtes noch mit dem Daumen und Zeigefinger der rechten Hand eingabelt und mit letzterem das Pendel zu geeignetem Momente festdrückt.

§. 149. Das Beobachten eines Tiefenwinkels aus freier Hand geschieht ebenso einfach dadurch, dass

man den Knecht aus der linken Hand in die rechte nimmt und nun anstatt von L nach E, von E nach L visirt, also dieselbe Visirkante, aber in umgekehrter Richtung benutzt, so dass die Ecke E, die früher nach dem Gegenstande oder auswärts gerichtet war, jetzt nach dem Auge oder einwärts steht.

Fig. 94.



Um ohne Gehülfen die Ablesung des Pendelstandes zu bewirken, hat man hier dieselbe Praxis, wie im vorigen Paragraphen angegeben, zu beobachten. Man drückt nämlich das Pendel entweder mit dem Zeigefinger der linken Hand fest, oder, was besser ist, wendet den Knecht, bei sorgfältiger Festhaltung der Visurrichtung, so viel nach rechts, dass das Pendel zum festen Anliegen kommt und nun, vor's Gesicht gehalten, abgelesen werden kann. Wiederholungen der Visur sind jedenfalls anzurathen, wenn man sicher gehen will.

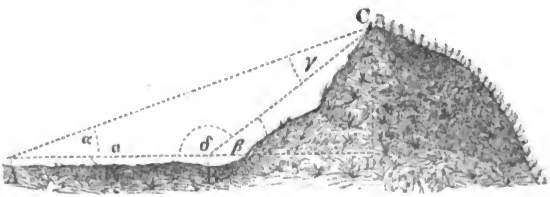
§. 150. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass, wenn man statt der rohen Visirkante die im Kapitel vom

Nivelliren gezeigte Verfeinerung der Visur anwendet, man auch nothwendig eine Verfeinerung des Resultates erzielen wird.

Wer aber die im Vorstehenden gelehrte Messung von Vertikalwinkeln ohne Stativ und ohne Gehülfen betrachtet, ohne eigene Erfahrung und Uebung in dieser Praxis zu besitzen, der dürfte leicht verleitet werden, zu glauben, dass der Knecht in diesem Bereiche seines Wirkens als ein ziemlich roher Bursche erschiene. Der Verfasser selbst hatte, bevor er seine praktische Bekanntschaft mit ihm hinlänglich zu kultiviren Gelegenheit gehabt, nicht viel Besseres erwartet.

Indess haben die Ergebnisse der vielen seit Jahr und Tag hier in Tharand von ihm und seinen Schülern ausgeführten Höhenmessungen von Bäumen, die nach erfolgter Beobachtung gefällt und direkt gemessen wurden (und die nur ausnahmsweise einen Fehler von der Grösse eines Fusses bei 90 und 100 Fuss hohen Bäumen ergaben), sowie auch viele andere ähnliche, nachträglich mit feineren Instrumenten revidirte Arbeiten, wie z. B. (s. S. 140) die Höhenbeobachtung der Berge, Fig. 95, überzeugt, dass der Knecht,

Fig. 95.

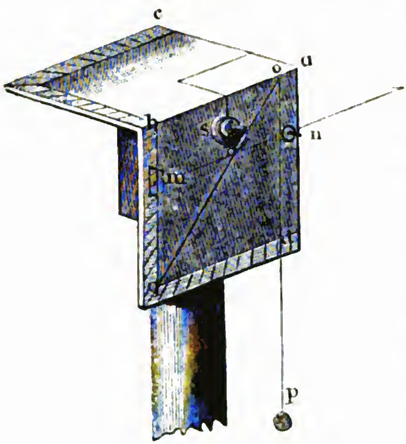


obiges Vorurtheil zu widerlegen, wirklich ganz Achtungswerthes leistet. Denn **wer nur die oben gelehrte Praxis ordentlich befolgt, dabei den Arm möglichst ausstreckt, den Knecht also möglichst weit vom Gesicht abhält und das Pendel mit ge-**

hörigerVorsicht zum Festlegen bringt, braucht, selbst bei nicht ganz ruhigem Wetter, keinen Gehülfen zur Pendelablesung, und nicht mehr als zwei, allerhöchstens drei Ablesungen, um einen Höhen- oder Tiefenwinkel bis auf ¼ Grad genau zu beobachten.

§. 151. Bedienen wir uns hingegen des S. 154 oder des S. 156 beschriebenen Stativstockes mit der hier anschaulich gemachten Weise des Knechtes, so brauchen wir selbst stilles Wetter nicht, indem wir, bei Vorhaltung einer Mütze oder dergl. während der Pendelablesung, letztere bis zu ⅕ Grad gar wohl bewirken können.

Fig. 96.



Als die zweckmässigste Einrichtung ist mir hierbei die erschienen, wo die Visirebene, nach S. 163 regulirt, rechtwinkelig zur Linie *od*, wie z. B. *mn*, Fig. 96, und statt des Diopters *m* eine zweite Visirzwecke, wie Fig. 97 (a. f. S.) zeigt, gewählt ist.

§. 152. Die Beobachtung eines Höhenwinkels, einer Elevation, mittels des Stativs und wobei der Stift *m* als Visir, und *n* als Korn gebraucht wird, ist nach dem bisher bereits Mitgetheilten selbstverständlich. Für die eines Tiefenwinkels wird der Stock um seine Achse gedreht, Fig. 98 und *a* (oder *n*) als Visir und *b* (oder *m*)

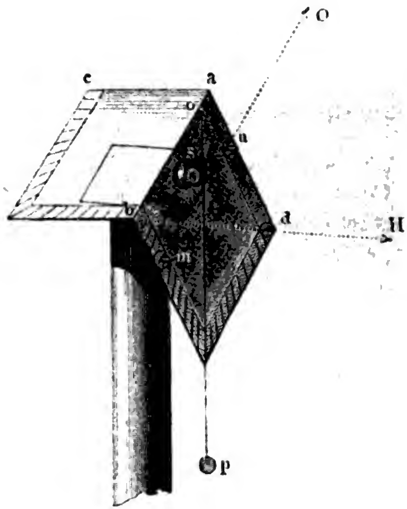


Fig. 97.

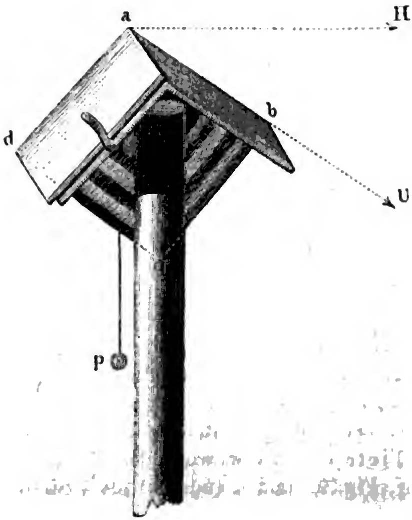
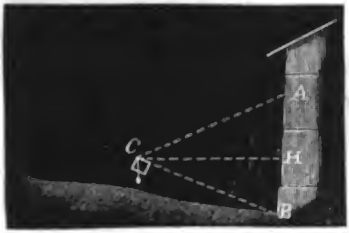


Fig. 98.

als Korn genommen, wo dann der Pendelstand eben auch sofort die Depression anzeigt.

Fig. 99.



Beispiel. Zeigte das Pendel des in *C* eingesteckten Stativknechtes, als die Visur *mn* (Fig. 99) nach *A* gerichtet wurde, in der *G.*-Skala 27,3 Grad; und als die Visur *nm* nach *B* gerichtet wurde, 21,4° so ist der Vertikalwinkel $ACB = 27{,}3 + 21{,}4 = 48{,}7$ Grad.

§. 153. Messung von Steigungs- und Neigungsprocenten.

Dass in beiden Fällen der vorigen Winkelmessungen oder Visuren das Pendel in der Tangenten-Skala auch sogleich die Tangente der Elevation oder Depression anzeigt, ist von besonderer Bequemlichkeit, wenn es gilt, nicht sowohl den Winkel, sondern das Verhältniss der Steigung oder Neigung zu beobachten und in Procenten auszudrücken; denn die Regel heisst ganz einfach: Richte die Visirkante zu der zu beobachtenden Neigung parallel und lies den Pendelstand in der Tangentenskala ab. Beispiele siehe im §. 155.

§. 154. Die Absteckung eines Steigungsverhältnisses mit dem Knechte ist nicht minder einfach. Drückt man das letztere in Hunderteln aus und stellt den Messknecht so, dass das Pendel auf diese Zahl in der Tangenten-Skala einspielt, so giebt die Visur *mn*, oder, wenn es Depression ist, *nm* Fig. 97 die verlangte Neigung. Bei Absteckung eines nach Graden gegebenen Höhen- oder Tiefenwinkels ist das Verfahren bloss dadurch anders, dass der Einspielpunkt des Pendels nicht durch die *TANG.*-, sondern durch die Winkel-Skala bedingt wird.

§. 155. Beispiele zu den vorhergehenden Paragraphen.

1. Beispiel. Das Steigungsprocent einer Strasse oder Hanges ist wie gross, wenn das Pendel, nach Fig. 100, aus freier Hand, oder auch mittelst des Sto-

Fig. 100.



ckes aufgestellt, bei der Höhen- oder Tiefenvisur in der Tangenten-Skala auf den Strich $4^1/_2$ einspielt? Antwort: $4^1/_2$ Procent, oder: auf je 100 Fuss Horizontallänge hat die Strasse $4^1/_2$ Fuss Steigung.

2. Beispiel. Man wünscht das Steigungsprocent des Hanges *CB* in Bezug auf die volle schiefe Länge zu wissen.

Auflösung. Beobachte den Pendelstand bei der Visur *C'D'* nach Gradmaass, und suche zu diesem Gradmaasse in der linken Ecke den Sinus. Gesetzt, das Pendel zeige $10^1/_2{}^0$,. Auf der anderen Seite ergiebt sich der Sinus von $10^1/_2{}^0 = 8^1/_4$, also ist das Steigungsverhältniss $8^1/_4$ Procent oder auf jede 100' wirkliche Länge des Hanges steigt derselbe um $8^1/_4$' an.

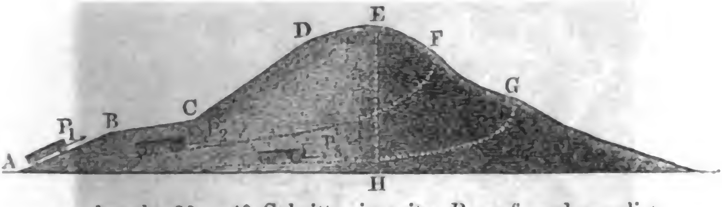
Zusatz. Für scharfe Augen auch gleich mit dem Pendel an der Secantenspalte des äussersten Randes abzulesen und dann *Sec.* : *Tang.* = 100 : Steigproc.

3. Beispiel. An einem Hange hinauf einen Weg *AG* auf stetig $4^1/_2$ Grad Steigung abzustecken.

Stelle den Messknecht in *A* mit seinem Stativstocke auf. Mache an einem zweiten Stocke (oder einer Latte) ein Zeichen, dessen Höhe der Visirhöhe des Stativs entspricht. Stecke denselben in einem 20—40 Schritte entfernten Punkte P_3, der muthmasslich die verlangte Elevation gegen *A* hat, ein, und visire seine Marke an. Dabei wird der Pendelstand in der Gradmaass-Skala

zeigen, ob P_3 noch auf- oder abwärts zu berichtigen ist. Nachdem dies geschehen, stellt sich der Mess-

Fig. 101.

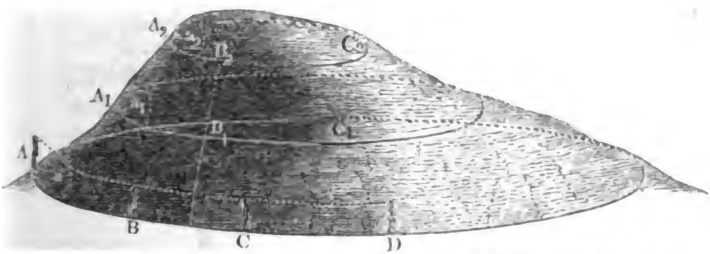


knecht 20—40 Schritte jenseits P_3 auf und regulirt seine Station selbst mittels der Tiefenvisur *a b* Fig. 99, bis bei letzterer das Pendel wieder $4\frac{1}{2}^0$ zeigt; und sobald dies geschehen, wird ein neuer Lattenstand ganz wie beim ersten aufgesucht. Dass die Benutzung eines Gehülfen hier wesentliche Dienste leistet, ist unschwer einzusehen; doch geht es eben auch ganz allein.

4. Beispiel. Den Neigungswinkel eines Hanges z. B. bei B_1 zu beobachten.

Stecke nach S. 176 erst die Falllinie ab und beobachte dann deren Elevation nach S. 184.

Fig. 102.

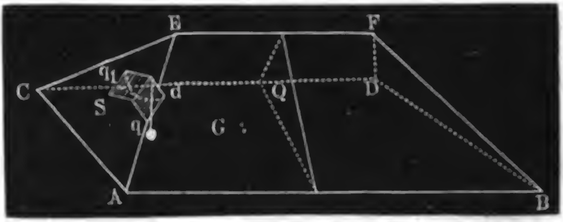


5. Beispiel. Den Neigungswinkel einer schiefen Seitenfläche *S* eines Körpers gegen seine horizontale Grundfläche *G* zu finden.

Stellt man den Knecht mit seinen Unterkanten *dq* und dq_1 so auf die Fläche, dass die Ecke *d* gerade weit genug vorspringt, um dem nöthigenfalls zu verkürzen-

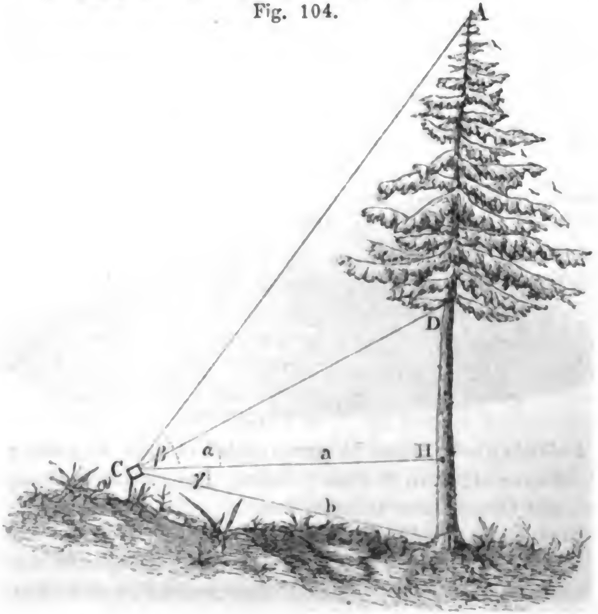
den Pendel Spielraum zu verschaffen, so ist qd nahe die Falllinie und das Pendel giebt den Fallwinkel, d. h.

Fig. 103.



den Neigungswinkel von S gegen die Horizontalfläche G; und sein Complement den Neigungswinkel in Bezug auf die Vertikalebene oder bezugs des Normalquerschnitts Q. Spielt das Pendel auf 25°, so wäre die Neigung von S gegen $Q = 90 - 25 = 65^\circ$.

Fig. 104.



6. Beispiel. An einem Hause oder Baume od. dgl. eine Höhen-Tangente oder einen Höhenwinkel abzustecken; z. B. den Punkt D zu finden, dessen Oberhöhe $HD = 26$ Procent der Standweite CH ist, oder dessen Elevation die natürliche Tangente 0,26 hat.

Auflösung. Stelle den Knecht in C so, dass bei anspielendem Pendel dasselbe auf 26 (Hundertel) der *TANG.*-Skala und dabei die Visur die Stammachse trifft; dann schneidet dieselbe den gesuchten Punkt D an.

Zusatz. Ganz dasselbe Verfahren findet (in entgegengesetzter Stellung des Knechtes, Fig. 99 statt, wenn eine Tiefentangente oder ein Tiefenwinkel abzustecken wäre.

Zwölftes Kapitel.

Der Messknecht als Horizontalreductor geneigter Linien und Flächen.

---

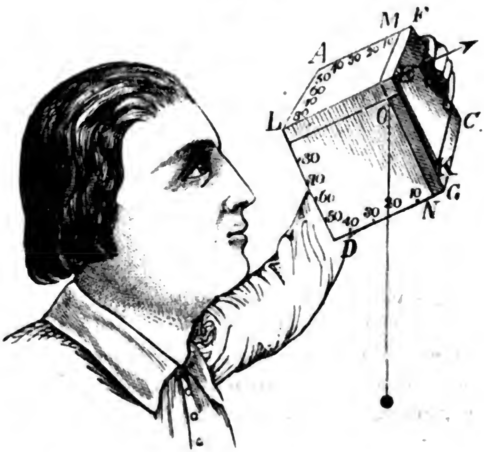
§. 156. Wegen ihres häufigen Vorkommens und ihrer praktischen Selbstständigkeit einer-, und wegen ihrer ganz unabhängigen Auflösung durch den Knecht andererseits ist diese Aufgabe zum Gegenstande eines besonderen Kapitels gemacht worden, obwohl sie streng genommen als eine specielle Anwendung des Knechtes in seiner vereinten Eigenschaft als Trigonometer und als Höhenwinkelmesser erscheint. Denn dass die Horizontaldistanz $CD = EA = C'D'$ etwas Anderes

Fig. 105.



nicht als der gemeine Cosinus des Winkels *ACD* ist, erhellt schon aus den ersten Paragraphen des trigonometrischen Kapitels. Dieser gemeine, hier *CA*fache, Cosinus findet sich indess, wie das genannte Kapitel uns lehrt, indem wir den natürlichen mit dem Radius *CA* multipliziren. Des Knechtes Pendel giebt uns aber, wie die Winkel und Tangenten, eben so direkt in der *COS.*-Skala die hundertfachen Cosinusse oder was dasselbe ist, die Einheitscosinusse im Procentsatze an. Man kann also den Faktor zur Horizontalreduction sofort beobachten und ablesen, ohne sich um Winkel und Tangenten zu bekümmern. Dadurch aber erscheint der Knecht als ein ganz direkter Horizontalreductor. Beim Beobachten und Ablesen eines Cosinus aus freier Hand hat man natürlich dieselben Regeln wie beim Mes-

Fig. 106.



sen eines Vertikalwinkels (Seite 184) zu beachten, nur mit dem Unterschiede, dass der Pendelstand nicht in der Winkelgrads-, sondern *COS.*-Skala abgelesen wird. Uebrigens wird die Anwendung des im 8. Kapitel beschriebenen Stativstockes auch hier von Nutzen sein.

Soll aber eine Secante (dafern man nicht die feine Secan-

Fig. 107.

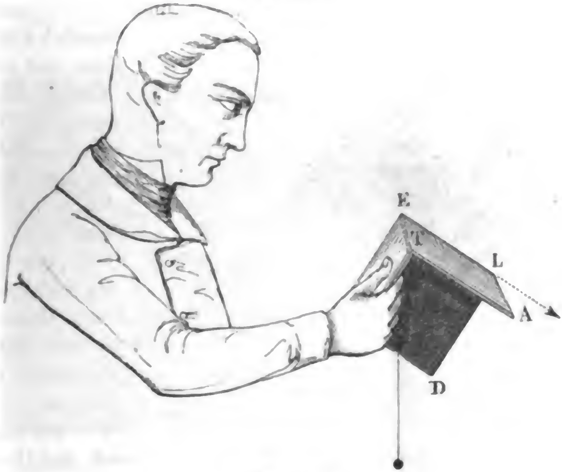
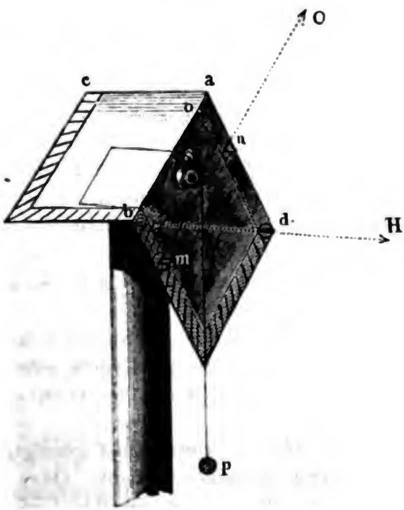
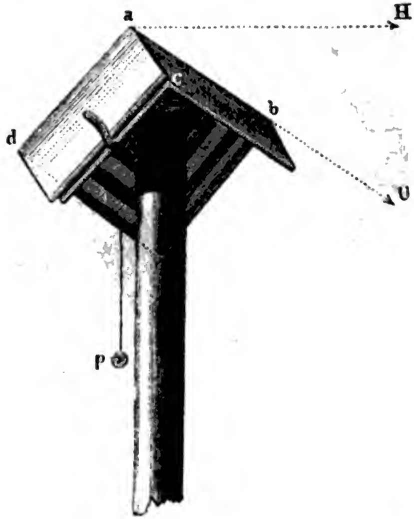


Fig. 108.



tenskala am äussersten Rande der Pendelseite benutzen kann), beobachtet werden, so hat man erst das Gradmaass des Pendelstandes abzulesen und dies in der Gradskala der Secantentabelle auf der Fläche *bc* aufzusuchen.

Fig. 109.



§. 157. Um uns mit kürzeren Worten leicht verständlich zu machen, wollen wir die auf den Horizont reducirte Grösse einer schiefen Linie oder Fläche kurzweg deren Grund, und jene in Bezug auf diesen die Oberlinie resp. Oberfläche, sowie die Herleitung der Grundgrösse aus der Obergrösse die Grund- und das Umgekehrte die Auf-Reduction nennen. Das Multipliziren einer schiefen Länge l mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels α bezeichnen wir kurzweg mit: Cosinuiren; und ebenso das Multipliziren einer Liniengrösse mit einer Secantenzahl: das Secantiren.

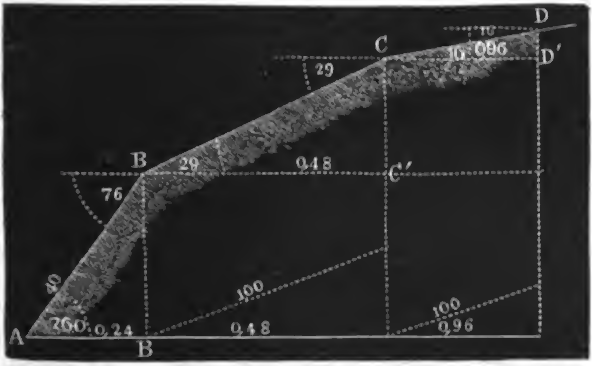
Mit Rücksicht hierauf und auf Kapitel 6 lassen sich nun die hier einschlagenden Sätze und Regeln sehr kurz fassen.

§. 158. Grund- und Aufreduction einer geraden Linie.

1) Der Grund $AB_1 = l$ einer schief geneigten Linie $AB = L$ ist deren gemeiner Cosinus. Oder jede Oberlinie L verhält sich zu ihrem Grunde l wie 1 zum (na-

türlichen) Cosinus ihres Neigungswinkels α; also $L : l = 1 : cos_1\,\alpha$, woraus $l = L \times cos_1\,\alpha$, was so

Fig. 110.



viel heisst, als: die Länge der Oberlinie multiplizirt mit dem Cosinus ihrer Neigung giebt den Grund; oder: der Grund ist die cosinuirte Oberlinie.

2) Der Grund verhält sich zu seiner Oberlinie wie 1 zur Secante des Neigungswinkels oder $l : L = 1 : sec.\,\alpha$, woraus $L = l\ sec.\,\alpha$, oder (weil $sec.\,\alpha = \frac{1}{cos.\,\alpha}$), $L = l : cos.\,\alpha$ (wie auch aus 1 folgt). Der Grund, dividirt durch den Cosinus der Elevation oder multiplizirt mit der Secante giebt die Oberlänge. Die Oberlinie ist der secantirte Grund. Da des Messknechts Pendel aber die Cosinuse ohne Weiteres durch seine *COS.*-Skala (direkt in Hunderteln, durch Schätzung meist bis aufs einzelne Tausendtel) angiebt, so lassen sich obige Sätze specifisch für die Messknechtspraxis in folgende beide Regeln zusammenfassen.

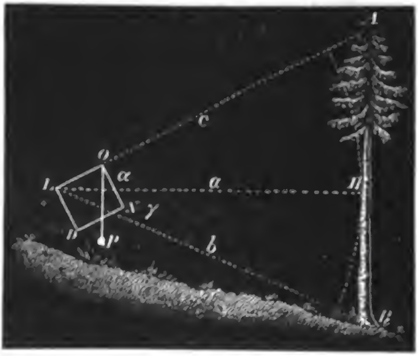
3) Um den Grund l einer geneigten Oberlänge L zu finden, beobachte an der *COS.*-Skala den Reductionsfaktor ihrer Neigung, multiplizire jenen damit und schneide 2 (wenn man

den *COS.* in 3 Ziffern oder Tausendteln abgelesen hat, 3) Decimalstellen vom Produkte ab.

4) Um die Oberlänge *L* eines bekannten Grundes zu finden, dividire dessen Grösse *l* durch den abgelesenen *COS.*; oder: Beobachte den Elevationswinkel, nimm aus der *SEC.*-Spalte die diesem Winkel zugehörige Einheitssecante und multiplizire damit die Horizontalgrösse.

§. 159. Beispiele.

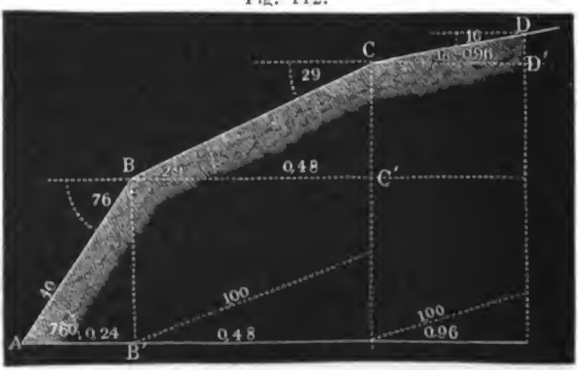
Fig. 111.



1. Beispiel. Das Messband giebt die Länge $LB =$ 60 Fuss und das Pendel bei der Tiefenvisur nach *B* in der *COS.*-Skala 85, so ist die Horizontaldistanz oder der Grund *LH* $= 60 \times 0{,}85 = 51{,}00$ Fuss.

2. Beispiel. Der Grund *AB'*, Fig. 112, der Böschung

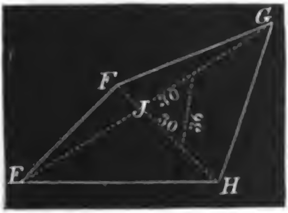
Fig. 112.



AB sei $= 20$ Fuss; und das Pendel zeigt beim Visum AB in der *COS.*-Skala den Faktor 62, so ist die Oberlinie $AB = \frac{20}{0,62} = 32,26$ Fuss.

3. **Beispiel.** Die Figur $EFGH$ liege an einem Abhange. JG hat eine Elevation von 30, JH von 20 Graden. Auf jedem dieser Schenkel des Winkels J soll nun eine solche Länge abgesteckt werden, dass die Horizontallänge jedes Schenkels 30 Ruthen beträgt. Wie lang ist jede zu wählen?

Fig. 113.



Dem ersteren Grunde von 30 Ruthen gebührt eine Oberlinie von $30 : cos.\ 30^0 = 30 : 0,866 = 34,6$ Ruthen; oder $= 30 \times sec.\ 30^0 = 30 \times 1,155 = 34,65$ Ruthen.

Dem anderen Grunde von 30 Ruth. dagegen eine von $30 : cos.\ 20 = \frac{30}{0,94} = 31,9$ Ruthen; oder $= 30 \times sec.\ 20^0 = 30 \times 1,064 = 31,92$ Ruthen.

4. **Beispiel.** Wie gross ist der vorige Winkel J in seiner Horizontalprojection, wenn die Schenkel in der eben berechneten Länge abgesteckt wurden und dabei sich statt der Chorde eine Verbindungslinie von 40 Ruth. mit 10^0 Elevation ergab?

Der Grund dieser Linie ist $= 40\ cos.\ 10^0 = 39,4$.

Der auf die Horizont- oder Grundfläche reducirte schiefgeneigte Winkel J hat also die $ch_{30}\ J = 39,4$ oder die Einheitschorde $ch_1\ J = \frac{39,4}{30} = 1,31$ oder Hundertchorde 131 und dazu nach der Sinustafel (indem der Hundert-Sinus $\frac{131}{2} = 65,5$ auf den $< 41,0^0$ zeigt) der $< J = 82,0^0$.

1. Grundreduction einer mehrfach gebrochenen oder krummen Linie.

§. 160. Selbstverständlich bildet sich aus Vorigem die Regel: 1) Ueberziehe die krumme Linie ACB (Fig. 114) mit

schicklichen geradlinigen Sectionen und reduzire jede derselben nach Regel 3. S. 197.

1. Beispiel. Zur Messung der Distanz AB' über den Hügel ABC waren 6 Kettenzüge erforderlich. Die

Fig. 114.



Kette war 5 Ruthen, der letzte Zug nur 3 Ruthen lang und die für die verschiedenen Züge ab, bc, cd, de, ef, fg von den Kettenziehern beobachteten (hundertfachen) Cosinuse waren 86, 92, 98, 99, 90 und 87. Dann ist die Länge des Grundes = 5 (0,86 + 0,92 + 0,98 + 0,99 + 0,90) + 3 × 0,87 = 23,25 + 2,61 = 25,86.

§. 161. Die ganze Länge eines Bergrückens od. dgl. sei L, und bestehe aus der Sektion L_1 mit der Neigung α_1, L_2 mit α_2, L_3 mit α_3, L_4 mit α_4, so ist nach §. 158 sein Horizontalgrund $l = L_1 \cos. \alpha_1 + L_2 \cos. \alpha_2 + L_3 \cos. \alpha_3 + L_4 \cos. \alpha_4$. Denkt man sich über demselben Grunde l einen Rücken von gleicher Länge L, aber mit einerlei (mittlerer) Neigung α, so ist $l = L \cos. \alpha$ und demnach auch $= L_1 \cos. \alpha_1 + L_2 \cos. \alpha_2$ u. s. w., woraus

$$\cos. \alpha = \frac{L_1 \cos. \alpha_1 + L_2 \cos. \alpha_2 + L_3 \cos. \alpha_3 + L_4 \cos. \alpha_4,}{L \text{ oder } L_1 + L_2 + L_3 + L_4}$$

in welcher Formel der Satz liegt.

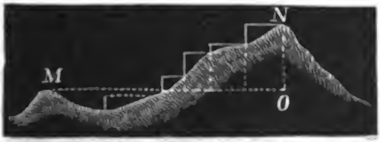
2) Der mittlere Cosinus oder Grundreductionsfaktor wird gefunden, wenn man sämmtliche Sectionslängen mit ihren Reductionsfaktoren (Cosinusen) multiplizirt und die Summen dieser Produkte durch die ganze Länge der Oberlinie dividirt. Und:

3) Der Grund eines krummen oder mehrfach gebrochenen Tractes findet sich durch Mul-

tiplikation seiner Oberlänge mit dem nach 2) gefundenen mittleren Reductionsfaktor oder Cosinus.

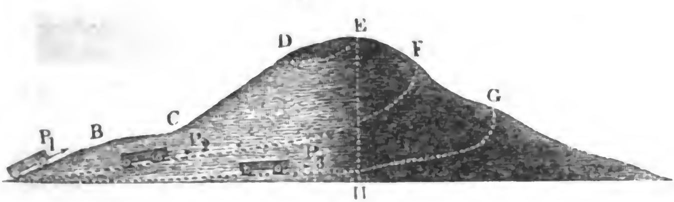
§. 162. Den nach 2) gefundenen Winkel α kann man auch den mittleren Cosinuswinkel oder mittleren Grundreductionswinkel nennen. Und wie man zur Vermeidung der in Fig. 115 angedeuteten, so mühsamen, langweiligen und leicht fehlerhaften Staffelmessung in bergigtem Terrain für jeden Kettenzug den Reduktionsfaktor ablesen kann und soll, ist aus Kapitel 11 hinlänglich zu ersehen. Sehr sicher, bequem und fördersam wird diese Messung, wenn jeder Kettenstab mit einem nach Fig. 59 S. 154 daran befestigten Messknechte versehen ist und jeder Kettenzieher den Cosinus abliest, so dass jeder Reductionsfaktor und Neigungswinkel einmal als Höhen-, einmal als Tiefenwinkel beobachtet und demnach kontrolirt wäre.

Fig. 115.



Beispiel. Von einem geschlängelten Bergwege AF hatten

Fig. 116.



augenscheinlich 60 Procent der Länge den Cosinus- oder Reductionsfaktor 96, 30 Procent den Faktor 90 und 10 Procent den Faktor 99. Wie gross ist dessen mittlerer Cosinus oder Cosinuswinkel und das Verhältniss seiner Oberlänge zur Grundlänge?

$$\cos. \alpha = \frac{60 . 96 + 30 \times 90 + 10 \times 99}{100}$$

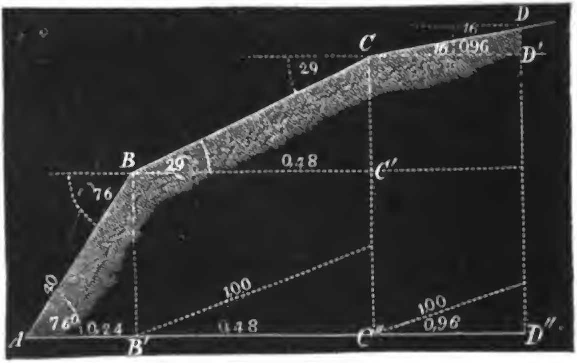
$$= 57,60 + 27,00 + 9,90 = 94,5.$$

Es ist also der mittlere Reductionsfaktor oder Cosinus = 94½ (Hundertel), der zugehörige mittlere Grundreductionswinkel (nach Winkelskala) = 19,1 Grad und der Grund also 94½ Proc. der Totallänge; oder das Verhältniss dieser zu jenem = 100 zu 94½.

2. Aufreduction eines mehrfach gebrochenen oder krummen Zuges.

§. 163. Soll aus dem gegebenen Grunde *AD''* die Länge des Aufrisses *ABCD* abgeleitet werden, so folgt

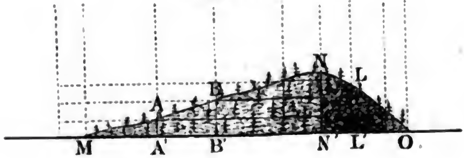
Fig. 117.



eben so von selbst, wie im vorigen Paragraphen, durch Anschauung der Figur 117 die Regel:

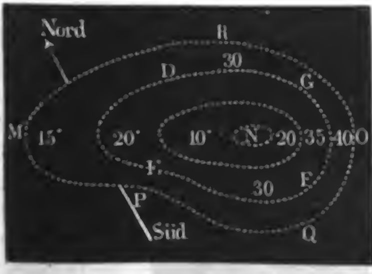
1) Theile den Grund in beliebige Sectionen, der Art, dass die einer jeden zugehörige Oberlinie als gerade angesehen werden kann (wie *AB'*, *B'C''*, *C''D''* in Fig. 117 und *MA'*, *A'B'*, *B'N'* etc. in Fig. 118), und

Fig. 118.



reducire jede Section einzeln nach 4 §. 155 (durch Secantirung oder umgekehrte Cosinuirung).

Fig. 119.



Beispiel. Aus einer Bergkarte die wirkliche Länge *MN* eines Hanges oder Rückens abzuleiten.

Die Auflösung ist schon im Kapitel Trigonometrie im 11. Beispiel S. 134 gegeben.

§. 164. Bezeichnen wir die einzelnen Sectionslängen des Grundes l mit l_1, l_2, l_3 und die zugehörigen Elevationen mit α_1, α_2, α_3, so hat man die ganze Oberlänge $L = l_1 \sec. \alpha_1 + l_2 \sec. \alpha_2 + l_3 \sec. \alpha_3$, und wenn α den mittleren Winkel dieser Reduktion bedeutet:

$$l \sec. \alpha = L = l_1 \sec. \alpha_1 + l_2 \sec. \alpha_2 + l_3 \sec. \alpha_3 \text{ und daraus}$$

$$\sec. \alpha = \frac{l_1 \sec. \alpha_1 + l_2 \sec. \alpha_2 + l_3 \sec. \alpha_3}{l}$$

$$\left(\text{oder } \sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha} = \frac{\frac{l_1}{\cos. \alpha_1} + \frac{l_2}{\cos. \alpha_2} + \frac{l_3}{\cos. \alpha_3}}{l}\right)$$

und $L = l \sec. \alpha = l \cdot \frac{1}{\cos. \alpha}$; d. h.:

2) Der mittlere Faktor für die Aufreduction (die mittlere Secante) findet sich, wenn man die einzelnen Sectionen des Grundes durch die Secanten der zugehörenden Neigungen multiplizirt und die Summe dieser Produkte durch die ganze Grundlänge dividirt.

3) Die gesammte Oberlänge L ist gleich dem ganzen Grunde l multiplizirt mit dem nach 2) gefundenen mittleren Faktor (oder der mittleren Secante).

Beispiel hierzu siehe im Kapitel: Trigonometrie auf Seite 135.

3. Grund- und Aufreduction einer schiefen Ebene.

§. 165. Denkt man sich, *ACB*, Fig. 120, sei ein dreieckiges Stück von einer irgendwie geformten schiefen Ebene *FI*, Fig. 121, und *CD* sei die Falllinie, *BA* die auf sie rechtwinklige horizontale, *AEB* des Dreiecks Grund, so ist *CDE* ein in *E* rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel u = dem Neigungswinkel der Ebene, und dessen Basis $DE = CD \cdot \cos. u$. *DE* aber ist das

Fig. 120.

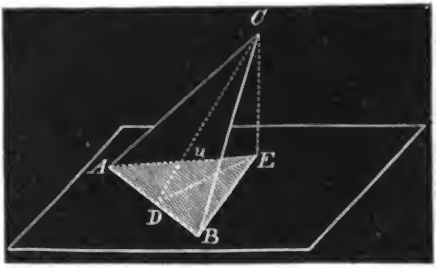
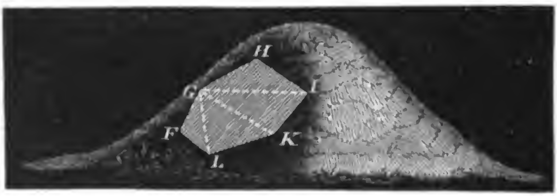


Fig 121.



Loth des Grundes *AEB*. Und da sich Dreiecke von gleicher Grundlinie (*AB*) verhalten wie ihre Höhenlothe, so ist

$$\triangle\ ACB : \triangle\ AEB = 1 : \cos.\ u, \text{ daraus}$$
$$\triangle\ AEB = \triangle ACB \times \cos.\ u, \text{ oder:}$$

Der Grund ist die cosinuirte Schiefflӓche; dies gilt aber begreiflich von jedem dreieckigen Stücke der Ebene *FI*, also auch von ihrer ganzen Figur.

Die Reduction irgend einer geneigten Ebene auf ihren Grund und umgekehrt findet sonach ganz nach denselben Gesetzen und Formeln als bei geneigten geraden Linien statt. Der dort

gebrauchte Winkel α bedeutet in diesem Falle den Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont, d. h. den Elevationswinkel der Falllinie. Wie dieser und sein Reductionsfaktor beobachtet wird, ist in Beispiel 3 Seite 199 gelehrt.

Bedeutet daher F die Grösse der Ober-, f die der Grundfläche und α den Neigungswinkel beider zu einander, so hat man nach Seite 204.

1) $f = F \times \cos. \alpha$;

2) $F = \dfrac{f}{\cos. \alpha} = f . \sec. \alpha$, oder, in die Messknechtssprache übersetzt:

3) Der Grund ist gleich der Oberfläche multiplicirt mit dem der Neigung zugehörenden Cosinus.

4) Die Oberfläche ist gleich dem Grunde, dividirt durch den der Neigung zugehörenden Cosinus oder multiplicirt mit der entsprechenden Secante.

1. Beispiel. Ein gleichmässig abhängiges Feldstück, nach Kap. 14 durch Schritte oder auch mittels der Kette, aber durch Hinziehen auf der Erde (d. h. nach seiner wirklichen Grösse), gemessen, ergab einen Inhalt von 5 Ackern oder 1500 Quadratruthen, und die Beobachtung seiner Neigung (nach S. 191 u. 187) einen Winkel von 24 Grad oder einen Cosinus = 92. Man wünscht den waagerechten Grund dieses Feldes zu wissen. — Derselbe ist = 1500 × 0,92 = 1380 Quadratruthen.

2. Beispiel. Aus einer Revierkarte berechnete sich die (Grund-) Fläche eines auf einem Hügel befindlichen Bestandes zu 3 Acker 100 Quadratruthen; und es kann der Böschungswinkel desselben, der (sorgfältig im Systeme gehaltenen) Bergschraffirung gemäss, im Mittel zu 25° angesprochen werden. Hiernach die wirkliche Bodenfläche dieses Bestandes zu ermitteln. —

Stelle das Pendel des Knechtes auf 25°, so zeigt dasselbe den Cosinus oder Reductionsfaktor zu 96,6 Procent oder = 0,966. Es ist sonach die wirkliche Oberfläche des Bestandes

$$= \frac{3 \text{ Acker } 100 \ \square\text{Ruthen}}{0{,}966} = \frac{1000}{0{,}966} = 1035 \ \square\text{R.}$$

$= 3$ Acker 135 □Ruthen.

3. Beispiel. Ein Gebäude umfasst im Grundrisse eine Fläche von 500 Quadratellen (inclus. Dachübertrag) und soll ein Schieferdach erhalten, dessen Höhe $= \frac{1}{4}$ der Tiefe (Breite) des Hauses beträgt. Wie gross ist die Dachneigung und die Dachfläche?

AC als Radius gedacht, hat man $tg_{AC} < A = CD$, also

$tg_1 < A = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} = 50$ Hundertel, welche,

in der *TG.*-Skala aufgesucht, ergeben:

1) Das Gradmaass des $< A$ oder der Dachneigung $= 26\frac{1}{2}^{\circ}$, und

2) den Reductionsfaktor $89\frac{1}{2}$ knapp oder richtig als Decimalbruch geschrieben 0,894, und mithin

3) die Dachoberfläche $= 500 : 0{,}894 = 500000 \cdot 894$ $= 558{,}2$ Quadratellen.

Und es bleibt sich gleich, ob das Dach ein Sattel- oder Giebeldach wie Fig. 122, oder ein ganzes oder ein Krüppel-Welmdach wie Fig. 123 und 124, oder ein gebrochenes wie Fig. 125 ist, wozu jedoch im letzteren

Fig. 122.

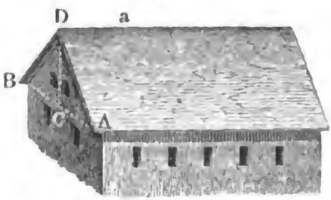


Fig. 123.

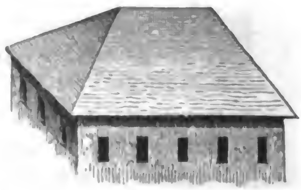
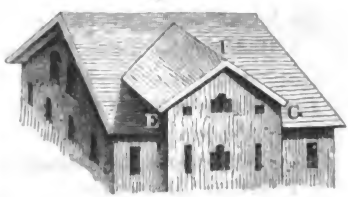


Fig. 124.



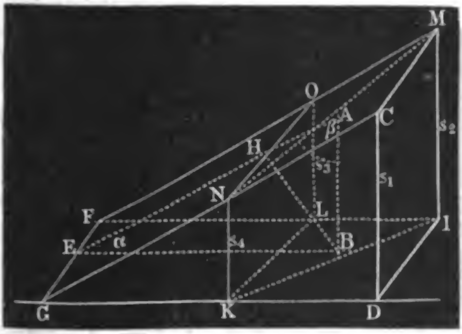
Fig. 125.



Falle wegen Uebertrags des Giebels EFG eine Kleinigkeit noch hinzukommt.

§. 166. Es ist gar nicht nöthig, sich die Grundebene immer nur als eine horizontale zu denken. Denn wenn bei nachfolgendem Körper, Fig. 126, die Oberfläche A sich zur Grundfläche B wie 1 zum $cos.\ \alpha$ verhält, so besteht dieser Satz fort, auch wenn man ihn auf die Seite legt, wo dann A und B Seitenflächen würden; oder wohl gänzlich umstürzt, wo dann A die untere Fläche würde.

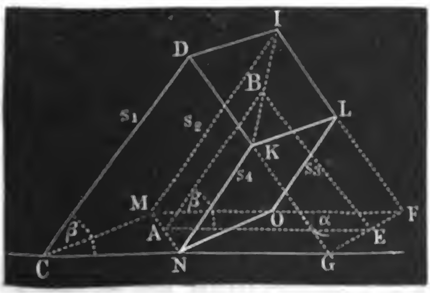
Fig. 126.



Immer ist $A : B = 1 : Cos.$ der Neigung beider zu einander.

Die Bezeichnung A als Ober-, B als Grundfläche würde in diesem Falle unpassend sein. Man muss dann, um allgemein zu bleiben, die auf B rechtwinkligen und parallelen Projektionslinien s_1, s_2, s_3, s_4 als Seitenkanten eines prismatischen Körpers, und B als dessen **Normalquerschnitt** betrachten.

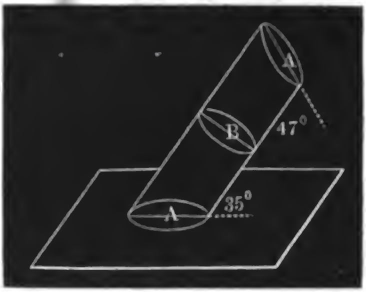
Fig. 127.



Ferner ist aus obiger Figur leicht abzuleiten, dass wenn der Neigungswinkel zwischen der schiefen Grund-

fläche A des Prismas und seinem Normalquerschnitte B $= \alpha$, dann die Neigung der Seitenkanten gegen $A = \beta$ $= 90 - \alpha$ ist, oder überhaupt, dass sich beide Winkel complementiren (zu 90° ergänzen).

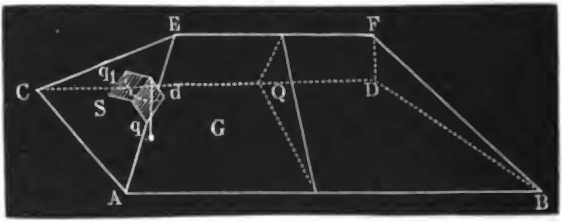
Fig. 128.



Wäre also des Körpers Fig. 128 Schiefe $= 35°$, so wäre die Neigung des Normalquerschnittes B zur Grundfläche A $= 90 - 35 = 55°$, und es wäre, wenn die Fläche B bekannt, sofort daraus abzuleiten $A = B \sec. 55°$.

§. 167. Ist die Lagerfläche G des dachförmigen Körpers Fig. 129 horizontal und AC rechtwinklig auf AB und CD, so ist der nach 5 S. 191 gemessne Neigungswinkel der Fläche S identisch mit dem Neigungswinkel der Seiten AD oder EF gegen S (s. Stereometrie); das Complement dieses Winkels drückt also die Neigung der Seitenfläche S zum Normalquerschnitte Q aus.

Fig. 129.



Beispiel. Fig. 129 stelle einen auf horizontaler Basis dachförmig aufgeschaufelten Haufen vor, an dem AB, CD und EF parallel und die eine Grundseite AC rechtwinklig zu ihnen. Wenn nun die Fläche ACE $= 20$ □Fuss und der Neigungswinkel derselben $=$ 35° gefunden wurde, so ist die Neigung von S gegen

$Q = 90 - 35 = 55^0$, und weil $Cos.\ 55^0 = 0{,}63$; so ist der Normalquerschnitt $Q = 20 \times 0{,}63 = 12{,}6$ □Fuss.

4) **Grundreduktion einer verschiedenartig geneigten oder krummen Oberfläche.**

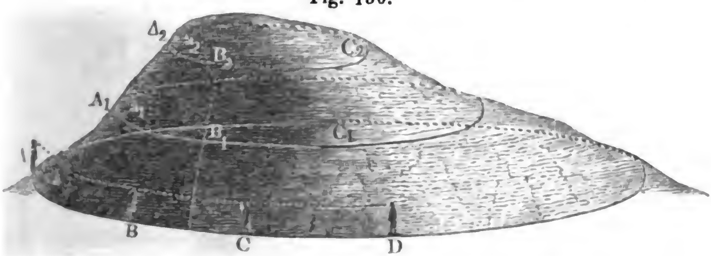
§. 168. Es bedarf nach dem eben Vorhergegangenen keiner Auseinandersetzung, dass sich die Sätze des §. 160 von der Linie auch auf die Fläche übertragen lassen. Und man hat dann:

1) Der Grund jeder unebenen Oberfläche wird gefunden, indem man sich dieselbe in ebene Sectionen zerlegt denkt, und jede derselben nach der beobachteten Neigung cosinuirt, oder
2) indem man die ganze Oberfläche mit ihrem mittleren Cosinus (oder dem mittleren Reduktionsfaktor) multiplicirt.
3) Dieser mittlere Faktor aber wird gefunden, indem man sämmtliche Sectionsgrössen mit ihren Cosinusen multiplicirt und die Summe dieser Produkte durch die Summe aller Sectionen dividirt, was sich bei Schätzungen am bequemsten dadurch gestaltet, dass man die ganze Oberfläche als 10 oder 100, oder die Sectionen nach Zehnteln oder nach Procentgrössen wählt.

1. **Beispiel** siehe im Kapitel 6 Seite 136.

2. **Beispiel.** Die Linien *ABCD* u. s. w., die keines-

Fig. 130.



wegs horizontal zu sein brauchen, grenzen eine Kuppe ab, von deren Oberfläche 50 Proc. die Neigung 15°,

20 Proc. 20°, 20 Proc. 25° und 10 Proc. 30° haben. Wie gross ist das Verhältniss der Ober- zur Horizontalfläche und wie gross letztere, wenn erstere zu 50 Morgen ermittelt worden war?

Liest man die Cosinuse nur mit 2 Ziffern ab, so hat man für den mittleren: $0{,}50 \times 96 + 0{,}20 \times 94 + 0{,}20 \times 90 + 0{,}10 \times 86 = 48 + 19{,}4 + 18 + 8{,}6 = 94$ Hundertel.

Der Grund ist also 94 Procent der Oberfläche oder $= 0{,}94 \times 50 = 47$ Morgen.

§. 169. **Aufreduction einer Grundfläche bei verschiedenartig geneigter oder krummer Oberfläche desselben.**

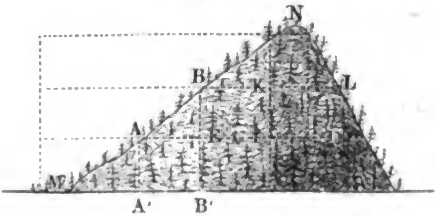
Nach Analogie des Früheren folgt von selbst als Regel:

1) Theile den Grund in solche Sectionen, dass deren zugehörige Oberflächen als eben angesehen werden können, multiplicire jene mit der entsprechenden Secante der zugehörigen Oberflächen-Neigungen und summire die Produkte.
2) Oder: Ermittle die mittlere Secante und multiplicire damit den ganzen Grund; und
3) Für die mittlere Secante: Multiplicire die Sectionsgrössen des Grundes mit den ihnen zugehörigen Secanten und dividire die Summe dieser Produkte durch den ganzen Grund. Bei Schätzungen nimm die Sectionen als Procente der ganzen Grundgrösse, wo dann die letztere Division wegfällt.

1. **Beispiel** siehe Kapitel 6 S. 135.

2. **Beispiel.** Die Karte Fig. 132 des Berges Fig. 131

Fig. 131.



habe die Grundfläche = 100 Acker ergeben und die Situation lasse erkennen, dass davon

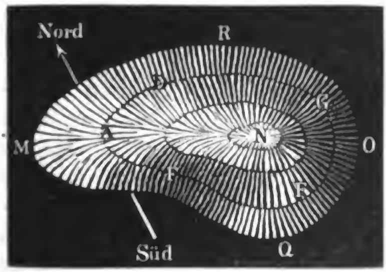
30	Proc.	über	sich	eine	Oberfläche	von	10°	Neigung
40	»	»	»	»	»	»	20°	»
20	»	»	»	»	»	»	30°	»
10	»	»	»	»	»	»	40°	»

haben. Welches Verhältniss hat hier des Berges wirkliche Oberfläche zum Grunde und wieviel Acker enthält jene?

Sucht man mittels *SEC.*-Spalte nach Regel 3 die mittlere Secante

$$\frac{30\ sec.\ 10 + 40\ sec.\ 20 + 20\ sec.\ 30 + 10\ sec.\ 40}{100},$$

Fig. 132.



welche sich (hundertfach) als 109 ergiebt, so folgt: wenn man statt 1,09 = 1,10 setzt: Der Grund verhält sich zur Oberfläche wie 1 zu 1,1 oder 10 zu 11 und es ist letztere = 100 × 1,1 = 110 Acker gross.

Dreizehntes Kapitel.

Der Messknecht als Tiefen- und Höhenmesser.

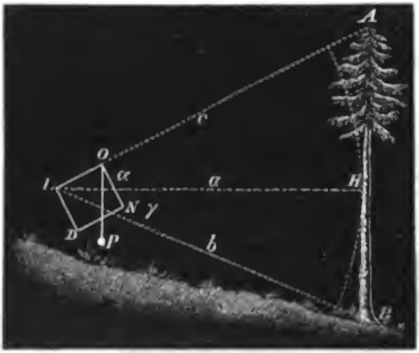
---

§. 170. Bezeichnet *AB*, Fig. 133, die vertikale Achse der zu messenden Höhe, *L* den Augpunkt des Instrumentes oder Beobachters, und *LH* die ihm entsprechende Horizontalvisur; so nenne man *A* den Scheitel-, *B* den Fuss-, *H* den Horizontalpunkt der Höhenachse, *HA* die Ober-, *HB* die Unterhöhe, α den Höhen-, γ den Tiefenwinkel; $LH = a$ (die Horizontaldistanz bis zur Höhen-

achse) die **Standlinie**, $LB = b$ die **Fuss-**, $LA = c$ die **Scheiteldistanz**.

Wer sich der Elementarsätze des trigonometrischen Kapitels erinnert, sieht auf den ersten Blick, dass, wenn

Fig. 133.



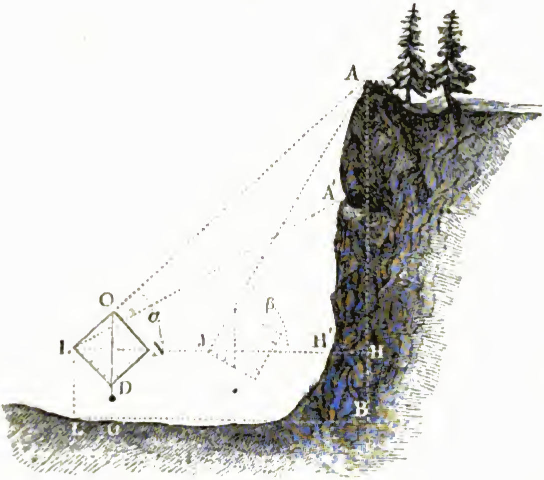
man sich die Standlinie a als gemessen und als Radius denkt, die Oberhöhe HA etwas Anderes nicht ist, als die $a$fache Tangente des Höhenwinkels, die Unterhöhe HB die $a$fache Tangente des Tiefenwinkels, und die Scheiteldistanz c die $a$fache Secante des Höhenwinkels; ferner, dass, wenn man die Fussdistanz b als gemessen und als Radius sich denkt, die Standlinie a der $b$fache Cosinus und die Unterhöhe der $b$fache Sinus des Tiefenwinkels ist; endlich, wenn man die Scheiteldistanz c als Radius annimmt, die Oberhöhe als der $c$fache Sinus, die Standlinie als der c-fache Cosinus des Höhenwinkels zu betrachten ist.

Wo man aber, wie in Fig. 134, die Höhenachse in ihren unteren Punkten nicht sehen und nicht ermessen, also von einer directen Messung der Standlinie LH oder Fussdistanz LB nicht die Rede sein kann, wird eine zweite Beobachtung in I den $< \beta$ und mit ihm die Scheiteldistanz JA, Standlinie JH und Höhe AH wie im Beispiel S. 140 bereits gezeigt, liefern.

§. 171. Da nun der Messknecht den hier eben

erörterten Erfordernissen der Höhenmessung in einer so bequemen und vollständigen Weise nachkommt, wie **keines der bisherigen Messintrumente,**

Fig. 134.



indem er uns mit einem Blicke nicht bloss das Gradmaass, sondern auch die Tangenten und Cosinuse, selbst auch die Secanten und Sinuse der hier einschlagenden Winkel misst, entweder aus freier Hand, Fig. 135 und 136, nach Anweisung der Seiten 183 — 185, oder mittels Stativs nach Anleitung von S. 187, so darf es uns nicht wundern, wenn Viele dieses Feld seiner Arbeiten als eine Hauptsache betrachten.

In wiefern sich derselbe nach Maassgabe vielfacher Messungen und Prüfungen in diesem Bereiche seiner Leistungen, selbst ohne Stativstock und Gehülfen, ganz brav gezeigt, ist bereits gelegentlich in Kapitel 11 S. 186 bemerkt worden. Wer ihn als Stativinstrument und mit Visirstiften anwendet, wird freilich bei Auflösung der nachfolgenden Probleme noch viel sicherer arbeiten.

Fig. 135.

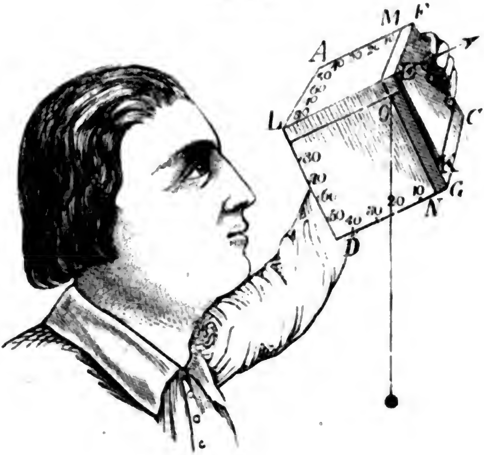
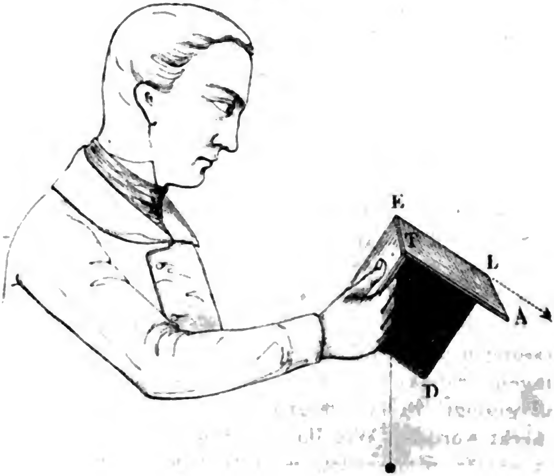


Fig. 136.



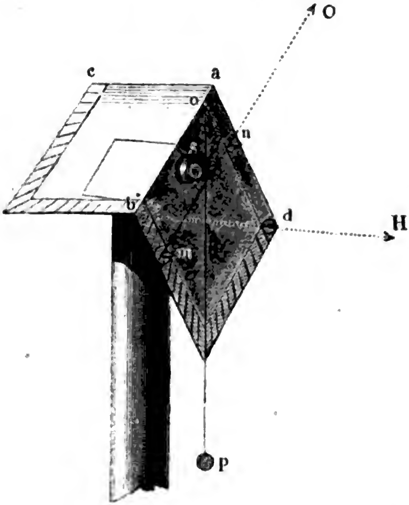


Fig. 137.

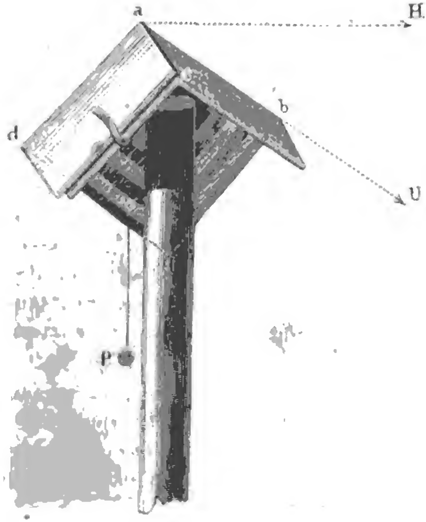


Fig. 138.

Wir erörtern zuerst die

1) Messung einer Höhe oder Tiefe, wobei die Entfernung des Messknechts von der Höhenachse messbar ist.

§. 172. Da nach dem Vorausgeschickten nicht mehr erläutert zu werden braucht, dass die Oberhöhe die mit der Standlinie multiplicirte ($a$fache) Höhentangente, und die Unterhöhe die eben so vielfache Tiefentangente ist, so können wir jetzt sogleich und kurz zu der in ein Beispiel eingekleideten Darstellung des Verfahrens uns wenden.

Die Station L Fig. 140 sei so gewählt, dass das Messband LB eine runde Länge $= b$ Fuss zeigte. Man wird nun gemäss S. 183, wenn man aus freier Hand arbeitet, oder gemäss S. 187, wenn man den Knecht an den Stock geschraubt hat, die Höhenvisur LA bewirken und statt des Winkels gleich die Tangente ablesen; ebenso, bei der Tiefenvisur LB verfahren, wobei man gleichzeitig nebst der Tangenten- auch die Cosinuszahl in **einem** Blicke abnimmt. Dann hat man:

Standlinie $a = b \times$ (Tiefen-)Cosinus;
Oberhöhe $HA = a \times$ Höhentangente;
Unterhöhe $HB = a \times$ Tiefentangente;
also ganze Höhe $= a$ (Höhentang. + Tiefentang.) $= b \times$ (Höhentang. + Tiefentang.) $\times$ Cosinus; oder als

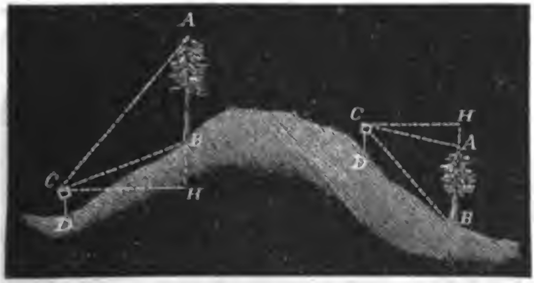
1. Regel. Wenn der Horizontalpunkt H die Höhenachse in eine Ober- und Unterhöhe zerfällt und

a) die **horizontale** Standlinie (a) gemessen wurde: Beobachte die Tangente der Ober- und der Unterhöhe und multiplicire ihre Summe mit der Standlinie (weshalb man, wenn es möglich ist, zu letzterer gern eine bequeme Länge nimmt).

b) Wenn die geneigte Fusslinie (b) gemessen wurde: Multiplicire das Produkt aus Fusslinie und Tangentensumme annoch mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Fusslinie, den man bei der Fussvisur zugleich mit der Tangente abliest.

2. Regel. Wenn der Horizontalpunkt H unter oder über die Höhenachse fällt, und im ersteren Falle — Fig. 139 links — zwei Oberhöhen, im anderen — Fig. 139 rechts — zwei Unterhöhen bildet: Verfahre ganz wie sub a

Fig. 139.

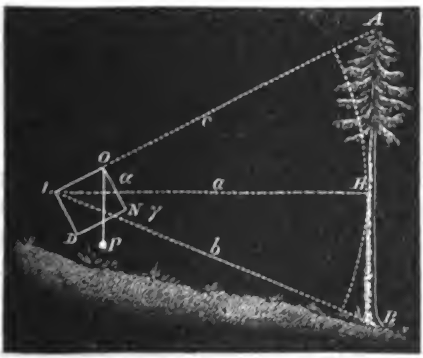


oder sub b des vorigen Falles, nur mit dem Unterschiede, dass die beiden Tangenten nicht addirt, sondern subtrahirt werden.

3. Regel. Um alle Multiplication zu ersparen, mache $a =$ 100 Einheiten (Doppelfusse, Fusse, Halbfusse) oder die Messlinie LB oder CB = der Secantenzahl, die dieser Neigung zugehört. S. Baumschätzung.

§. 173. Beispiele.

Fig. 140.

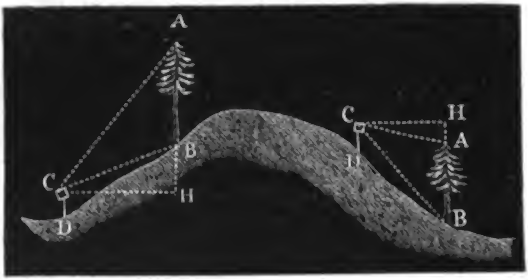


1. Beispiel. LB, Fig. 140, ist = 60 Fuss; und es zeigte das Pendel bei der Visur LA die Tangente 43 und bei der Visur LB die Tangente 48 u. den Cosinus 90. Dann hat man sofort, weil 0,43 + 0,48 =

0,91 Fuss, $AB = 60 \times 0{,}91 \times 0{,}90 = 54{,}6 \times 0{,}90 = 49{,}14$ Fuss.

2. Beispiel. (Fig. 141.) Das Messband $CB = 60$ Fuss, Pendelstand bei der Visur CA in der Tangentenskala 114, und bei der Visur CB in der Tangentenskala 44, Cosinusskala 95; so ist, weil $1{,}14 - 0{,}44 = 0{,}70$, $AB = 60 \times 0{,}7 \times 0{,}95 = 42 \times 0{,}95 = 39{,}9$ Fuss.

Fig. 141. Fig. 142.



3. Beispiel. (Fig. 142.) Um dem von unten aus unsichtbaren Wipfelpunkte des zu messenden Baumes beizukommen, wählte man einen höheren Standpunkt und fand: die Fussdistanz $CB = 100$, und bei der Fussvisur CB die Tangente 128 (Hundertel) und den Cosinus 79 (Hundertel), und bei der Scheitelvisur CA die Tangente 58 (Hundertel). Es ist also, da die Tangentendifferenz $= 1{,}28 - 0{,}58 = 0{,}70$, die Höhe oder Tiefe $AB = 100 \times 0{,}70 \times 0{,}79 = 70 \times 0{,}79 = 55{,}3$ Fuss.

2) **Messung der Höhe oder Tiefe eines Punktes (B), dessen Entfernung (CB) vom Stationspunktedes Knechtes bekannt ist.** Fig. 141 und Fig. 142. (Trigonometrisches Nivelliren.)

§. 174. Die Elevation des Punktes B, Fig. 141, über dem Horizonte H des in C befindlichen Auges ist $= BH$, und dies BH kann sowohl als die CHfache Tangente des Höhenwinkels oder als der CBfache Sinus desselben an-

angesehen werden; je nachdem wir CH oder CB als Radius desjenigen Kreises annehmen, in dessen Mittelpunkt wir uns den Elevationswinkel versetzt denken. Wir haben sonach, wenn wir unter i die Augen- oder, beim Gebrauche des Stativstockes, die Instrumentshöhe und unter C den entsprechenden Elevationswinkel verstehen:

a) Im Falle die Horizontaldistanz CH, Fig. 141, des zu messenden Punktes B bekannt ist: Höhe von B über $D = BH + CD = CH\ tg.\ C + i$, und

b) im Falle die Schiefdistanz CB gemessen war: $BH + CD = CB\ sin.\ C + i$.

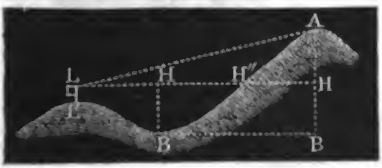
Aehnlichermaassen verhält es sich mit der Messung einer Tiefe, z. B. HB, Fig. 142, wo Tiefe von B unter $D = HB - CD$ entweder $= CH\ tg.\ C - i$ oder $= CB\ sin.\ C - i$ berechnet wird.

Wer die Rechnung mit dem Sinus in keinem Falle mag, bedenke, dass sich aus CB die Horizontaldistanz CH nach Kapitel 12 durch das Cosinuiren findet.

§. 175. Beispiele.

1. **Beispiel.** Um den Höhenunterschied zwischen den beiden Berggipfeln L' und A zu ermitteln, deren Horizontalabstand, etwa aus einer Karte, $=$ 1000 Fuss bekannt war, ward in L durch mehrmalige Beobachtung aus freier Hand die Elevationstangente $= 35$ (Hundertel) gefunden; so dass demnach $AH = 0{,}35 \times 1000 = 350$, und da die Augenhöhe von $L = 6$ Fuss anzunehmen, der Höhenunterschied 356 Fuss beträgt.

Fig. 143.

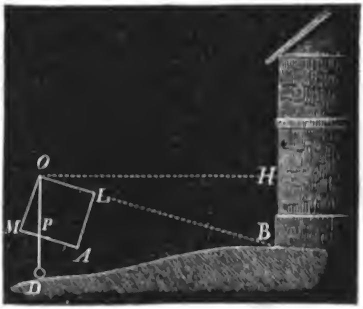


2. **Beispiel.** Das Instrument sei auf einem 4 Fuss hohen Stocke bei B' aufgestellt, die schiefe Scheiteldistanz AB' durch Messung $= 300$ Fuss gefunden, und das Pendel zeige bei der Visur nach A das Gradmaass $31{,}5^{\circ}$. Wie hoch ist A über B'?

Zu 31,5° zeigt die Sinusskala den Sinus = 0,523, also Höhe = 0,523 × 300 + 4 = 157 + 4 = 161 Fuss.

3. Beispiel. Um wie viele Fuss liegt der Fusspunkt *B* des Hauses Fig. 144, höher als der (*D*) der Station, wenn die Instrumentshöhe = 5 Fuss, das Messband *OH* = 60 Fuss und die beobachtete (hundertfache) Tiefentangente = 0,065 ist?

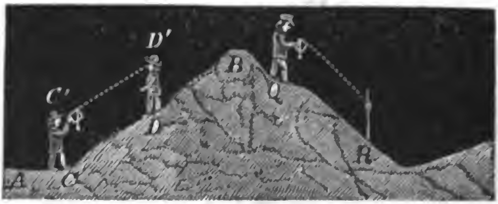
Fig. 144.



Es ist *HB* = *OH tg. O* = 60 . 0,65 = 3,9 Fuss, also, da *OD* = 5 Fuss, folgt: senkrechte Höhe von *B* über *D* = 5 − 3,9 = 1,1 Fuss.

4. Beispiel. Die schiefe Distanz *QR* sei = 40 Fuss, ihre durch Parallelvisur, wie Fig. 145 zeigt, beobachtete

Fig. 145.



Neigung 27½°; so folgt die Tiefe des Punktes *R* unter *Q* als 40facher Sinus von 27½° = 40 × 0,46 = 18,4 Fuss.

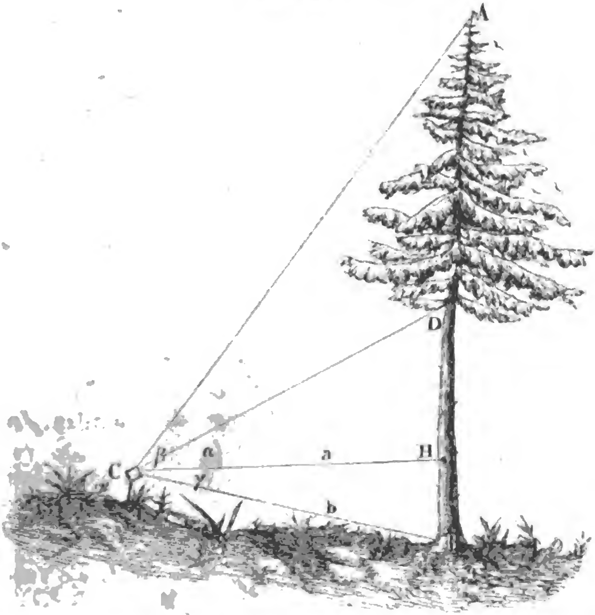
3) Absteckung einer Ober- oder Unterhöhe (*HD*, *HB* Fig. 146) für den Fall, dass die Standlinie bis zur Höhenachse genommen werden kann.

§. 176. Hat man durch directe oder durch Reductionsmessung (nach Kapitel 12) die Horizontaldistanz *CH*

ermittelt, so ist für den zu findenden Höhepunkt D die Oberhöhe HD zu betrachten als die CHfache Tangente. Es ist also $CH \cdot tg. \alpha = HD$, oder $tg. \alpha = \frac{HD}{CH}$ und, ebenso für die gegebene Unterhöhe

$$tg. \gamma = \frac{HB}{CH},$$ woraus die einfache

Fig. 146.

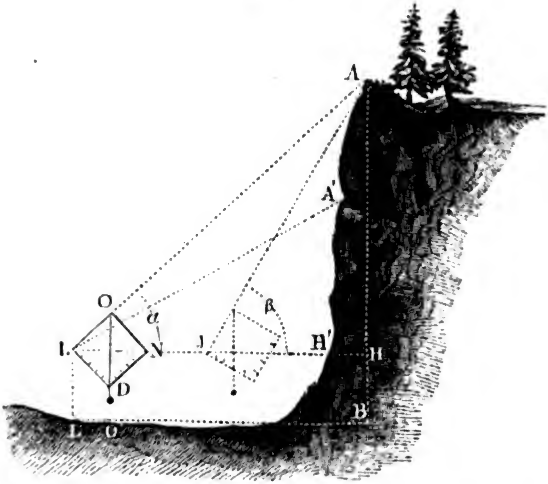


Regel: Dividire die gegebene Grösse der Ober- oder Unterhöhe durch die Horizontaldistanz des Instrumentes (durch die Standlinie) und richte letzteres so nach der Höhenachse AB, dass das Pendel in der Tangentenspalte auf den erhaltenen Quotienten (oder vielmehr dessen Hundertfaches) einspielt.

Die Visur trifft alsdann den gesuchten Höhen- oder Tiefenpunkt.

1. Beispiel. An dem Felsen Fig. 147 soll vom Stand-

Fig. 147.



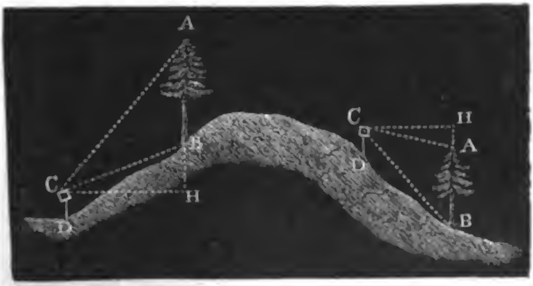
punkte L aus der Punkt A' angegeben werden, der 200 Fuss über dem Niveau von L liegt.

Durch vorläufige Schätzung hatte man den ungefähren Ort von A', und darnach dessen Horizontalentfernung $LH' = 250$ Fuss ermittelt. Es ist sonach tg_1 des Winkels $A'LH = \frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 0{,}80$. Wird die Visur des Knechts nun so gerichtet, dass das Pendel auf $TAN. = 80$ oder 38,7 Grad zeigt, so trifft sie den gesuchten Höhepunkt.

2. Beispiel. Das von B nach C, Fig. 148, gezogene Messband zeigte 50 Fuss Länge und vermöge des in C aufgestellten Knechts den Reductionsfaktor (Cosinus) 95 und die Tangente, nach Hunderteln abgelesen, 33. Wie muss man den Knecht stellen oder wie muss das Pen-

del spielen, wenn der Knecht von C aus eine Stammhöhe von 30 Fuss anvisiren soll?

Fig. 148. Fig. 149.



CH ist $= 50 \times 0{,}95 = 47{,}5$; also
$HB = 47{,}5 \times 0{,}33 = 15{,}7$ Fuss;
sonach die ganze anzuvisirende Oberhöhe $= 30 + 15{,}7 = 45{,}7$ Fuss.

Diese Höhentangente des Radius 47,5, auf die Einheitstangente reducirt, giebt $\frac{45{,}7}{47{,}5} = 0{,}96$; und es ist also der Knecht so zu stellen, dass das Pendel auf 96 der Tangenten- oder knapp 44 der Gradskala zeigt.

3. Beispiel. Um die Stärke des Stammes BA bei gewisser Länge oder Höhe durch Herunterlothen ermitteln zu können, soll vom Standpunkte C aus der Punkt D aufgefunden werden, welcher einer Stammlänge $BD = 60$ Fuss entspricht. Wie muss das Pendel bei der Visur (CD) spielen, wenn bei der Visur $CB = 60$ Fuss das Pendel den Cosinus 98 (Hundertel) und die Tangente 35 (Hundertel) zeigte?

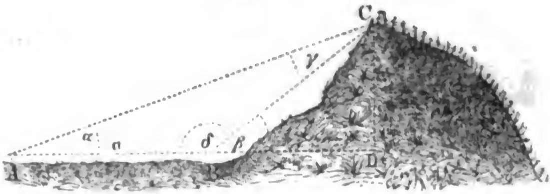
Die Standlinie CH ist $= 0{,}98 \times 60 = 58{,}8$ Fuss; also die Unterhöhe $HB = 58{,}8 \times 0{,}35 = 20{,}6$ Fuss; bleibt also für die Oberhöhe $HD = BD - BH = 50 - 20{,}6 = 29{,}4$ Fuss = Tangente für den Radius CH, also die ihr entsprechende Einheitstangente

$$\frac{HD}{CH} = \frac{29{,}4}{58{,}8} = 0{,}50.$$

Stellt man also den Knecht so, dass das Pendel in der *Tg.*-Skala |50 zeigt, so trifft die Visur einen Punkt *D*, der 50 Fuss über *B* ist.

4) **Messung einer unzugänglichen Höhe, wobei die Standlinie *AB* Fig. 150 zwar horizontal und in der Richtung nach der Höhenachse, aber nicht bis an dieselbe hingelegt und gemessen werden kann.**

Fig. 150.



§. 177. Dieser Fall ist schon auf Seite 140 als ein Beispiel der schiefwinkligen Trigonometrie behandelt und daselbst auch die Formel für die Höhe:

$$CD = h = \frac{a \ sin. \alpha \quad sin. \beta}{sin. (\beta - \alpha)} \text{ oder } = \frac{a \ ch. 2\alpha \quad ch. 2\beta}{2 \ ch. (2\beta - 2\alpha)}$$

abgeleitet worden; wozu noch die Stativhöhe des Knechts zu rechnen ist.

Beispiel. Es sei $AB = 200$ Fuss, $< \alpha = 32{,}3$ Grad und $\beta = 36{,}5$ Grad und die Stativhöhe 5 Fuss; dann ist, wenn man nach der Chordenformel rechnet, die Höhe

$$CD = \frac{200 \ . \ ch. \ 64{,}6^0 \ ch. \ 73^0}{2 \ . \ ch. \ 8{,}4^0} = \frac{100 \times 1{,}066 \times 1{,}19}{0{,}146}$$

$= 869$ Fuss $+ 5$ Fuss $= 874$ Fuss.

5) **Messung einer unzugänglichen Höhe *CD*, wobei die Standlinie zwar in der Richtung nach der Höhenachse hin, aber nicht horizontal gelegt ist.** Fig. 151.

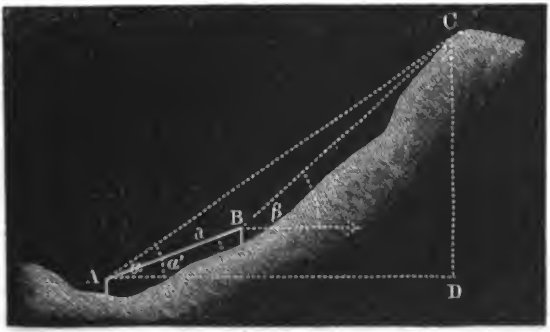
§. 178. Wenn *a* die wirkliche Länge der schiefen Standlinie *AB*, *α* (Grade) die bei *A* beobachteten und *β* die

bei B beobachtete Elevation des Punkts C, ingleichen α' den bei A mit beobachteten Steigungswinkel der Standlinie bedeutet, so hat man[1]) für die Höhe des Punktes C über dem Niveau des Terrains bei A den Ausdruck

$$= \frac{a \, sin. \, \alpha \; sin. \, (\beta - \alpha')}{sin. \, (\beta - \alpha)} + \text{Stativhöhe, oder}$$

$$= \frac{a}{2} \frac{ch. \, 2 \, \alpha \; ch. \, (2 \, \beta - 2 \, \alpha')}{ch. \, (2 \, \beta - 2 \, \alpha)} + \text{Stativhöhe;}$$

Fig. 151.



der in der Form und Behandlung von dem vorigen nur dadurch sich unterscheidet, dass statt β sein an die Elevation der Standlinie verwendeter Werth gesetzt ist.

[1]) Beweis. Im Dreieck CAB ist $\angle A = \alpha - \alpha'$; und der Neben- oder Aussenwinkel von $ABC = \beta - \alpha'$; mithin der $\angle C = (\beta - \alpha') - (\alpha - \alpha') = \beta - \alpha$. Und um AC zu finden, gilt (Kap. 5) $AC : a = sin. \, B : sin. \, C$ oder $AC : a = sin. \, (\beta - \alpha') : sin. \, (\beta - \alpha)$, woraus $AC = \frac{a \, sin. \, (\beta - \alpha')}{sin. \, (\beta - \alpha)}$ und nun, da $CD = AC \, sin. \, \alpha$, durch Einsetzung jenes Werthes

$$CD = \frac{a \, sin. \, (\beta - \alpha')}{sin. \, (\beta - \alpha)} \, sin. \, \alpha.$$

Beispiel. In einem engen Thale, Fig. 151, wurde A im Bette eines Baches und $AB = 200$ Fuss lang gewählt. In A zeigte der Knecht bei der Visur AC

den Höhenwinkel 40,5 Grad, bei der Visur AB $22^1/_4$ Grad, und in B den Höhenwinkel von $BC = 45^3/_4$ Grad. Um die Rechnung mit der schärfer arbeitenden Sehnentabelle auszuführen, hat man also

$2\alpha = 81^\circ$; $2\alpha' = 44^1/_2{}^\circ$; $2\beta = 91^1/_2{}^\circ$; $2\beta - 2\alpha' = 47^\circ$; $2\beta - 2\alpha = 10^1/_2{}^\circ$, also gemäss der *Ch.*-Spalte

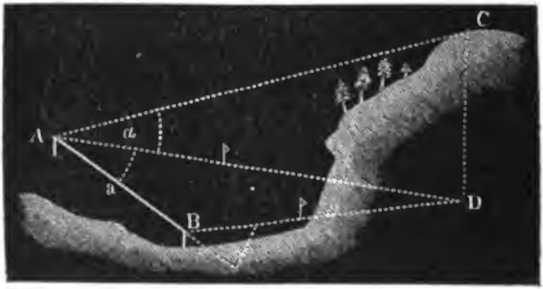
$$CD = \frac{200}{2}\,\frac{ch.\ 81^\circ\ .\ ch\ 47^\circ}{ch.\ 10^1/_2{}^\circ} = \frac{100\ .\ 1{,}30 \times 0{,}797}{0{,}183}$$

$= 567$ Fuss, und wenn der Stock 3 Fuss hoch war, 570 Fuss.

6) **Messung einer unzugänglichen Höhe (CD), wenn die Standlinie (AB) zwar horizontal, aber nicht in der Richtung nach der Höhenachse hingelegt werden konnte.** Fig. 152.

§. 179. Da die Horizontalwinkel bei A und B, nämlich DAB und DBA nach Kapitel 10 mit dem Knechte

Fig. 152.



gemessen werden können, ist daraus trigonometrisch auch $< D$ und Distanz AD zu bestimmen; ersterer durch $D = 180 - A - B$, letztere dann durch

$$AD = \frac{a\ sin.\ B}{sin.\ D} \text{ oder } \frac{a\ ch.\ 2B}{ch.\ 2D}.$$

Und da ferner der Knecht in A auch den Elevationswinkel von $AC = \alpha$ misst, so folgt die Höhentangente

$$CD = AD\ tg_1\ \alpha = \frac{a\ ch.\ 2B}{ch.\ 2D}\ tg.\ a. \text{ oder} = a \times \frac{sin.\ B}{sin.\ D}\ .\ tg.\ \alpha.$$

Beispiel. Die horizontale Standlinie AB war $= a$

$= 500'$; der Horizontalwinkel $A = 39^\circ$; $< B = 65^\circ$ (also $D = 76^\circ$) und der Höhenwinkel $\alpha = 31^\circ$, so ist die Höhe von C über dem Niveau der Standlinie

$$= 500 \; \frac{ch.\ 130}{ch.\ 152} \; tg.\ 31 = \frac{500\ .\ 1{,}81}{1{,}94} \times 0{,}61 = 284{,}5 \text{ Fuss.}$$

Zusatz. Hat man auch den Höhenwinkel bei B beobachtet, so kann man durch Berechnung von B aus das Resultat kontroliren.

Vierzehntes Kapitel.

Der Messknecht als Flächenquadrirer.

§. 180. In wiefern der Knecht auch nicht ebene, d. h. krumme Flächen, die bekanntlich dem Gebiete der körperlichen Geometrie oder Stereometrie zukommen, mit Hülfe ihres ebenen Grundes und ihrer Neigungen gegen denselben zu quadriren vermag, hat im Allgemeinen schon in Kapitel 12 abgehandelt werden müssen.

In der grossen Mehrzahl der Fälle bedarf es zur Flächenberechnung ebener Figuren aus den, den Inhalt bestimmenden Stücken, da dieselbe zum grossen Theile in der Multiplication gegebener Längen und Breiten besteht, wenig eigenthümlicher Erleichterungsmittel. Allenfalls könnte sich der Knecht beim Arbeiten auf dem Papiere mit seinen unterschiedlichen Decimalmaassstäben recommandiren. Wenn indess statt des Maasses der Längen und Breiten das von Seiten und Winkeln gegeben ist, bedarf es der im 6. Kapitel abgehandelten Hülfen. Und wenn es sich um die genaue Quadrirung einer gesetzmässig krummlinig begrenzten Fläche (eines Kreises, einer Ellipse) handelt, sind entsprechende Hülfstabellen nicht minder vortheilhaft und für die Praxis unentbehrlich.

§. 181. Der geometrischen Vollständigkeit wegen wollen wir aber im Folgenden dennoch alle praktisch wichtigen Hauptsätze der Flächenberechnung, und auch

solche, bei deren Verwirklichung der Knecht keine eigenthümliche Thätigkeit zu entwickeln hat, zusammenstellen. Da jedoch die Mehrzahl der hier einschlagenden Regeln in jedem Lehrbuche der Geometrie zu finden ist, wollen und können wir uns hier möglichst kurz fassen, so weit es einige zu erläuternde Eigenthümlichkeiten des Messknechts als Flächenquadrirer gestatten.

In dieser Beziehung ist zunächst nochmals darauf aufmerksam zu machen, dass die *Pr.*- oder Prismen-Spalte in allen jenen Fällen, wo kleine Flächen ihren Dimensionen nach in Duodecimalzollen gegeben und nach Fussen zu quadriren sind, mit Vortheil zur Verwandlung der □Zolle in □Fusse oder überhaupt zur Ersparung der Division mit 144 zu brauchen ist. Der Quotient 250 : 144 findet sich nämlich kurz durch Aufsuchen der 250 in der *Pr.*-Spalte als 1,74 oder genauer 1,737 □Fuss. (Vergleiche Kapitel 2.)

Uebrigens müssen und werden wir uns in diesem Kapitel vorzugsweise der — hier so leicht verständlichen — Formelsprache bedienen; und sollte — wider Verhoffen — irgend ein Mann des praktischen Lebens dieselbe in die gewöhnliche Sprache zu übersetzen nicht im Stande sein, so wolle er sich an die Beispiele halten, die ihm diese Uebersetzung darstellen sollen, und an den kurzen Anhang, am Schlusse dieses Werkchens, der ihm einige algebraische Aufklärungen verschaffen soll.

1. Das Dreieck.

§. 182. Bedeutet F die Fläche, b die Basis, h deren

Fig. 153.

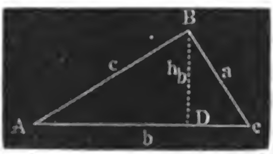
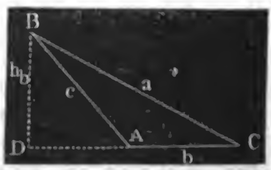


Fig. 154.



zugehöriges Höhenloth; A, B, C die Grössen der drei

Ecken in Gradmaass; a, b, c deren Gegenseiten und s die Summe derselben oder des Dreiecks Umfang, so ist

(1) $F = \frac{1}{2}\, b\, h$; eben so

(2) $F = \frac{1}{2}\, b\, c\, sin.\, A = \frac{1}{4}\, b\, c\, ch.\, 2\, A$; aber auch

(3) $F = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)}$.

§. 183. Beispiele.

1. Beispiel. Eine Seite ist 20 Ruthen, ihr Höhenloth 12 Ruthen lang. Wie viel □Ruthen enthält die Fläche?

$F = \frac{1}{2} \times 20 \times 12 = 120$ □Ruthen.

2. Beispiel. Zwei Seiten (b u. c) sind 20 und 30 Ruthen und ihr Zwischen- oder dessen Nebenwinkel (A) 40,5 Grad gross; so ist die Grösse der Fläche?

$F = \frac{1}{4}\ .\ 20\ .\ 30\ .\ ch.\ 81^{\circ}$.

Und da unter dieser Chorde immer nur die Einheitschorde gemeint ist und diese nach des Knechtes Chordentafel $= 1{,}299$, so folgt

$F = 150 \times 1{,}299 = 194{,}85$ □Ruthen.

3. Beispiel. Wenn die 3 Seiten eines Dreiecks 50, 60 und 70 Ruthen lang sind, so berechnet sich daraus seine Fläche nach Formel 3 als Quadratwurzel aus:

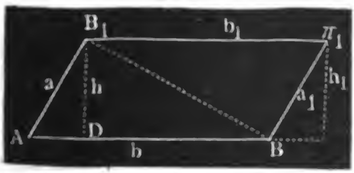
$90 \times 40 \times 30 \times 20$, d. h. $\sqrt{2160000} = 1469{,}8$ □R.

(Mit dem Knechte extrahirt nach Kapitel 3 = 1465 □Ruthen.)

2. Das Parallelogramm oder Gleicheck,

d. h. das Viereck mit parallelen Gegenseiten. (Wo in Folge dessen die Gegenseiten b u. b', a u. a', und die Gegenwinkel A u. A', B u. B' auch gleich gross sind.)

Fig. 155.



§. 184. Wenn b die Grund- und a die Nebenseite, h die Höhe, d eine Diagonale, A oder B irgend einen Winkel des Gleichecks bedeutet:

(1) $F = b\ h;$

$$(2)\ F = \begin{cases} a\ b\ sin.\ A = \frac{1}{2}\ ab\ ch.\ 2\,A \\ \quad\text{oder} \qquad\qquad \text{oder} \\ a\ b\ sin.\ B = \frac{1}{2}\ ab\ ch.\ 2\,B. \end{cases}$$

(3) F = dem doppelten Inhalte des aus a, b u. d zusammengesetzten und nach (3) §. 182 berechneten Dreiecks.

§. 185. Beispiele.

1. Beispiel. Gegeben war die Länge (Basis) $b = 40$ Ruthen und die rechtwinklige Breite (Höhe) $h = 12$; so ist $F = 40 \times 12 = 480$ □ Ruthen.

2. Beispiel. Gemessen war $b = 40$; $a_1 = 25$ und der Aussen- oder Nebenwinkel B $35\frac{1}{4}$ Grad, so ist

$F = \frac{1}{2}\ 25 \,.\, 40 \,.\, ch.\ 70\frac{1}{2}{}^0 = 500 \times 1{,}154 = 557{,}0$ □Rth.

3. Beispiel. Wie lang muss man die Perpendikel h u. h^1 abstecken, wenn die Figur bei 60 Ruthen Länge ein Gleicheck von 3 sähsischen Ackern oder 900 □Ruthen Inhalt werden soll?

Gegeben $F = 900$; $b = 60$; gesucht h.

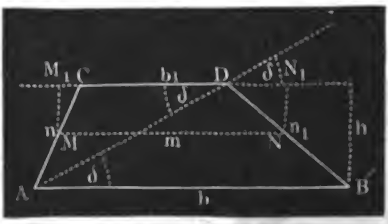
$b\ h = F$, also hier $60\ h = 900$, also $h = \frac{900}{60}$ $= 15$ Ruthen.

3. Das Trapez,

d. h. das Viereck mit nur einem Paare paralleler Gegenseiten (b u. b_1, Fig. 156).

§. 186. Wenn b die untere (grössere), b_1 die obere (kleinere) Grundseite oder Grundlinie; n und n_1 die Nebenseiten; h die Breite oder Höhe; m die mittlere Grund- oder kurzweg Mittellinie (die Mitten der Nebenseiten verbindend, oder in der

Fig. 156.



halben Höhe zu den Grundlinien parallel laufend); d eine Diagonale; δ ihren Winkel mit den Grundseiten und A u. C, B u. D die vier Eckwinkel (von denen sich immer die an einerlei Nebenseite liegenden zu 180° ergänzen), und s den Umfang oder die Summe aller 4 Seiten bedeutet:

(1) $F = \frac{1}{2}(b + b_1)\, h$ oder $= m\,h$, wo

(2) statt h auch $d\,sin.\,\delta$ oder auch $n\,sin.\,A$, sowie auch $n_1\ sin.\,B$ zu setzen.

$$(3)\ F = \frac{b+b_1}{b-b_1}\sqrt{(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-b_1)(\tfrac{1}{2}s-b_1-n)(\tfrac{1}{2}s-b_1-n_1)}$$

§. 187. Beispiele.

1. Beispiel. Die beiden Parallelseiten haben eine Länge von 50 und 40 und ihr rechtwinkliger Abstand (h) eine von 20 Ruthen; so ist die Fläche $F = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 20 = 900$ □Ruthen.

2. Beispiel. Wenn auf einer Grundseite $AB = 60$ Ruthen ein durchweg 30 Ruthen (h) breiter Schlag von 2000 □Ruthen abgesteckt werden sollte, wie gross ist die Gegenüber-Länge CD zu wählen?

Gegeben $F = 2000$; $b = 60$; $h = 30$; gesucht b_1;

$$\text{oder}\ \left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}(b + b_1)\, h = F \\ \hline \frac{1}{2} b h + \frac{1}{2} b_1 h = F \end{array}\right\}\ \text{hierein die Werthe, giebt}$$

$$900 + 15\, b_1 = 2000$$

$$15\, b_1 = 2000 - 900 = 1100$$

$$4)\quad b_1 = \frac{1100}{15} = 73\tfrac{1}{3}\ \text{Ruthen.}$$

4. Das Trapezoid oder ganz unregelmässige Viereck.

§. 188. Bedeuten a_1 a_2, a_3, a_4 die Umfangsseiten, α_1, α_2, α_3 α_4, die Ecken oder inneren Winkel, d_1 und d_2 die Diagonalen und δ einen ihrer Durchschnittswinkel, ingleichen h_1 und h_2 die Höhenlothe einer Diagonale bezugs der von ihr gebildeten beiden Dreiecke und h deren Summe DE; ferner y_2, y_3 die Ordinaten (Breiten) der Ecken 2 und 3, und x_2, x_3 deren Abscissen (Längen, immer vom Anfangspunkt 1 an gerechnet), so hat man:

(1) $F = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)\, d$ oder $= h \times d = AC \times DE$ Fig. 159;

(2) $F = \frac{1}{2}\, d_1 d_2\, sin.\, \delta = \frac{1}{4}\, d_1 \,.\, d_2\, ch.\, 2\,\delta$;

(3) $F = \frac{1}{2}(a_4 \,.\, a_1\, sin.\, \alpha_1 + a_2 \,.\, a_3\, sin.\, \alpha_3)$;

(4) $F = \frac{1}{2}\,[y_2\, x_2 + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + y_3\,(x_4 - x_3)]$.

Fig. 157.

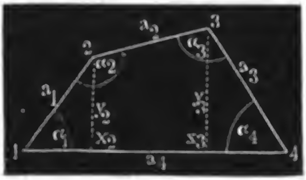
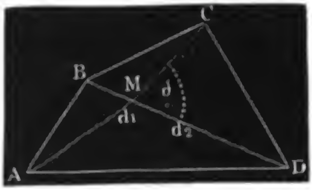
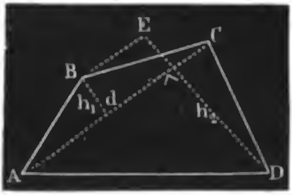


Fig. 158.



§. 189. Beispiele.

Fig. 159.



1. Beispiel. Zu (1). Die Ecklinie oder Diagonale eines Vierecks sei = 20 Ruthen, die Höhenlothe auf ihr 12 und 18 Ruthen; also ist die Fläche $F = \frac{1}{2} \,.\, 30 \,.\, 20 = 300$ □Ruthen.

2. Beispiel. Zu (2). Die Diagonalen eines Vierecks waren 70 und 84 Schritt lang, und ihr Durchschnittswinkel δ hatte bei 30 Schritt Schenkellänge 36 Schritt Spannung. Wie gross der Inhalt?

Sehne des Winkels $= \frac{36}{30} = 1{,}20$; der Winkel also $= 74^0$; (genauer $73{,}7^0$) der Inhalt demnach

$$\frac{70 \times 84 \times sin\ 73{,}7^0}{2} = 70 \times 42 \times 0{,}96 = 2822 \text{ □Schritt.}$$

3. Beispiel. Zu Formel (2). In einem sehr dichten Stangenorte sollte man eine Probefläche von netto einem preuss. Morgen oder 180 □Ruthen abstecken. Die Absteckung nach rechtwinkliger Form war wegen der Dichtheit nicht statthaft; man musste sich mit den

Begrenzungslinien durch die etwaigen schmalen Gassen durchschnüren und hatte so die Diagonale AC Fig. 158 für und die anderen als Anfang den Punkt B und als Richtung die Gasse BM abgesteckt. Wenn nun die Messung für die eine Ecklinie AC die Länge von 12 Ruthen, und für den Winkel M 70° ergab, wie weit von B ist da der 4. Punkt D hinauszustecken?

Gegeben $\delta = 70$, $d_1 = 12$, $F = 180$; gesucht d_2. Nach (2) ist $\frac{1}{2}\, d_1\, d_2\, sin.\, \delta = F$; in Zahlen:

$$6 \,.\, d_2 \,.\, 0{,}94 = 180$$

$$d_2 = \frac{180}{6 \times 0{,}94} = \frac{30}{0{,}94} = 31{,}9 \text{ Ruthen};$$

d. h. in der Richtung BM ist der Punkt D so zu wählen, dass die Linie BD eine Länge von 31,9 Ruthen erhält.

4. Beispiel. Zu Formel (3). Siehe Beispiel 2 Seite 229 da die Formel (3) nichts Anderes als die Berechnung der beiden Diagonaldreiecke nach der in Formel (2) daselbst gelehrten Weise verlangt.

5. Beispiel. Zu Formel (4).

Es sei Fig. 157 für den Punkt 2 die Abscisse $x_2 = 20$ R. und die Ordinate $y_2 = 30$ Ruthen;

für den Punkt 3 die Abscisse $x_3 = 50$ Ruthen und die Ordinate $y_3 = 36$ Ruthen;

für den Punkt 4 die Abscisse x_4 (= 1 bis 4) = 64 R. (die Ordinate y_4 ist = 0),

so ist die

1te Coordinatenfigur $= \frac{x_2 \times y_2}{2} = \frac{1}{2} \,.\, 20 \,.\, 30 = \frac{1}{2} \,.\, 600;$

2te " " $\frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2)$

$= \frac{1}{2} + 66 \times (50 - 20) = \frac{1}{2} \,.\, 1980;$

3te " " $= \frac{y_3\,(x_4 - x_3)}{2}$

$= \frac{1}{2} \,.\, 36 \,.\, (64 - 50) = \frac{1}{2} \,.\, 504$

Summa $= \frac{1}{2} \,.\, 3084$

$= 1542$ □R.

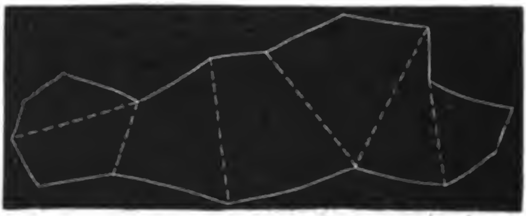
5. Das unregelmässige Vieleck.

§. 190. Diese mannigfaltig variirende Figur kann auf ziemlich viel verschiedene Weisen quadrirt werden, von denen unter Umständen jede die beste sein kann; so z. B. die unten folgende zweite Methode, dafern es sich um Parcellirung einer Fläche mittels paralleler Sectionsgrenzen; dagegen die dritte, wenn es sich nur um den Gesammtinhalt handelt, und dieser durch ein möglichst einfaches und schnellwirkendes Rechnungswerk ermittelt werden soll, zu dessen Ausführung jeder, aller geometrischen Kenntniss bare Gehülfe verwendet werden kann, sobald der Ansatz bewirkt ist. Die vierte ist eine Modification der vorigen und die vortheilhafteste da, wo zugleich die Aufnahme nach derselben Coordinatenmethode geschah, indem dann ein besonderer Riss oder die Abnahme der Maasse von demselben nicht nöthig ist. Die fünfte ist bei sehr ausgedehnten und vielseitigen Figuren besser als die vorhergehende; die sechste ist eine zweckmässige Modification der fünften für den Fall, wo im Innern der Fläche oder ihres Risses nicht operirt werden kann und soll. Und die siebente ist die zweckmässigste dort, wo man nicht allein den Inhalt der Hauptfigur, sondern auch die von vielen inneren Parcellen (z. B. Beständen eines Reviers) zu quadriren hat.

§. 191. Was nun erstens die Methode der Triangulirung anlangt, so lautet deren selbstverständliche Regel also:

Zerlege die Figur durch Diagonalen in Drei- oder Vierecke und berechne diese Parcellen einzeln nach S. 229 oder je zwei verbunden nach Seite 231.

Fig. 160.



§. 192. **Zweitens. Methode der isolirten Trapezialberechnung.** (Fig. 161 und Fig. 162.)

Fig. 161.

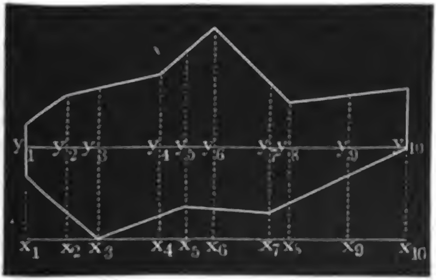
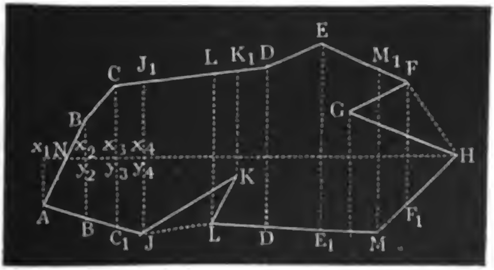


Fig. 162.



Durchschneidet man die Figur durch eine passend gelegene Längslinie und diese wiederum durch Perpendikel, von denen jeder durch eine Ecke geht und die ganze Figur überbreitet, so wird die Fläche in lauter Trapeze zerlegt, die sich nach ihren Längen und Breiten leicht messen und nach S. 231 berechnen lassen. — Die beiden Endparcellen werden in der Regel Dreiecke.

Zusatz a. Die Längs- oder Höhenlinie oder Basis des Parallelensystemes *NH* kann auch erst nach Auftragung des letzteren und auch ausserhalb aufgetragen werden wie Fig. 161 zeigt.

Zusatz b. Hat der Umfang rückwärts springende Seiten wie *FG* und *KL*, so wird man sich oft durch An-

nahme negativer Trapeze die Sache erleichtern. Z. B. wenn man die Rechnung von A bis KK_1 vollendet hat indem man das Dreieck ABB_1, Trapez BB_1CC_1, Trapez CC_1II_1 und Trapez II_1KK_1 einzeln berechnet, wird man dann das Stück K_1KLD_1D erhalten, indem man rechnet: Trapez LL_1DD_1 minus Trapez LL_1KK_1.

Zusatz c. Es ist nothwendig, die Längen oder Höhen immer vom Nullpunkte x_1 an zu messen und die der einzelnen Trapeze durch Subtraction zu finden, so dass, wenn x_2, x_3, x_4 die den Breiten y_2, y_3, y_4 entsprechenden, vom Anfangspunkte x_1 angerechneten Längen bezeichnen, beispielsweise das Trapez zwischen y_3 und y_4 oder Trapez CC_1II_1 die Höhe $x_4 - x_3$ haben würde.

§. 193. **Drittens. Methode der verbindenden Trapezialberechnung oder die Mayer'sche Regel.** (Vom ehemaligen Göttinger Professor Tobias Mayer zuerst aufgestellt.)

Zerlegt man die Figur nach der Methode des vorigen Paragraphen, und bezeichnen y_1, y_2, y_3, y_4 die auf einander folgenden Parallelen oder Breiten, und y_s, y_t und y_u die drei letzten, sowie x_2, x_3, x_4 die entsprechenden Längen oder Höhen (Abscissen) vom Anfangspunkte x_1 an gerechnet, und x_u die ganze Längenbasis, so hat man den Flächeninhalt, wenn man ansetzt und rechnet wie folgt:

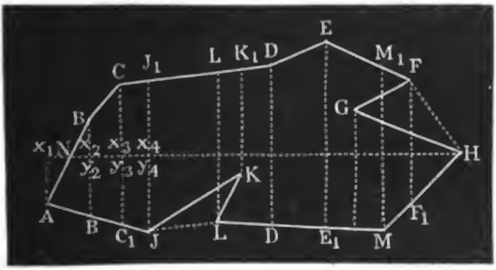
Breiten.	Längen.	Rechnung.	
y_1		$(y_1 - y_3)x_2$;	Sämmtliche Produkte, unter denen auch negative vorkommen, zu einer Summe vereinigt und halbirt, geben den Inhalt.
y_2	x_2	$(y_2 - y_4)x_3$;	
y_3	x_3	$(y_3 - y_5)x_4$;	
y_4	x_4	$(y_4 - y_6)x_5$;	
.....	.....	....	
y_s	.....	....	
y_t	x_t	$(y_s - y_u)x_t$;	
y_u	x_u	$(y_t + y_u)x_u$;	

Also in Worten: Immer von jeder Breite die über nächste abgezogen und der Rest mit der in der anderen Reihe befindlichen Länge multiplicirt; schliesslich die beiden letzten Breiten addirt und mit der letzten (oder ganzen) Länge multiplicirt und die Summe sämmtlicher Produkte halbirt.

1. **Zusatz.** Wenn die beiden Endfiguren Dreiecke sind, hat man im Ansatze statt der ersten und letzten Breite y_1 und y_t Null (0,0) zu setzen.

2. **Zusatz.** Für rückwärtsspringende Umfänge, Fig. 163, gilt, unter Beachtung gewisser Vorsichten im Ansatze,

Fig. 163.



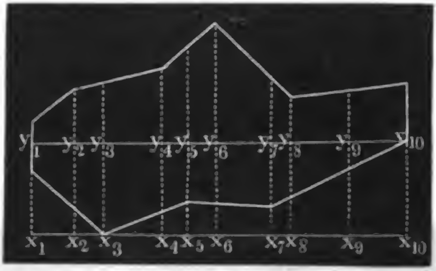
diese Trapezialregel zwar ebenfalls; zur Vermeidung von Irrthümern thut man aber in solchem Falle besser, die rückschlagenden Zipfel durch Diagonalen (wie *FH* und *IL*) weg- oder zuzuschneiden und zunächst ganz zu ignoriren und später durch Separatrechnung dazu oder (wie hier) davon zu thun.

NB. Da diese treffliche Methode weniger bekannt ist, als sie es verdient, will ich hier eine kurze Ableitung derselben geben und der Kürze wegen das Stück von y_1 bis y_5, Fig. 164, zu Grunde legen.

Es ist das 1. Trapez $= \frac{y_1 + y_2}{2} x_2$; das 2. Trapez $= \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2)$; das 3. Trapez $= \frac{y_3 + y_4}{2}(x_4 - x_3)$; das 4. Trapez $= \frac{y_4 + y_5}{2}(x_5 - x_4)$; also alle 4 zu-

sammen $F = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)x_2 + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_3 + y_4)(x_4 - x_3) + (y_4 + y_5)(x_5 - x_4)]$ und, wenn man die angedeuteten Multiplikationen ausführt,

Fig. 164.



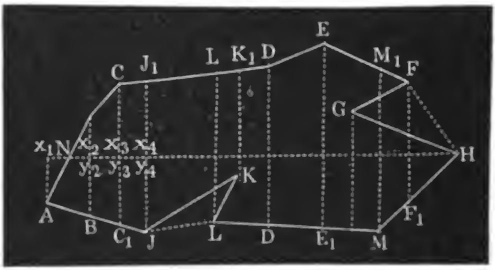
und die dabei zum Vorschein kommenden gleichen Produkte hebt und vereinigt:

$$F = \frac{1}{2}[y_1 x_2 - y_3 x_2 + y_2 x_3 - y_4 x_3 + y_3 x_4 - y_5 x_4 + y_4 x_5 + y_5 x_5].$$

$$F = \frac{(y_1 - y_3)x_2 + (y_2 - y_4)x_3 + (y_3 - y_5)x_4 + (y_4 + y_5)x_5}{2}$$

Beispiel. Fig. 165 sei der Riss eines Schlages oder einer Wiese, der vorerst mit Zuschlag der einspringenden Zipfel IKL und FGH berechnet werden soll. Zu dem Ende waren gemessen worden:

Fig. 165.



Die Breiten.	Die Längen von x an.	Ausrechnung.	+	−
A = 0,0				
BB_1 = 15,2	3,5 =	(0,0 − 18,5) × 3,5 =		64,7
CC_1 = 18,5	7,0 =	15,2 − 17,6) × 7,0 =		16,8
II_1 = 17,6	9,5 =	(18,5 − 16,4) × 9,5 =	19,9	
LL_1 = 16,4	14,2 =	(17,6 − 15,9) × 14,2 =	24,1	
DD_1 = 15,9	17,0 =	(16,4 − 21,7) × 17,0 =		90,1
EE_1 = 21,7	20,4 =	(15,9 − 18,8) × 20,4 =		59,2
MM_1 = 18,8	28,0 =	(21,7 − 16,0) × 28,0 =	159,6	59.2
FF_1 = 16,0	33,2 =	(18,8 − 0,0) × 33,2 =	624,2	
H = 0,0	35,3 =	(16,0 + 0,0) × 35,3 =	564,8	
			1392,6	230,8
			− 230,8	
			1161,8	

minus

$\triangle\, IKL + \triangle\, GFH$

$= \frac{12,0 \times 6,5 + 13,2 \times 7,0}{2}$

$= 85,2$ □Ruthen.

2) 1161,8 : 580,9 = Fläche $ADFHLIA$,

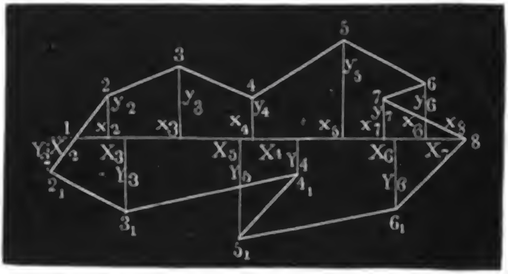
wovon noch wegzunehmen 85,2 für $\triangle\, IKL$ und FGH

Verbleibt 495,7 □Ruthen als Resultat.

§. 194. **Viertens. Die Coordinatenmethode.** (Fig. 166.)

Theile die Figur durch eine Transversallinie (wozu am besten eine der längsten Diagonalen zu wählen) in

Fig. 166.



zwei Theile und behandle jede Abtheilung für sich. Fälle deshalb von allen Ecken Lothe (Ordinaten) auf jene Grundlinie (Abscissenlinie); miss deren Grössen y_2, y_3, y_4 etc. und die Entfernung ihres Fusspunktes vom Anfangspunkte x_1 der Abscissenachse, d. h. die Abschnitte (Abscissen) x_2, x_3, x_4, und berechne aus den nun bekannten Abscissen und Ordinaten jedes Punktes (die zusammen die Coordinaten desselben heissen) die Fläche erst der einen, dann der anderen Abtheilung nach Anleitung der Mayer'schen Trapezialformel, welche hier ungehindert Anwendung findet, wenn auch die Umfangslinien einer Abtheilung theilweise rückwärts springen, indem man im letzteren Falle die Reihenfolge der Coordinaten nicht nach ihrer Aufeinanderfolge in der Abscissenlinie, sondern nach der im Umfange ordnet.

Beispiel. Man denke sich statt der Buchstaben der x, y, X und Y in den obigen Riss die nachfolgenden Maasse der 1. und 2. Rubrik eingeschrieben, dann gestaltet sich die Arbeit wie in der 3. Rubrik folgt:

Ordinaten.	Breiten.	Abscissen oder Längen.	Berechnung.		
y_1	0,0				
y_2	8,0	$3 = x_2$	(0,0 — 12) 3 =		— 36
y_3	12	$12 = x_3$	(8 — 9) 12 =		— 12
y_4	9	$21 = x_4$	(12 — 20) 21 =		— 168
y_5	20	$35 = x_5$	(9 — 11) 35 =		— 70
y_6	11	$48 = x_6$	(20 — 7) 48 =	+ 624	
y_7	7	$40 = x_7$	(11 — 0) 40 =	+ 440	
y_8	0	$55 = x_8$	(7 — 0) 55 =	+ 385	
				1449	— 286
			= 1163		
			2) 581,5 □Ruthen.		

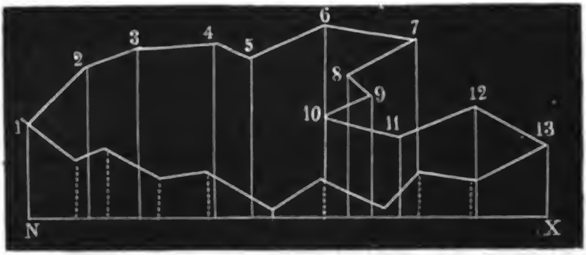
Und für die zweite Abtheilung:

Ordinaten		Abscissen.	Berechnung.		
Y_1	0°				
Y_2	9°	— 4 $(= X_2)$	(0,0 — 11) × — 4 =	+ 44	
Y_3	11°	+ 5 $= X_3$	(9 — 8) 5 =	5	
Y_4	8°	24 $= X_4$	(11 — 16) 24 =		— 120
Y_5	16°	18 $= X_5$	(8 — 11) 18 =		— 54
Y_6	11°	41 $= X_6$	(16 — 0) 41 =	656	
Y_7	0°	55 $= X_7$	(11 + 0) 55 =	605	
				1310	—174
			= 1136		
			2) 568 □Ruthen.		

Zusatz. Es kann unter Umständen vortheilhafter sein, die Abscissenbasis ausserhalb anzulegen, wie Fig. 167 zeigt. In diesem Falle würde die erste Hälfte der

Rechnung den ganzen Inhalt zwischen der Basis *NH* und dem oberen Umfange 1 . 10 . 13, und die zweite

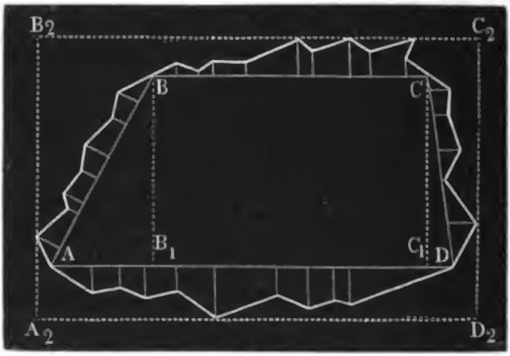
Fig. 167.



Hälfte der Rechnung den Inhalt zwischen *NH* und dem unteren Umfange und dann die Differenz beider den Inhalt des fraglichen Vielecks liefern.

§. 195. Fünftens. Die Einzeichnungsmethode. (Fig. 168.)

Fig. 168.



Bilde innerhalb, möglichst nahe dem Umfange, eine einfache, leicht zu quadrirende Figur (Dreieck, Viereck, Fünfeck), und berechne diese Grund- oder Netzfigur *ABCD* für sich nach einer der abgehandelten Methoden und dann die abgeschnittenen Sektionen nach der Coordinatenmethode §. 194.

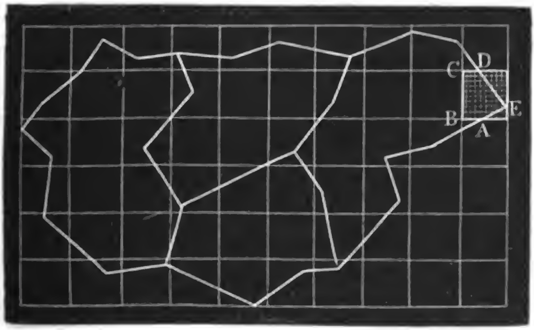
§. 196. Sechstens. Die Umzeichnungsmethode.

Bilde die im vorigen Paragraphen erwähnte Grund- oder Netzfigur in möglichster Nähe des Umfangs ausserhalb (Fig. 168), quadrire dann die Netzfigur im Ganzen (nach §. 183—194) und hierauf mittels der Abschläge oder Coordinaten die zwischen dem Umfange und dem Netze liegenden Sektionen nach der Trapezialformel Seite 241.

§. 197. Siebentens. Durch Ueberzeichnung (Fig. 169.)

Lege über die ganze Fläche ein Netz von Quadraten, deren Seiten eine passende und bequeme Länge haben; z. B. 10 Ruthen, wo dann jedes Netzquadrat 100 □Ruthen

Fig. 169.



enthält. Grenze und zähle die Vollquadrate ab und finde den Inhalt der übrig bleibenden Flächenstücke

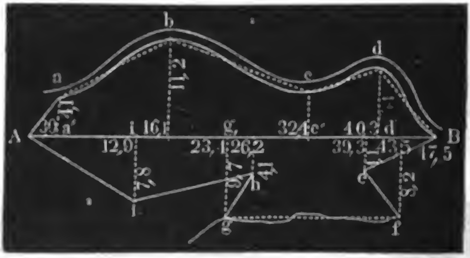
a) entweder durch die Trapezialmethode 3 oder 4; oder
b) durch Berechnung der einzelnen Quadratstücke; oder
c) durch Schätzung derselben, bei oberflächlicher Arbeit nach dem Augenmaasse, bei genauerer mittels eines sogenannten Mikroplanimeters (kurzweg auch Mikrometer genannt), das in einem auf Glas oder Hornblatt oder durchsichtiges Papier gezeichneten und in feinere Unterquadrate eingetheilten Netzquadrate besteht, welches, genau auf das zu setzende Quadratstück, z. B.

ABCDE, aufgelegt, die Zählung der in letzterem enthaltenen einzelnen □Ruthen gestattet.

6. Die unregelmässig krummlinig begrenzte Fläche.

§. 198. Dieselbe wird in den meisten Fällen am besten durch Ausgleichung in ein Vieleck verwandelt, wie Fig. 170

Fig. 170.



zeigt, und dann nach vorigem Abschnitte quadrirt. Auch nach der Simpson'schen Regel, welche weiter unten, bei der Parabelfläche, angegeben ist.

7. Der Kreis.

§. 199. Umfang. Wenn d den Durchmesser bedeutet, so ist bekanntlich des Kreises Umfang oder Periphèrie

$$p = \pi \times d,$$

wo π (das griechische p, sprich pi) die endlose Zahl 3,141592 ... bedeutet, die man hinlänglich genau auch durch $3\frac{1}{7}$ oder $\frac{22}{7}$ ausdrückt. Daraus, dass also der Umfang zum Durchmesser wie 22 : 7 sich verhält, leitet sich denn auch letzterer leicht aus jenem ab, indem man mit $\frac{7}{22}$ die Peripherie multiplizirt. Wenn also das um einen Kreis gelegte Band 12 Fuss oder 12 Zoll zeigte, dann ist des Kreises Diameter $= 12 \times \frac{7}{22} = 3{,}82$ Fuss, resp. Zoll. Diese Reduktion, also auch die Angabe der Durchmessergrösse, verrichtet das Band von selbst, wenn man eine zweite Theilung anbringt, wonach jede 22 Zolle (oder Fusse) in 7 gleiche Theile getheilt werden.

Diese Doppeltheilung unseres Messbandes kann man nun entweder auf beide Seiten vertheilen, so dass die eine

Fig. 171.



Seite die Umfangszahl (z. B. Zolle überhaupt), die andere die Durchmesserzahl ($^{22}/_7$ Zolle) angiebt.

Oder: Man theilt das Band der Länge nach durch einen Strich und trägt die eine Theilung auf die obere, die andere auf die untere Hälfte.

Dass man, wenn man statt 22 je 11 Zolle in 7 Theile theilt, dann halbe Durchmesserzolle bekommt, ist wohl Jedem selbstverständlich.

F o r s t m ä n n e r und solche Leute, welche viel mit Kreiskörpern zu thun haben, sollten ihr Messband stets so einrichten; denn es ist nichts unnatürlicher, als die Stärke eines Stammes und dergl. nach **Umfangszollen** anzugeben.

Ein solches Band dient denn auch zugleich, um für jeden in Zahlen gegebenen Durchmesser die Länge der Kreislinie (die Rectification des Kreises) abzulesen und umgekehrt.

§. 200. **Bogenlänge.**

In der angewandten Mathematik ist es vielfach gebräuchlich, die Längen der Kreisbogen gegebener Winkel für den Radius 1 in ähnlicher Weise durch Zahlen auszudrücken, wie man die Chorden und trigonometrischen Linien darstellt.

Für den Durchmesser = 1 repräsentirt die Zahl $\pi = 3{,}1416$ den Vollkreisbogen; für den Radius $r = 1$ stellt also 3,1416 den Bogen des Halbkreises

oder den *Bg.* 180° dar. Die Hälfte davon oder 1,57 wäre sonach der Einheitsbogen von 90° = Bg_1 90° = B_1 90°.

In der *Bg.*-Spalte der Vorderseite sind die Grade von 100 bis 200 so eingetragen, dass die Hauptskala 100 die zugehörigen Bogenlängen (wie Alles) nach Hunderteln angiebt; so dass wir unmittelbar davon ablesen: für den Radius = 1 ist: der Bogen 105° = 183,5 Hundertel = 1,835; Bogen 185,6° = 324 Hundertel = 3,24.

Die Bogen aller Winkel zwischen 0 und 100° finden sich leicht, indem wir zu ihrem Gradmaass in Gedanken 100° addiren und von der gefundenen Bogenlänge die zu 100° gehörige = 174,6 abziehen. Z. B. die Bogenlänge von 8,5°? — Zu 108,5 der *Bg.*-Spalte giebt die Mittelskala 189,3; also Bogen 8,5° = 189,3 — 174,6 = 14,7 Hundertel = 0,147. — Der *Sin.* 8,5° ist auch = 0,147.

Ueberhaupt kann man fast bis zu 15 Grad auch die Sinustabelle zum Aufsuchen der Bogen nehmen, da diese bis zu 10° gar nicht, und von 10° bis 15° höchstens um 2 Einheiten in den Tausendteln differiren.

Auch kann man die oben angegebene Subtraction des 100gradigen Bogens in der Regel vermeiden, wenn man den gegebenen Winkel in Gedanken halbirt oder duplirt und dann gleich das Doppelte, resp. Halbe des Bogens abliest.

Zum Beispiel. Welche Länge hat eine Eisenbahnkurve, welche mit 400 Ellen Radius einen Winkel von 52,3 Grad beschreibt? Zum Doppelten dieses Winkels 104,6° zeigt die Hauptskala die Länge 1,825, die halbirt entnommen 0,913 giebt, so dass die Kurvenlänge in Ellen = 0,913 × 400 = 365,2 betrüge.

Oder: Zu 152,3 zeigt die *Bg.*-Spalte auf 265,7; davon ab die Länge von 100° = 174,6, macht 91,3 Hundertel oder 0,913 × 400 = 365,2 Ellen.

§. 201. Quadrirung des Kreises.

Für die in der Technik so häufig vorkommende Kreisquadrirung, die bekanntlich nach der Formel

$$F = \frac{\pi}{4}\, d^2 \text{ oder } = 0{,}785 \times d \times d$$

erfolgt, ist es im praktischen Leben ganz besonders nöthig,

die umständlichen Rechnungen durch Tabellen entbehrlich zu machen.

Eine einfach nach obiger Formel 0,785 d^2 konstruirte Tabelle giebt den Flächeninhalt in dem Maasse des Durchmessers, d. h. wenn letzterer in Zollen oder in Ruthen gegeben den Kreisinhalt ebenfalls in Zollen oder Ruthen, versteht sich aber von selbst, in Flächen-, d. h. Quadrat-Zollen und Ruthen *).

Am bei weitem häufigsten kommt aber in der Praxis der Fall vor, dass der Durchmesser in Zollen, der Inhalt in Fussen ausgedrückt oder auszudrücken ist.

Beim Gebrauche von Decimalzollen (Zehntelfussen) verwandelt sich obige Formel in:

$$F = \frac{0{,}785}{100}\ d^2 = 0{,}00785\ d^2\ \square\text{Fusse},$$

und beim Gebrauche von Duodecimalzollen (Zwölftelfussen) in:

$$F = \frac{0{,}785}{144}\ d^2 = 0{,}00545\ d^2\ \square\text{Fusse},$$

wo in beiden Ausdrücken der Buchstabe *d* Zolle bedeutet.

Für beiderlei Bedürfnisse aber oder beide Maasssysteme erbietet sich der Knecht zur Angabe aller Kreisflächen ohne alle und jede Rechnung; fürs Duodecimalmaass mit seiner Vorder-, fürs Decimalmaass mit seiner Rückseite. Und weil das Ablesen dieser Flächen einen wesentlichen Theil der ferneren Anwendungen des Knechts (als Körpermesser, Vieh- und Holztaxator u. s. w.) bildet und die Fertigkeit darin alle diese Geschäfte auf eine ganz einfache Multiplicationsarbeit reducirt, müssen wir den geehrten Leser und Messknechtsfreund recht dringend bitten, sich in die Messknechtspraxis der Kreisquadrirung durch Auflösung recht

*) Um der Kürze des Ausdrucks willen werden wir diesen Unterschied zwischen gleichnamigen Längen-, Flächen- und Körpermaassen als selbstverständlich immer voraussetzen.

vieler Beispiele so einzuüben, dass er künftig des Nachsuchens oder Nachdenkens über die anzuwendende Regel gar nicht mehr bedarf. Es wird das dadurch bedingte kleine Opfer an Zeit und Mühe den reichlichsten Lohn tragen

§. 202. Kreisquadrirung, wobei die Fläche in dem Maasse des Durchmessers bestimmt werden soll.

a. Sucht man in der *K*- oder Kreisspalte der Rückseite das Maass des Durchmessers auf, so giebt die Inhaltsskala die Fläche in gleichem Maasse an; die Zahlen dieser Skala bedeuten Ganze und es sind die einzelnen Zehntel noch ganz sicher und genau einzuschätzen. Sucht man aber die Durchmesserzahl in der *S*- oder Kreis-Sextanten-Spalte, so erhält man die Fläche des Kreissechstels, deren Sechsfaches natürlich auch den Vollkreis giebt.

b. Für Durchmesser, die die Zahl 20 übersteigen, kann man sich sonach der Sextantenspalte bedienen, indem man die von ihr gezeigte Inhaltszahl gleich sechsfach ausschreibt.

c. Bei Durchmessern, die die eine oder andere Spalte übersteigen, erhält man die Inhaltszahl, wenn man des Durchmessers Zehntel nimmt und die ihm entsprechende Inhaltszahl verhundertfacht (2 Decimalen zuschneidet).

d. Bei zu kleinen Durchmessern dagegen: indem man dessen Zehnfaches nimmt und die entsprechende Inhaltszahl um 2 Decimalen verkürzt.

NB. Wer a und b und ausserdem weiss, dass dem 10mal so grossen oder so kleinen Durchmesser die 100mal so grosse oder so kleine Fläche zukommt, braucht c und d nicht zu merken; er handelt von selbst darnach.

1. Beispiel. Zu a. Ein Gesichtskreis von 4⅕ Meilen Radius begreift welche Fläche?

Da $d = 8,4$ Meilen und der Strich 8,4 der *K*-Spalte deutlich auf 55,4 zeigt, so ist die verlangte Fläche = 55,4 □Meilen.

2. Beispiel. Zu a. Die Kreisfläche zu 19¾ oder 19,75 Ruthen Durchmesser?

Die Mitte zwischen 19,7 und 19,8 der K-Spalte (oder der Viertelspunkt) zeigt 306.4 □Ruthen.

3. Beispiel. Zu b und c. Die Kreisfläche zu 37,3 Zoll a) mittels der S- und b) mittels der K-Spalte nach □Zollen zu quadriren.

$S_{37,3}$ zeigt 182,1, das sechsfach als 1092,6 □Zoll der Fläche giebt. — Oder $K_{3,73}$ oder reichlich 3,7 in der K-Spalte, giebt 10,9; hundertfach also: 1090 □Zoll.

4. Beispiel. Zu c. Wie viel □Decimeter hat der Kreis, dessen Radius 175,5 Decimeter lang ist?

Zum Zehntel-Durchmesser 17,54 gehört, wie leicht einzuschätzen 241,7; also zum 10mal grösseren 175,4 die 100mal grössere Fläche 24170 □Decimeter.

5. Beispiel. Wie viel □Fusse hält ein Kreis von 0,27 Fuss Durchmesser?

Zum 'zehnfachen Durchmesser 2,7 gehören augenscheinlich 5,7; also zum einfachen (10mal so kleinen) 0,057 □Fuss.

§. 203. **Kreisquadrirung, wobei die Fläche in zehnfachem Maasse des Durchmessers, z. B. in (□)Fussen, bei in Decimalzollen gegebenem Durchmesser abgelesen werden soll.**

Wenn man durch Abschneidung einer Decimale die gegebenen Durchmesserzolle in Fusse verwandelt, so hat man diesen Fall sofort auf den vorigen zurückgeführt. Wegen des häufigen Vorkommens wollen wir aber für den gegenwärtigen seine leicht sich ergebenden specifischen Regeln noch besonders ansetzen. Sie heissen:

a. Suche in der K-Spalte den um eine Decimale verkürzten Durchmesser auf und schreibe die zugehörigen vollen Inhaltszahlen als Ganze. Beim Uebersteigen der K-Spalte geht man in die S-Spalte und versechsfacht — gleich im Kopfe — den nach derselben Regel entnommenen Inhalt.

b. Oder suche in der *K*- (oder *S*-) Spalte den ungeänderten Durchmesser und schneide von der gefundenen Inhaltszahl 2 Decimalen, bei mit entnommenen Zehnteln derselben aber 3 Decimalen, ab.

1. Beispiel. Zu 15 Decimalzollen Durchmesser die Kreisfläche?

Auflösung nach a. Zu 1,5 der *K*-Spalte gehört 1,77 □Fuss.

Auflösung nach b. Zu 15 der *K*-Spalte gehören 176,7 (□Zolle), also hier 1,767 □Fuss.

2. Beispiel. Ein Stamm von 35½ (= 35,5) Decimalzoll Stärke hat an Querschnittsfläche?

Nach c oder a statt 35,5 in der *K*-Spalte 3,55 gesucht, zeigt auf 9,9 □Fuss. Oder mittels der Sextanten-Spalte 35,5 aufgesucht und die beistehende Inhaltszahl 1,65 im Geiste gleich versechsfacht, macht ebenfalls 9,90 □Fuss.

3. Beispiel. Die Kreisfläche nach □Fussen bei 1,3 Decimalzoll Durchmesser?

1,3 der *K*-Spalte aufgesucht, zeigt 1,35 (□Zoll) oder nach b 0,0135 □Fuss.

§. 204. Zusatz. Ist zu einer gegebenen Kreisfläche der ihr entsprechende Durchmesser zu finden, so ist jene einfach in der Inhaltsskala aufzusuchen, wo dann die *K*-Spalte den Durchmesser in gleichem Maasse giebt.

Schneidet man der Flächenzahl 2 Decimalen zu, was bei sehr kleiner Grösse anzurathen, so erhält man den Durchmesser in zehnmal kleinerem Maasse.

1. Beispiel. Wie weit muss ein kreisförmiges Rundtheil sein, das netto einen preussischen Morgen oder 180 □Ruthen enthalten soll?

Die Inhaltszahl 180 zeigt deutlich in der *K*-Spalte auf 15,15 (Ruthen).

2. Beispiel. Wie stark der Stamm, der netto 1 □Fuss hält?

Die 100fache Inhaltszahl 100 zeigt auf dem *K*-Durchmesser 11,3 Zoll. Oder der Inhalt 1 deutlich genug auf 1,13 oder 11,3 Zoll.

§. 205. Die Kreisquadrirung für Duodecimalmaass.

In die *Kr.*-Spalte der Vorderseite sind die Duodecimalzolle so eingetragen, dass die mit **100** überschriebene Mittelskala die Kreisflächen nach □Fussen angiebt, und zwar nach Hunderteln; und also, sobald man 2 Decimalen abschneidet nach ganzen □Fussen.

Z. B. Zu $9\frac{1}{2}$ Duodecimalzoll gehören 49 Hundertel oder 0,49 □Fuss Kreisfläche; zu $23\frac{1}{2}$ Zoll dagegen 301 Hundertel oder 3,01 □Fuss.

Liest man aber noch die Bruchtheile der Skala in Zehnteln ab, so hat man 3 Decimalen abzuschneiden

So zu $9\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser genau 0,492 □Fuss
und zu $23\frac{1}{2}$ » » » 3,012 »

In gleicher Weise gilt die *Sx.*-Spalte für die Kreissextanten.

Allgemeiner aufgefasst, lautet aber das Gesetz für die Quadrirungs- und Kubirungsskala der Vorderseite folgendermaassen:

a. Wer in der *Kr.*-Spalte einen Durchmesser aufsucht und die beistehende Inhaltszahl der Mittelskala um 2 (bei Ablesungen der Zehntelgrade um 3) Decimalen verkürzt, erhält die zugehörige Kreisfläche in dem 12mal grösseren Maasse ausgedrückt; also in □Zollen, wenn der Durchmesser in Duodecimallinien; in □Fussen, wenn er in Zwölftelzollen; in preussischen □Ruthen, wenn er in preussischen Fussen (12 = 1 Ruthe) ausgedrückt war.

Sie ist also keineswegs bloss auf Zolle und Fusse beschränkt.

Auf Seite 248 ward bereits erwähnt, dass, wenn der wirkliche Durchmesser 10mal so gross ist, als der aufgesuchte, die wirkliche Fläche dann 100mal so gross, als die aufgefundene. Daraus folgt auch für die Kreistafeln der Vorderseite:

b. Wenn des Durchmessers Zehntel oder der um 1 Decimale verkürzte Durchmesser in einer der Eingangs-

spalten (*Kr.* oder *Sx.*) aufgesucht wird, so bedeuten dann die Grade der Inhaltsskala volle Ganze, wonach man also weit über die Tafel hinausgehende Kreise quadriren kann.

c. Sehr kleine Durchmesser thut man wohl zu verzehnfachen, muss aber dann von der zugehörigen Inhaltszahl 2 Decimalen mehr abschneiden als sub a angegeben.

d. Das Aufsuchen eines Durchmessers zum gegebenen Kreisinhalte besteht einfach im Umgekehrten der vorhergehenden Praxis; d. h. darin, dass man die gegebene Flächenzahl in der Inhaltsskala aufsucht und den Durchmesser aus der *Kr.*-Spalte abliest mit Berücksichtigung der sub a, b und c bemerkten Verhältnisse (S. 5. und 6. Beispiel).

1. Beispiel. Der Kreis, dessen Durchmesser 10¼ Linien, hat in □Zollen?

Die *Kr.*-Spalte bei 10¼ zeigt auf 57,3, d. h. nach a auf 0,573 □Zolle.

2. Beispiel. Ein Stamm von 23¼ Duodecimalzollen Durchmesser hat an Inhalt 2,947 □Fuss (indem die *Kr.*-Spalte bei 23¼ auf 294,7 zeigt).

3. Beispiel. Ein Stamm von 52½ Duodecimalzollen Grundstärke hat an Grundfläche?

a) Nimmt man die *Sx.*-Spalte, so zeigt diese des Kreises Sechstel zu 2,506 □Fuss, also — gleich im Kopfe versechsfacht — den Vollkreis = 15,036 □Fuss.

b) Nimmt man die *Kr.*-Spalte und des Durchmessers Zehntel 5,25 oder 5¼, so zeigt jene kurz und rund auf 15 □Fuss.

4. Beispiel. Die Stammflächen zu den Stärken 12½, 15½, 18½ bis auf das Hundertel □Fuss anzugeben.

Zu	12½	sagt	die	*Kr.*-Spalte	0,85	□Fuss,
»	15½	»	»	»	1,31	»
»	18½	»	»	»	1,87	»

5. Beispiel. Welche Stärke müsste ein Stamm von 3 □Fuss Grundfläche haben?

3 □Fuss = 300 Hundertel □Fuss, und zur Inhaltszahl 300 zeigt die *Kr.*-Spalte: knapp $23\frac{1}{2}$ Zoll.

6. Beispiel. Welchen Durchmesser müsste man einem cylindrischen Glase geben, das 8 □Duodecimalzoll Bodenfläche haben soll?

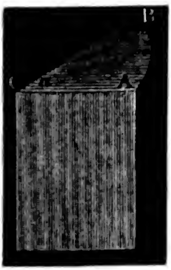
Da 8 × 100 = 800 die Skala übersteigt, nimmt man das Hundertstel 8 und erhält dann das Zehntel des gesuchten Durchmessers mit 3,82 Linien, also den ganzen mit 38,2 Linien.

§. 206. Der Kreissector oder Ausschnitt

a) verhält sich zum Vollkreise wie sein Centrumswinkel α zum Vollwinkel oder 360°; zur Sextantenfläche des Kreises verhält er sich folglich wie $\alpha : 60°$. Hierin liegt die

Regel: Suche zum gegebenen Durchmesser mittels der Sextantenspalte (*S* oder *Sx.* nach der Regel der Seiten 248—252) die zugehörige Inhaltszahl und multiplicire diese mit $\frac{\alpha}{60}$ oder dem sechzigsten Theil des zugehörenden Centrumswinkels.

Fig. 172.



Beispiel. Wenn der Centrumswinkel eines Kernscheites 50 Grad und der Halbmesser = 9 Zoll Duodecimalmaass, wie gross ist die Grundfläche?

Zum Durchmesser 18 sagt die *Sx.*-Spalte 0,294; also $F = 0,294 \times \frac{50}{60} = 0,245$ □Fuss.

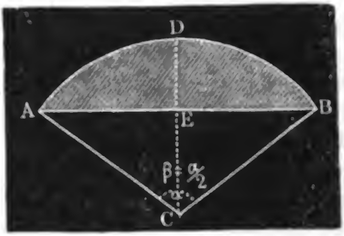
b) Die Kreissectorfläche ist auch = der Bogenlänge × dem halben Radius. (Bei Duodecimalmaass kann man sich dann zur Verwandlung der so berechneten □Zolle in □Fusse der *Pr.*- oder Prismenspalte bedienen.)

Beispiel. Die Rindenseite obigen Scheites sei 18 Zoll, der Halbmesser 10 Zoll (Duodecimalmaass); dann ist des Sectors Inhalt $= \frac{18 \times 10}{2} = 90$ □Zoll, und diese in der *Pr.*-Spalte aufgesucht, geben 0,625 □Fuss.

§. 207. Das Kreissegment.

Wenn es auf volle Genauigkeit ankommt, so quadrirt man den entsprechenden Sector und das zugehörige Dreieck und zieht beide von einander ab. Und wenn eine annähernde Genauigkeit genügt, so quadrirt man es als Parabelsegment, d. h. durch Multiplication der Grundlinie mit der ums Drittel verminderten Höhe. (Siehe Parabelfläche §. 209)

Fig. 173.



1. **Beispiel.** Wie gross ist die genaue Segmentenfläche, wenn ADB ein Kreisbogen von $\alpha = 95°$ und 200 Ellen Radius ist?

Berechnung des Sectors: Die Bogenlänge ADB ist nach der $Bg.$-Spalte $= Bg.\ (195 - 100) = (3{,}395 - 1{,}746) = 1{,}649$ für $r = 1$, also für $r =$ 200 Ellen = 329,8 Ellen, und sonach die Sectorfläche

$$= \frac{329{,}8 \times 200}{2} = 32980 \text{ □Ellen.}$$ — Des Dreiecks ACB Fläche aber ist nach Formel (2) S. 229

$$= \frac{CA \times AB \times sin.\ C}{2} = \frac{200\ .\ 200\ sin.\ 95 \text{ oder } 85°}{2}$$

(s. S. 115) $= 20000 \times 0{,}996 = 19920$ □Ellen.

Also Segment $= 32980 - 19920 = 13060$ □Ellen.

2. **Beispiel.** Von einem Kreissegmente sei bekannt die Chorde $AB = 100$ Ruthen und der Radius $AC = 80$ Ruthen $= r$. Wie gross ist der genaue Inhalt?

AE ist der $r$fache Sinus von β; also

$$sin._1\ \beta = \frac{AE}{r} = \frac{50}{80} = 0{,}625,$$ welcher (hundertfach als $62\frac{1}{2}$) in der *Sin.*-Spalte aufgesucht auf 35,8° zeigt. Sonach ist $< C$ oder $\alpha = 35{,}8 \times 2 = 71{,}6°$, und die weitere Berechnung nun ganz wie im ersten Beispiele.

8. Die Ellipsenfläche.

§. 208. Die Ellipse bildet sich a) mittels des schiefen Schnittes (EF Fig. 174) durch beide Seiten eines Kegels; b) mittels jedes schiefen Schnittes (A Fig. 175) eines Cylinders; c) mittels proportionirter Vergrösserung oder Verkleinerung der Ordinaten eines Kreises F. 176; d) mittels eines in seinen Enden M und N Fig. 176 befestigten Fadens MDN von der Länge der grossen Achse AB, der, durch einen Stift D gespannt, die Lagen MD_1N, MD_2N, MDN etc. annimmt.

Fig. 174.

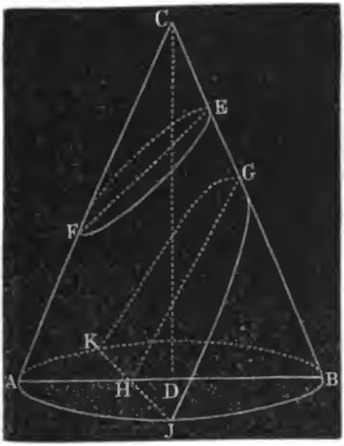
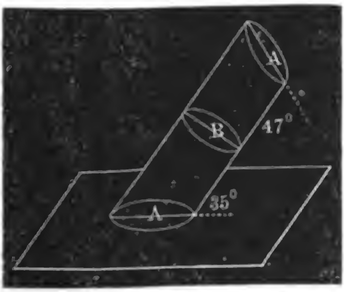


Fig. 175.



Bezeichnet d den kleinsten, D den grössten Durchmesser (die kleine und grosse Achse), so ist vermöge der sub c. des vorigen Paragraphen bemerkten Entstehungsweise die Ellipsenfläche

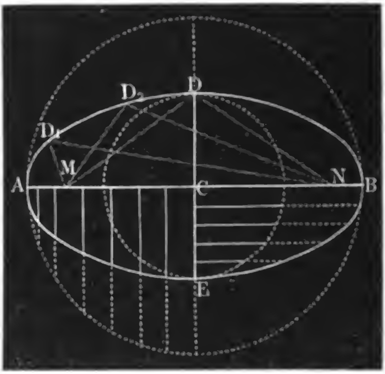
$$F = (\text{Kreis um } d) \text{ mal } \frac{D}{d} = (\text{Kreis um } D) \text{ mal } \frac{d}{D},$$

worin folgende einfache Quadrirungsregel liegt:

a) Suche die Kreisfläche zum kleinsten Durchmesser und vergrössere sie nach dem Verhältnisse beider Hauptdurchmesser; oder:

b) Suche die Kreisfläche zum grössten Durchmesser und verkleinere sie nach dem Verhältnisse beider Hauptdurchmesser.

Fig. 176.



Beispiel. Ein Bottich mit elliptischer Grundfläche hat als grösste Länge 95 und als kleinste Breite 60 Duodecimalzolle; also wie viel □Fuss Grundfläche?

Die Kreisfläche *Kr.* zu 60″ Durchmesser giebt der Knecht kurz zu 19,6 □Fuss, und so hat man für die Ellipsenfläche *E*:

$$K : E = 60 : 95 \text{ oder } E = K \cdot \frac{95}{60} = 19{,}6 \cdot \frac{19}{12}$$

$= 31{,}03$ □Fuss.

9. Die Parabelfläche.

§. 209. Die Parabel bildet sich a) als Wurflinie im luftleeren Raume. b) Durch einen Schnitt (*GH* Fig. 177) am Kegel, parallel mit einer Seite desselben. c) Wenn man 2 Linien *MN* und *DX* Fig. 178 rechtwinklig an einander setzt, in der einen *DX* (der Achse) einen Punkt (Brennpunkt, Focus) *F* annimmt und die Curve $A\,C_1\;C_2\;C_3$ und $A\,B_1\;B\;B_3$ so zeichnet, dass jeder ihrer Punkte vom Brennpunkte *F* eben so weit entfernt ist als von der Grundlinie (Leitlinie,

Directrix) MN; z. B. $C_2 F = C_2 G_2$. Oder auch d) wenn man auf einer Abscissenlinie AX zu beiden Seiten rechtwinklige Ordinaten errichtet, deren Quadrate sich wie ihre Abscissen verhalten, z. B. $(X_2 C_2)^2 : (X_3 C_3)^2 = AX_2 : AX_3$, wobei AX die Achse der Parabel wird. Aber auch e) wenn mit Beobachtung desselben Grössengesetzes die Ordinaten schiefwinklig sind wobei die Abscissen- oder Mittellinie SH, Fig. 179, ein sogenannter Durchmesser der Parabel wird, der stets || zur Achse und dessen Scheiteltangente || zu seinen Ordinaten ist. Sowie f) wenn man

Fig. 177.

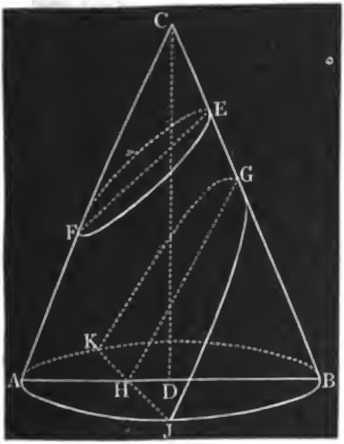
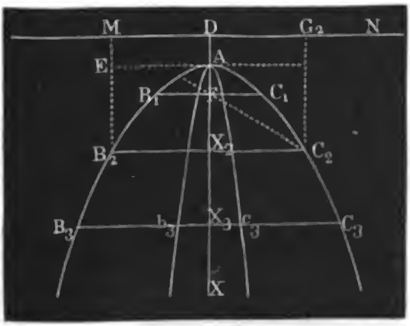
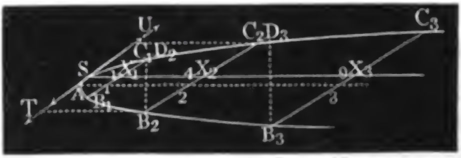


Fig. 178.



die Ordinaten einer gegebenen Parabel beliebig viele Male verkleinert oder vergrössert, wie $b_3 A c_3$, deren Ordinaten hier das Viertel von $B_3 A C_3$ sind.

Fig. 179.

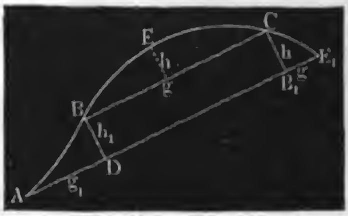


§. 210. Jedes Parabelsegment, dessen Mittellinie die Parabelachse und dessen Sehne also rechtwinklig darauf, heisst ein symmetrisches oder Achsensegment, wie z. B. $B_2 A C_2$ Fig. 178. Seine Fläche ist $= \frac{2}{3}$ des Produkts aus seiner Grundlinie und Höhe. Dasselbe gilt von jeder seiner Hälften, wie $B_2 A_2 X$ in Fig. 178. Das äussere eingebauchte ist sonach $= \frac{1}{3}$ des Produkts aus Grundlinie und Höhe; folglich die eine Hälfte desselben $AEB_2 = \frac{1}{3}\, EB_2 \times EA$ oder ebenfalls $= \frac{1}{3}$ des Produkts seiner Basis und Höhe. Dieselben Gesetze gelten auch für schiefe Segmente, sofern man bei ihnen statt der Achse und ihrer Parallelen den ihrem Sehnensysteme zugehörigen Durchmesser substituirt, wie Fig. 179 verdeutlicht. Das Segment $B_2 S C_2$ ist nämlich ebenfalls $= \frac{2}{3}$ des korrespondirenden Parallelogramms $B_2 C_2 T U$, und auch jede Hälfte wie $B_2 S X_2 = \frac{2}{3}$ des Parallelogramms $B_2 T S X_2$, und die äussere Fläche $B_2 T S$ $= \frac{1}{3}$ desselben oder $\frac{1}{3}$ Grundlinie $\times$ Höhe.

§. 211. In Folge dieser Sätze und weiterer Verfolgung derselben hat man:

1) fürs Parabelsegment die Quadrirungsregeln:

Fig. 180.



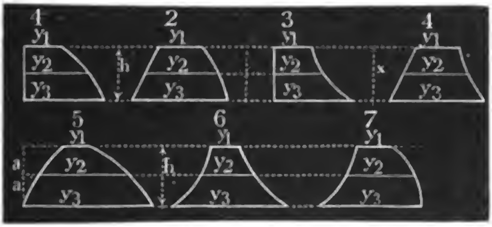
Jedes Segment, wie BEC oder B_1CE_1, dessen Ausbauchung als eine parabolische betrachtet werden kann, ist $= \frac{2}{3} \times g \times h$ Desgleichen jedes eingebauchte wie $ADB = \frac{1}{3} \times g_1 \times h_1$.

2) Fürs Parabeltrapez, gleichviel ob nun eine oder beide Nebenseiten parabolisch — concav oder convex — gekrümmt sind Fig. 181: Wenn y_1 und y_3 die beiden Grundlinien und y_2 die Mittellinie, h die ganze Höhe oder Breite bezeichnet, so ist nach Gesetzen der Parabelgeometrie

$$F = \frac{y_1 + 4\,y_2 + y_3}{6}\,h$$

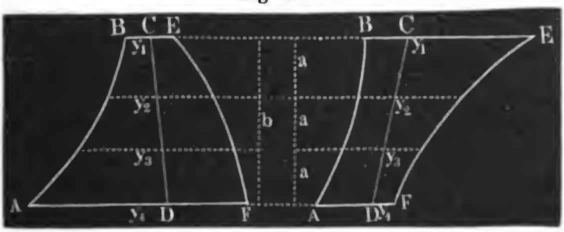
oder, wenn a den Abstand der 3 Parallelen y_1, y_2, y_3 bedeutet: $(y_1 + 4\,y_2 + y_3)\,\frac{a}{3}$.

Fig. 181.



Und daraus hat man weiter gefolgert: 3) wenn das Trapez in 3 Parallelsectionen zerlegt und die Grösse der Ordinaten oder Parallelen nach der Reihe durch

Fig. 182.



y_1, y_2, y_3, y_4, die ganze Breite durch h und der Abstand der Parallelen durch a bezeichnet ist:

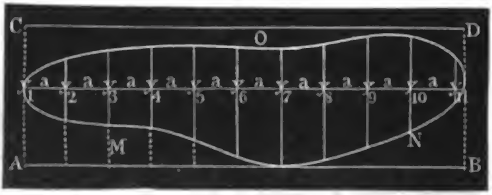
$$F = \frac{y_1 + 3\,(y_2 + y_3) + y_4}{8}\,h = [y_1 + 3\,(y_2 + y_3) + y_4]\,\frac{3\,a}{8};$$

gleichviel, ob man darunter das einseitige Parabeltrapez *ABCD* oder das doppelseitige *ABEF* versteht.

10. Die Fläche mit unregelmässiger oder beliebig krummliniger Begrenzung.

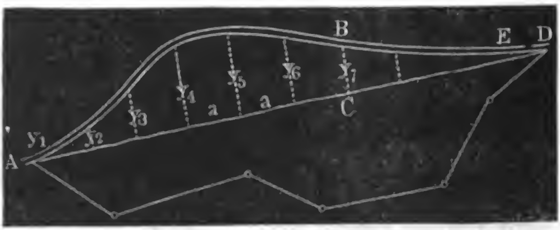
§. 212. Theilt man eine derartige Figur durch Parallelen in so schmale Streifen, dass immer je zwei vereinigt ohne Nachtheil als ein (gleichviel ob convexes oder concaves) Parabeltrapez betrachtet werden können, so findet

Fig. 183.



man durch Anwendung der Regel 2 auf ein solches Streifen-System, die nach ihrem Entdecker so benannte

Fig. 184.



Simpson'sche Regel, mittels welcher man jede krummlinige Fläche bis zu jedem beliebigen Genauigkeitsgrade quadriren kann. Sie lautet:

1. Ist die Zahl der Streifen oder Sectionen gerade, also die der (gleich weit von einander abstehenden) Parallelen oder Breitenlinien $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ ungerade (mithin die Ordnungsziffer oder der Zeiger n der

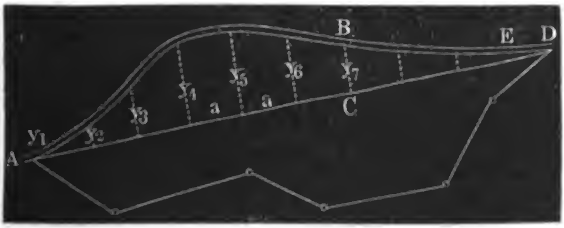
letzten ebenfalls eine ungerade Zahl) und der Abstand derselben oder die Streifenbreite $= a$, so ist:

$$F = \left\{\begin{array}{l}(y_1 + y_n) \\ + (y_3 + y_5 + y_7 + \ldots)\,2 \\ + (y_4 + y_6 + y_8 + \ldots)\,4\end{array}\right\} \times \frac{a}{3};$$

d.h $=$ der Summe der ersten u. letzten Parallele **einfach**, $+$ die Summe aller anderen ungeradstelligen **doppelt**, $+$ die Summe aller geradstelligen **vierfach**, und die Summa Summarum mit dem Drittel der Streifenbreite multiplicirt.

2. Ist die Zahl der Streifen eine ungerade, z. B. 9, wie in Fig. 185, so separirt man 3 davon und berechnet diese

Fig. 185.



nach 3 S. 259 und das Andere nach der eben aufgestellten Regel.

3. Hat einer der beiden Endstreifen oder haben beide die Form eines Segments oder Dreiecks, so werden die entsprechenden Anfangs- oder Endparallelen oder beide $(y_1, y_n) =$ Null in die Formel gesetzt.

§. 213. **Beispiele.**

1. **Beispiel.** Die Fläche, Fig. 183, von der Länge $AB = 21$ Ruthen, ward in 2 Ruthen breite Streifen

getheilt; und die Länge der darauf genommenen senkrechten Breiten war:

$y_1 = 0$
$y_2 = 3$
$y_3 = 4$
$y_4 = 4{,}8$
$y_5 = 5{,}9$
$y_6 = 7{,}2$
$y_7 = 8{,}1$
$y_8 = 7{,}4$
$y_9 = 7{,}1$
$y_{10} = 6{,}3$
$y_{11} = 4{,}1$

so, dass am rechten Ende ein Segment von 4,1° Grundlinie und 1° Höhe übrig blieb. Der Inhalt des Ganzen berechnet sich demnach wie folgt:

0	4	3
4,1	5,9	4,8
4,1	8,1	7,2
	7,1	7,4
	25,1	6,3
	50,2 (2	28,7
		114,8 (4

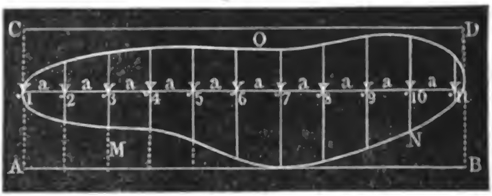
$$(4{,}1 + 50{,}2 + 114{,}8)\frac{a}{3} = 169{,}1 \times {}^2/_3 = 113{,}07 \ \square\text{Ruth.}$$

Dazu noch das einzelne Segment

$$= {}^2/_3 \times 4{,}1 \times 1 = 2{,}73 \ \square\text{Ruth.}$$

Giebt zusammen 115,8 □Ruthen.

Fig. 186.



2. Beispiel. Wäre die vorige Figur ein Teich und mittels Winkelkopf und Umlegung eines rechteckigen Standliniennetzes aufgenommen, so wäre sein Inhalt = dem des Standliniennetzes weniger dem der Sectionen *M*, *N* und *O*, deren jede ebenfalls am genauesten nach Simpson's Regel quadrirt wird. Hatte man z. B. in der Section *M* von links an gerechnet die 7 Ordinaten oder Abschläge 7; 5,5; 4,5; 4; 3; 2 und 0, bei 2 Ru-Abstand von einander, so muss sein:

$$\text{Fläche der Section } M = \left\{ \begin{array}{rl} 7 + 0 = & 7 \\ (4{,}5 + 3)\,2 = & 15{,}0 \\ (5{,}5 + 4 + 2)\,4 = & 46{,}0 \\ \hline & 68{,}0 \times {}^{2}/_{3} = 45^{1}/_{3} \ \square\text{R.} \end{array} \right.$$

3. **Beispiel.** Bei der Berechnung des Risses Fig. 184 habe man den krummlinigen Theil mittels der Diagonale AD abgeschnitten auf letzterer von 6 zu 6 Ruthen Ordinaten errichtet und dabei 10 Ordinaten oder 9 Sectionen und bei D ein kleines eingebauchtes Segment von 2 Ruthen Länge und 0,6 Ruthen Höhe erhalten. Die Ordinatenlängen, von A an gerechnet, waren nach der Reihe: 0,0; 2,4; 7,3; 8,9; 9,2; 8,5; 5,8; 3,8; 1,9; 0,6; und gemäss Regel 2) S. 261. sind die ersten 6 Sectionen und die anderen 3 und das letzte Spitzchen für sich zu berechnen. Demgemäss hat man für das zwischen den Ordinaten 0,0 und $BC = 5{,}8$ befindliche Stück $ABC =$

$$\begin{array}{r} 0{,}0 \\ 5{,}8 \\ \hline 5{,}8 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} 7{,}3 \\ 9{,}2 \\ \hline 16{,}5 \\ \hline 33{,}0 \end{array} (2 \quad + \quad \begin{array}{r} 2{,}4 \\ 8{,}9 \\ 8{,}5 \\ \hline 19{,}8 \\ \hline 79{,}2 \end{array} (4$$

$$\text{also} \quad \begin{array}{r} 5{,}8 \\ 33{,}0 \\ 79{,}2 \\ \hline 118{,}0 \times \frac{6}{3} \text{ oder } 2 \\ \hline 236{,}0 \ \square\text{Ruthen;} \end{array}$$

das Stück $BCE = [5{,}8 + 3\,(3{,}8 + 1{,}9) + 0{,}6]\ \frac{3 \cdot 6}{8}$
$= 52{,}9$ □Ruthen;

und das Stück $ED = {}^{1}/_{3} \cdot 2 \cdot 0{,}6 = 0{,}4$ □Ruthen.
Und zusammen: $236{,}0 + 52{,}9 + 0{,}4 = 289{,}3$ □Ruthen.

Funfzehntes Kapitel.

Der Messknecht als Feld- und Forst-Vermesser (als Geodät im engeren Sinne).

---

§. 214 Die Geodäsie (Landmesskunst) im weiteren Sinne begreift fast alle in diesem zweiten Buche abgehandelten Geschäfte mit ein. In ihrer engeren, gewöhnlicher gebrauchten Bedeutung, wie sie jetzt in diesem Kapitel in Anwendung kommen soll, versteht man darunter mehr bloss die Kunst des sogenannten Aufnehmens, d. h. des Vermessens und Kartirens von Landstücken.

Für den denkenden Leser werden wir in diesem Kapitel wenig hinzuzufügen haben. Vor seinem geistigen Blicke ist — in Erinnerung an das Kapitel vom Winkelkopfe, von der Winkelmessung, von der Horizontalreduction und Flächenquadrirung — der kleine Messknecht als Geodät gewiss schon in vollster Thätigkeit. Diese Thätigkeit wird aber eine etwas verschiedene, je nachdem wir

a) nur die Coordinaten- oder Perpendikular-Methode, d. h. den Knecht nur als Winkelkopf (vergl. S. 150 und 240), oder,

b) wie namentlich bei Messungen aus dem Umfange, die Winkelmethode oder den Knecht als Winkelmesser und Trigonometer (vergl. S. 139, 141, 232), oder

c) ihn in beiden Eigenschaften zugleich anwenden wollen; so wie

d) ob es uns bloss um Vermessung der Flächengrösse oder auch noch um Aufnahme der Figur oder Form, d. h.

e) um Anfertigung eines Risses, zu thun ist.

§. 215. Handelt es sich nur um die Aufnahme der

Flächengrösse eines Drei- oder Vier- oder Vielecks oder sonst wie gestalteten Terrain- (Feld- und Forstgrund-) Stückes, und hat man den Messknecht in seiner einfachen Praxis als Trigonometer, Winkelkopf und Horizontalreductor gehörig beherrschen gelernt: so braucht man nur die entsprechenden Paragraphen des vorigen Kapitels von der Flächenquadrirung zu befragen, die dort verlangten Distanzen und Winkel mit dem Knechte zu messen und damit nach Vorschrift derselben Paragraphen zu verfahren.

So z. B. sagt S. 231, hinsichts der Flächenaufnahme des Trapezes, in der Formel $F = \frac{1}{2}\, m \,.\, h$, dass es nur der Messung zweier Stücke, der Mittellinie und der Höhe bedarf, indem deren Produkt die Flächengrösse giebt; und ebenso S. 232, wenn es sich um die eines unregelmässigen Vierecks handelt, da $F = \frac{1}{2}\, d\, (h_2 + h_1)$ oder auch $= \frac{1}{2}\, d_1 \,.\, d_2\, \sin \delta$, dass dies mit der Messung dreier Stücke abgethan ist. Aber die Form oder der Riss der Fläche ist damit durchaus noch nicht vollständig bestimmt. Aus Mittellinie m und Höhe h kann man unendlich viele Trapeze formen, die zwar immer denselben Inhalt, aber verschiedene Seiten und Winkel haben. Dasselbe gilt hinsichts der Trapezoide, sobald nur eine Diagonale und ihre Höhenlothe, oder beide Diagonalen und ihr Durchschnittswinkel, gemessen worden sind.

Wir wissen vielmehr in Folge der Untersuchungen der Planimetrie, dass in jeder Figur von n Seiten oder Ecken, (oder kurz: in jedem $n$ecke) $2n-3$ Stücke gegeben oder gemessen werden müssen, wenn es nicht bloss seiner Grösse, sondern auch seiner Gestalt nach bestimmt sein soll. (Unter den 3 fehlenden Stücken muss sich aber mindestens 1 Winkel mit befinden.) Zu solchem Zwecke bedarf es demnach

bei einem Dreiecke $6 - 3 = 3$ Stücke
» » Vierecke $8 - 3 = 5$ »
» » Fünfecke $10 - 3 = 7$ »

Nimmt man ein viereckiges Landstück, wie Fig. 187, nach der Coordinatenmethode auf, so erhält man alle nöthigen Elemente zur Bestimmung der Fläche wie des Risses (der Figur), aber man hat auch 5 Stücke zu messen, nämlich die Coordinaten (x_2 u. y_2) des Punktes 2, desgleichen des Punktes 3 (x_3 u. y_3) und die Abscisse (x_4) des Punktes 4.

§. 216. Wo man im Innern der aufzunehmenden Fläche gut operiren kann, wird man in vielen Fällen am besten handeln, den Knecht als Winkelkopf zu gebrauchen und die Aufnahme nach der Coordinatenmethode zu bewerkstelligen, wie es Fig. 187, 188, 189 u. 190 verbildlichen.

Fig. 187.

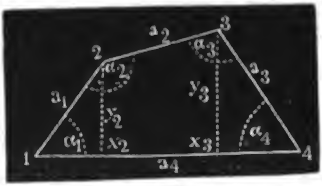


Fig. 188.

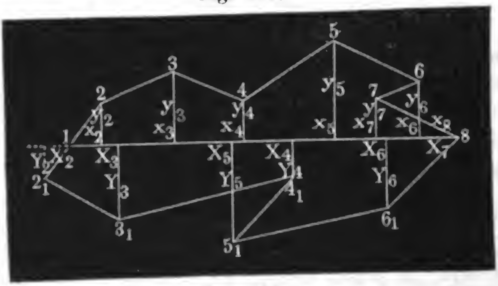
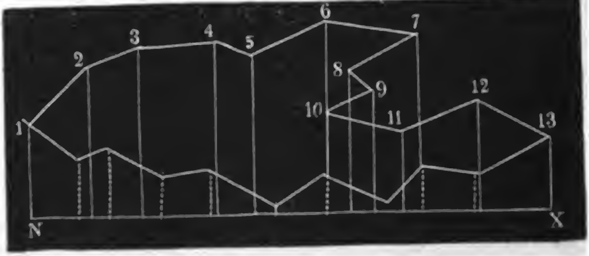
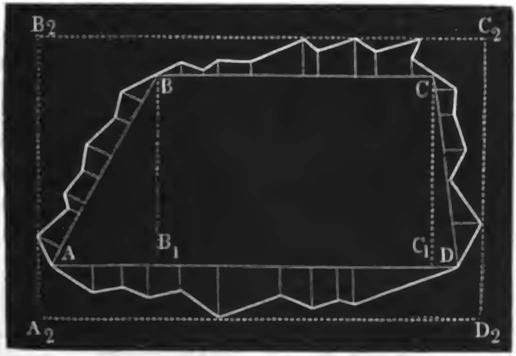


Fig. 189.



Die Aufnahme des Grundstücks Fig. 190 kann übrigens durch-

Fig. 190.



aus nach der Coordinaten- oder auch nach gemischter Methode ausgeführt gedacht werden. Um nämlich die gar zu langen Ordinaten, welche bei der Aufnahme der Fläche Fig. 189 mittels der Standlinie NX vorkommen und die Genauigkeit beeinträchtigen würden, zu vermeiden, hat man in Fig. 190 ein dem Umfange sich möglichst anschmiegendes Netz von vier Standlinien gewählt. Jede dieser 4 Netzlinien wird als Abscissenlinie des ihr zugehörigen Segmentes betrachtet und deshalb mittels des Winkelkopfes von allen Ecken des Umfanges Perpendikel auf die Netzlinien gefällt und alle nöthigen Längen und Breiten (Coordinaten) eingemessen. Die Netzfigur $ABCD$ selbst kann ebenfalls durch Ordinaten BB_1, CC_1 nach Grösse und Form bestimmt werden Weil aber auf die genaue Aufnahme der Standlinien so sehr viel ankommt, wird man, wenn die Figur sehr ausgedehnt ist, besser thun, dieselbe durch Messung ihrer Seiten und Diagonalen zu bestimmen. Das Auftragen des Risses mittels Lineal, Winkel und Maassstab ist selbstverständlich und die Berechnung, auch ohne Riss, ausführbar, wie aus S. 236 etc. ersichtlich.

§. 217. Könnte oder wollte man aber im Innern eines aufzunehmenden Landstücks nicht operiren, so müsste man

die Netzfigur aussen umstecken und durch Messung ihrer Seiten und Umfangswinkel (letztere nach Kapitel 10) bestimmen. Jede Seite bildet wiederum die Grund- oder Standlinien für das entsprechende durch Coordinaten aufzunehmende und zu berechnende Umfangs- und zugehörende (negative) Flächensegment. (S. 242.)

Die Ausarbeitung und Berechnung einer solchen »Aufnahme aus dem Umfange« kann auf zweierlei Weise geschehen. Nach der konstruktiven oder reingeometrischen Methode wird zunächst das Netz aus seinen gemessenen Linien und Winkeln sorgfältig gezeichnet und nachdem es »zum Schluss gebracht ist« die Umgrenzung der Figur mittels der im Handbüchlein (Manuale) verzeichneten Coordinatenmaasse eingetragen und hierauf nach einer der Methoden der S. 242 u. 243 berechnet.

Nach der reinen Rechnungs- oder trigonometrischen Methode bedarf es aber gar keiner Zeichnung. Die Trigonometrie der Vielecke oder Polygone (daher auch Polygonometrie genannt) lehrt nämlich, wie man aus den gemessenen Umfangsseiten und Umfangswinkeln einer Figur (hier des Netzes) sämmtliche Coordinaten derselben durch ein interessantes Rechnungswerk ableiten könne.

Aus den so berechneten und also nun bekannten Coordinaten des Netzes leitet man dann dessen Inhalt (wie es S. 240 u. s. w. gelehrt haben) und aus den unmittelbar gemessenen Coordinaten der Umfangssegmente der eigentlichen Umgrenzung, die Fläche dieser Segmente ab; die, von der des Netzes abgezogen, die des betreffenden Landstücks viel richtiger und sicherer ergeben, als es nach der konstruktiven Methode in Folge der nicht zu vermeidenden Fehlerquellen der Zeichnung möglich ist.

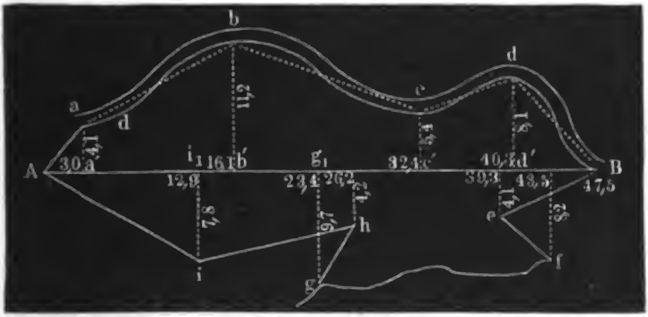
§. 218. Die polygonometrische Coordinatenberechnung einer aus dem Umfange aufgenommenen Figur ist durchaus nicht schwer. Die Konstruktion des Rechnungswerkes kann sehr einfach und sehr mechanisch eingerichtet werden. Die Ausführung ist jedoch immerhin etwas umständlich, kann aber unter Umständen, selbst in Fällen der ganz niederen Messkunde, gar nöthig und vortheilhaft

sein, wie z. B wenn man eine Figur, etwa ein Stück Wald, aus dem Umfange aufnehmen muss, und wenn die Fläche ohne Riss abgeleitet werden soll.

Der Messknecht findet es daher nöthig, am Ende dieses Kapitels beispielsweise seinen Freunden auch noch zu zeigen, wie er sich als polygonometrischer Geodät zu helfen gewohnt ist. Vorerst mag er aber seine eben abgehandelten geodätischen Lehren an einigen zusammengesetzteren Beispielen rekapituliren.

§. 219. Vermessung und Berechnung eines Flurstücks mit nur einer Standlinie.

Fig. 191.



Es werden die Endpunkte (A und B) der Standlinie gewählt, und wie es schon Kapitel 7 S. 151 erläutert worden, alle auf die Figur einflussreichen Punkte mit numerirten Pfählchen versehen (figurirt); dann mittels des Winkelkopfes die Fusspunkte a', b', c', d' u. s. w. aller Ordinaten der Figurirpunkte gefunden und darauf die Einmessung aller Längen und Breiten bewirkt. Es seien dabei die der Skizze Fig. 191 eingeschriebenen Maasse erhalten worden (die Abscissen immer vom Nullpunkte A an gerechnet).

Wählt man zur Berechnung die Methode der Mayerschen Trapezialformel, so gestaltet sich alsdann das Rechnungswerk wie folgt:

a. Obere Abtheilung.

	Breiten.	Längen.
Spitze A)	0,0	3,0
	4,1	16,1
	11,2	32,4
	5,4	40,3
	8,1	47,5
Spitze B)	0,0	

1) 0,0
— 11,2
— 11,2 × 3,0
— 33,6

2) 4,1
— 5,4
— 1,3 × 16,1
— 17,93

3) 11,2
— 8,1
— 3,1 × 32,4
110,44

4) 5,4
— 0,0
5,4 × 40,3
217,62

5) 8,1
+ 0,0
8,1 × 47,5
384,75

—	+
33,6	100,44
17,93	217,62
51,53	384,75
	702,81
	— 51,53

bleiben 651,28 □Ruthen als Fläche der oberen Abtheilung.

b. Untere Abtheilung.

	Breiten.	Längen.
Spitze A)	0,0	12,9
	7,8	26,2
	4,2	23,4
	9,7	43,5
	8,2	39,3
	4,1	47,5
Spitze B)	0,0	

1) 0,0
— 4,2
— 4,2 × 12,9
— 54,18

2) 7,8
— 9,7
— 1,9 × 26,2
— 49,78

3) 4,2
— 8,2
— 4,0 × 23,4
— 93,6

4) 9,7
— 4,1
5,6 × 43,5
243,6

5) 8,2
— 0,0
8,2 × 39,3
322,36

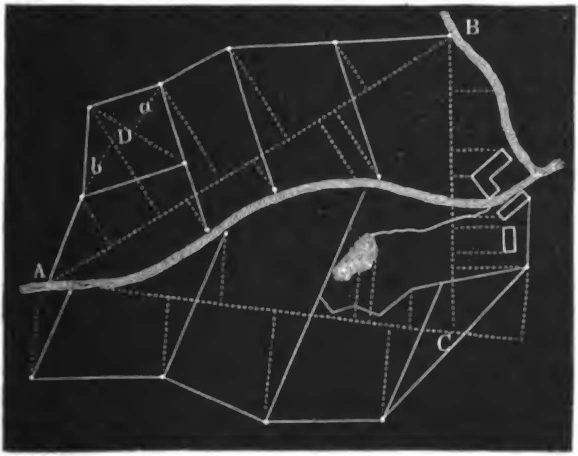
4,1
+ 0,0
4,1 × 47,5
194,75

—
54,18
49,78
93,6
197,56

+
243,6
322,36
194,75
760,71
— 197,56
bleiben 563,15 □Ruthen als Fläche der unteren Abtheilung.

§. 220. **Aufnahme eines Felderkomplexes mittels dreier Standlinien.**

Fig. 192.



Lege erst das Standliniendreieck *ABC* fest und messe seine Seiten möglichst genau. Figurire hierauf das Ter-

rain d. h. setze in alle Figurpunkte, Grenzsteine u. s. w., kleine numerirte Pfählchen; bestimme mit dem zum Winkelkopfe umgeformten Messknechte auf jeder Standlinie die Fusspunkte der zu ihrem Bereiche gehörenden Figurpunkte, miss hierauf die zu jeder Standlinie gehörenden Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) und schreibe die Zahlen in die Skizze, wie in der Figur des vorigen Paragraphen zu ersehen.

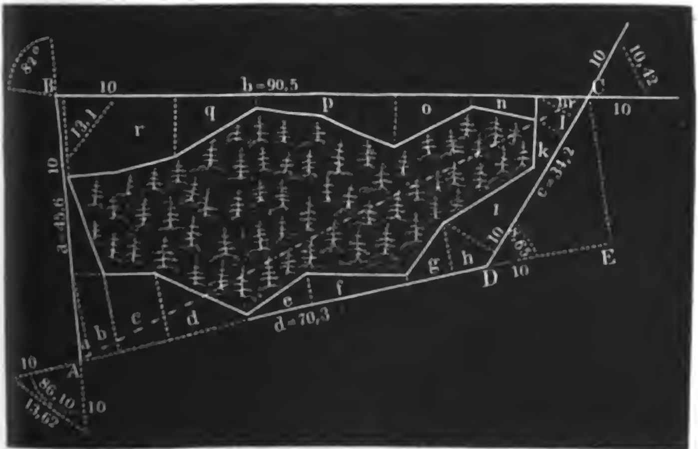
Will man ausser der Grösse der ganzen Flur auch die ihrer einzelnen Parcellen haben, so ist es am rathsamsten, die Vermessung zu kartiren, d. h. einen Riss anzufertigen, indem man mittels Maassstab, Zirkel, Lineal und Winkel erst das Standliniennetz ABC und an dieses dann mittels der gemessenen Coordinaten das Detail aufträgt. Jede Parcelle, wie z. B. D, kann dann für sich mittels des Maassstabes und nach den bekannten Weisen der Geometrie (14. Kapitel) berechnet und durch Summirung aller die Totalfläche gefunden werden. Ist es aber nur um letztere zu thun, oder will man diese zur Kontrole noch einmal ableiten, so geschieht das sicherer und schneller, indem man das Standliniendreieck ABC aus seinen gemessenen Seiten (3, S. 229) und die drei ausserhalb liegenden Terraintheile (S. 236 etc.) aus ihren Breiten und Längen berechnet.

§. 221. **Aufnahme eines (Forst-) Grundstücks aus dem Umfange mittels mehrerer Standlinien.**

Stecke das Standliniennetz so ab, dass die Standlinien dem Umfange möglichst nahe liegend und möglichst lang sind, so dass ihre Anzahl ein Minimum (hier 4) werde. Umziehe dann mit der Kette die Standlinien-Figur, miss dabei sämmtliche Abscissen und Ordinaten der wesentlichen Figurpunkte der Waldgrenze, gleichzeitig möglichst genau die ganze Länge jeder Standlinie und jeden Netzwinkel A, B, C, D (nach Kapitel 7). — Wünscht man von der Figur eine Karte zu haben, so wird erst das Standliniennetz nach dem gewählten Maassstabe aufgetragen und zum Schlusse gebracht und hierauf erst sämmtliche Abschläge entsprechend eingetragen. Handelt es sich aber bloss um die Flächen-

grösse, so kann man sich die Zeichnenarbeit ersparen, indem man nach 3, S. 232 das Netzviereck AC aus seinen

Fig. 193.



4 Seiten und 2 Gegenwinkeln und dann sämmtliche Abschlagsfiguren *a*, *b*, *c*, *d* u. s. w. nach der Trapezialformel berechnet und in Abzug bringt.

Den eingeschriebenen Maassen nach würde sich z. B. die Quadrirung der Netzfigur also gestalten: $ch_{100}\ B =$ 131; also nach des Knechtes Chordentafel Winkel $B = 82^{\circ}$ (genauer $81{,}8^{\circ}$); ch_{100} vom Aussenwinkel $D = 86{,}5$, folglich Aussenwinkel $D = 51{,}2^{\circ}$; Winkel $D = 180 - 51{,}2^{\circ} = 128{,}8^{\circ}$.

$$\text{Also Dreieck } ABC = \frac{AB \times BC \, . \, sin. \, B}{2}$$

$$= \frac{45{,}6 \times 90{,}5 \times sin. \, 81{,}8^{\circ}}{2} = 11{,}4 \times 90{,}5 \times 0{,}99 = 2036{,}6 \ \square\text{R}.$$

$$\text{Dreieck } ADC = \frac{AD \, . \, DC \, . \, sin. \, D}{2} = \frac{70{,}3 \times 34{,}2 \ sin. \, 128{,}8}{2}$$

$$= \frac{70{,}3 \times 34{,}2 \, sin. \, 51{,}2}{2} = \frac{70{,}3 \times 34{,}2 \times 0{,}78}{2} = 937{,}7 \ \square\text{R}.$$

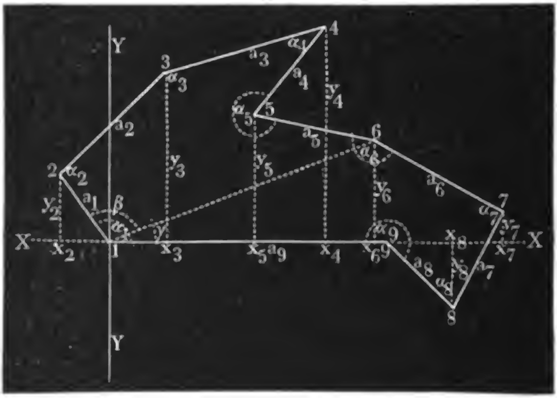
Die ganze Netzfigur also $= 2036{,}6 + 937{,}7 = 3974{,}3$ Quadratruthen.

(Vergleiche dieses Resultat mit dem polygonometrisch berechneten am Ende dieses Kapitels).

Polygonometrische Vermessung (trigonometrische Umfangsaufnahme) eines Grundstückes.

§. 222. Erste Methode. System der polygonometrischen Winkelsummen mit einer Seite als Basis.

Fig. 194.



Die vorstehende Fig. 194 bezeichne ein um einen Wald gelegtes Standliniennetz, dessen Seiten, Winkel und Abschläge nach den Lehren der betreffenden Kapitel vermessen sind. Eine der Seiten wähle man zur Abscissenlinie, wo möglich die längste, und von ihr ausgehend bezeichne man die auf einander folgenden Ecken mit 1, 2, 3, 4 ...., die diesen Ecken angehörenden inneren Winkel mit α_1, α_2, α_3, α_4 ...., die von ihnen ausgehenden Seiten oder Standlinien mit a_1, a_2, a_3 α_4 ...., die ihnen zugehörigen Ordinaten mit y_1, y_2, y_3, y_4 .... und deren Abscissen, immer vom Anfangspunkte der Abscissenlinie, hier 1, angerechnet, mit x_1, x_2, x_3, x_4 .... (wo dann x_1 und y_1 immer = Null; x_2 hier die Länge von 1 bis x_2; x_3 die Länge von 1 bis x_3 bedeutet) und betrachte und behan-

dele alle **links von der Ordinatenachse** YY fallende Abscissen, wie x_2, desgleichen alle **unter die Abscissenachse** XX fallende Ordinaten, wie y_8, als negative;

— so lehrt uns die Trigonometrie des Vielecks folgendes Formelgesetz:

a. Für Berechnung der Abscissen eines $n$ecks:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = a_1 \cos\alpha_1$$
$$x_3 = a_1 \cos\alpha_1 - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \ldots = x_2 - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$x_4 = a_1 \cos\alpha_1 - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \ldots\ldots = x_3 + a_3 \cos(\alpha_1 \ldots \alpha_3)$$
$$x_5 = a_1 \cos\alpha_1 - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \ldots = x_4 - a_4 \cos(\alpha_1 \ldots \alpha_4)$$

und die letzte Abscisse, d. h. die ganze Abscissenlinie:

(1) $$x_n = a_1 \cos\alpha_1 - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \ldots \pm a_{n-1} \cos(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) \ldots = x_{n-1} \pm a_{n-1} \cos(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1})$$

oder $= (n-1)$ Gliedern der Abscissenformel.

b. Für Berechnung der Ordinaten eines $n$ecks:

Ganz dasselbe Gesetz, nur mit dem Unterschiede, dass hier statt des Cosinus der Sinus erscheint, so dass man hat für die letzte oder $n$te Ordinate, die stets = Null sein muss:

(2) $$y_n = a_1 \sin\alpha_1 - a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \ldots \pm a_{n-1} \sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) = y_{n-1} \pm a_{n-1} \sin(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) = (n-1)$$ Gliedern der Ordinatenformel = Null.

Auf das vorstehende Neuneck angewendet, würde die Formel (1) und (2) der letzten Abscisse und Ordinate 8 Glieder haben und letztere müsste Null, jene aber eine Länge ergeben, die der gemessenen a_9 gleich ist. Hierdurch ist das Mittel gegeben, die Richtigkeit der Messung oder Rechnung zu erkennen. In Folge der mathematischen Unge-

nauigkeit auch in der besten Aufnahme stimmt dieser Schluss in der Regel nicht. Ist die Fehlergrösse keine unstatthafte, so wird sie verhältnissmässig auf sämmtliche Ordinaten oder Abscissen vertheilt, indem man jedem berechneten Gliede der Formel eine gleiche Quote zutheilt. Wäre z. B. $a_9 = 295$ Ruthen gemessen und die Rechnung ergäbe bei Summirung der acht Abscissenglieder 209,8 Ruthen, also ein Plus von 0,8 R., so würde jedes der acht Glieder negativ um $\frac{0,8}{8} = 0,1$ R. verbessert.

Die durch successive Summirung der Polygonwinkel α_1, α_2, α_3 entstehenden Grössen nennt man die polygonometrischen Winkelsummen. Dass diese bei einer vielseitigen Figur alle Quadranten des Kreises und den Vollkreis selbst viele Male durchlaufen werden, liegt auf der Hand. Immer giebt es aber einen spitzen Winkel (Grundwinkel), dessen Sinus oder Cosinus an Grösse dem der im 2., 3. oder 4. Quadranten liegenden Winkelsumme gleich ist. Indem man diese Grundwinkel an die Stelle jener Winkelsummen setzt (letztere »auf den ersten Quadranten reducirt«), hat man nur noch zu beachten, dass die Sinuse der unteren Quadranten (III. und IV.) und die Cosinuse der rechten Quadranten (II. u. III.) negativ sind.

Zum Beispiel. Es sei $\alpha_1 = 124°$; $\alpha_2 = 105°$; $\alpha_3 = 128°$; $\alpha_4 = 46°$; $\alpha_5 = 310°$, so hätte das 5. Glied der Coordinatenformel $= a_5 \begin{matrix} cos. \\ sin. \end{matrix} \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \right\}$ die Winkelsumme 713°; davon der Vollkreis 360°, so oft er darin ist, weggelassen wird, so dass 353° bleiben, welche im 4. Quadranten liegen, dessen Grundwinkel $\alpha = 360 - 353 = 7°$, und dessen Cosinus positiv und dessen Sinus negativ ist, so dass man also hätte statt $+ a_5\ cos. (\alpha_1 + \alpha_2 \,.\,.\, + \alpha_5)$ den Werth $+ a_5\ cos 7°$

und statt

$+ a_5\ cos. (\alpha_0 + \alpha_1 \,.\,.\, + \alpha_4)$ den Werth $- a_5\ sin 7°$.

Fig. 195.



Fig. 196.

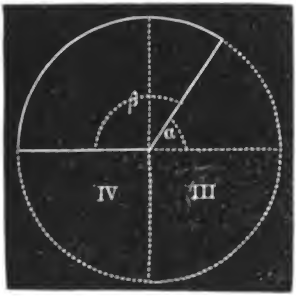


Fig. 197.

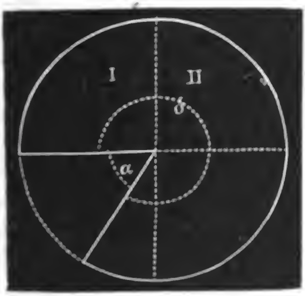
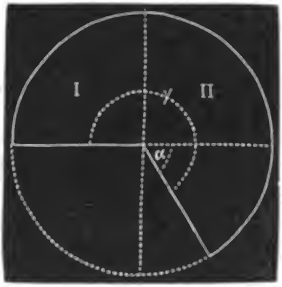


Fig. 198.



Und sobald einmal die leicht einzuübenden Reductionen der Winkelsummen auf den 1. Quadranten vorgenommen sind, berechnen sich die einzelnen Glieder der Formel und also auch die Coordinaten ganz leicht durch Aufsuchung der Sinuse und Cosinuse der Grundwinkel und Multiplication derselben mit den zugehörigen Seiten. Und wie man aus den so berechneten Coordinaten (Längen und Breiten) alle Ecken der Fläche der Figur frei von den Fehlerquellen der Zeichnung und ebenso auch einen gutschliessenden Riss derselben ableiten kann, weiss oder begreift Jeder, der nur etwas mit den Elementen der Geometrie vertraut ist.

§. 223. Am besten ist es, das Rechnungswerk ganz tabellarisch zu führen und die Spalten der Tabelle von links

nach rechts voll zu arbeiten. Dadurch wird die Sache sehr einfach und mechanisch, erspart unnöthige Gedankenarbeit und schützt vor Verirrungen. Das Schema auf Seite 279 mit seinen erläuternden Notizen wird dem Leser den Gang zur Klarheit bringen.

§. 224. Zweite Methode. System der polygonometrischen Winkelsummen mit einer Diagonale als Basis.

Häufig ist es vortheilhafter, statt einer Seite eine Diagonale zur Coordinatenbasis zu nehmen, und sonach die Figur in zwei Abtheilungen zu berechnen. Wählte man z. B. die Ecklinie 1 . 6 S.274 dazu, so hätte man oberhalb ein Sechseck und unterhalb ein Fünfeck zu berechnen. Der Gang der Rechnung bleibt für jede Abtheilung der vorige, sobald man nur den Anfangswinkel (β) der einen, und dadurch natürlich auch den ($\gamma = \alpha_1 - \beta$) der anderen hat. Der besseren Anschauung wegen kann man sich die untere dabei um die Basis wie um ein Charnier heraufgeschlagen denken. Bei einer Waldvermessung ist die Messung jenes Anfangswinkels in der Regel nicht statthaft. Die Polygonometrie lehrt aber, ihn aus den anderen gemessenen Stücken durch Rechnung zu finden, und zwar nach der Formel:

$$tg\beta = \frac{a_2 sin\alpha_2 - a_3 sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_4 sin(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \ldots . a_{n-1} sin(\alpha_2 \ldots . \alpha_{n-1})}{a_1 - a_2 cos\alpha_2 + a_3 cos(\alpha_2 + \alpha_3) + a_4 cos(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \ldots . a_{n-1} cos(\alpha_2 \ldots . \alpha_{n-1})}$$

eine Formel, welche mit der an die Diagonale stossenden Seite oder mit dem $n-2$. Gliede des Zählers von selbst abbricht und deren Berechnung in ganz ähnlicher tabellarischer Weise geschieht, wie im vorigen Paragraphen (S. 279) gezeigt. Will man diese Rechnung und die ihr zu Grunde liegende Messung kontroliren, so berechnet man den Anfangswinkel γ der anderen Abtheilung nicht durch Subtraction des gefundenen β vom gemessenen α_1, sondern ebenfalls selbstständig nach obiger Formel Die beiden so berechneten Winkel β und γ müssen zusammen dann den Winkel α_1 geben. Ein weiteres Moment der

<table>
<tr><th rowspan="2">a
Gemessene Winkel.</th><th rowspan="2">b.
Korrigirte Winkel.</th><th rowspan="2">c.
Winkelsummen.</th><th colspan="2">d.
Zugehöriges Vorzeichen des</th><th rowspan="2">e.
Grundwinkel.</th><th rowspan="2">f.
Gemessene Seiten.</th><th colspan="2">g.
Berechnete Glieder der</th><th colspan="2">h.
Verbesserte Glieder der</th><th colspan="2">i.
Ganze</th></tr>
<tr><th>1.
Sinus.</th><th>2.
Cosinus.</th><th>1.
Ordinaten</th><th>2.
Abscissen</th><th>1.
Ordin.</th><th>2.
Absciss</th><th>1.
Ordin.</th><th>2.
Absciss</th></tr>
<tr><td>α_1
α_2
u. s. w.
Die Summe dieser Winkel muss immer = $(n-2)\,180$ sein.</td><td>Die Korrektur so, dass die Summe aller = $(n-2)\,180$ giebt.</td><td>α_1
$\alpha_1 + \alpha_2$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
u. s. w.
Gleich mit Hinweglassung des Vollkreises 360° so oft er in der Summe erscheint. Die letzte Summe muss mit der sub b korrespondiren.</td><td>Alle Winkelsummen über 180° haben negative Sinus</td><td>zwischen 90 u. 270 negative Cosinus.</td><td>Aus c zu berechnen. Jede Winkelsumme zwischen 90 u. 180 wird von 180 abgezogen; jede zwischen 180 u. 270 um 180 vermindert; jede zwischen 270 und 360 von 360 abgezogen</td><td>Jede geradstellige Seite, d. h. jede 2., 4., 6. wird negativ hierein gesetzt (wegen der abwechselnden Vorzeichen der Formel).</td><td>Durch Multiplikation der Grössen sub f. mit den Sinusen der sub e stehenden Winkel und der sub d_1 stehenden Vorzeichen.
Die Summe aller Glieder muss Null sein.</td><td>Cosinusen
d_2
die Abscissenlinie</td><td>Die Korrektur gleichförmig auf alle Glieder so, dass die Summe = 0 sei.</td><td>= der Basis.</td><td>1) Null
2) y_2
3) y_3
4) y_4
n) y_n
Berechnet durch successive Summirung der sub h stehenden Grössen.</td><td>1) Null
2) x_2
3) x_3
4) x_4
4) x_n</td></tr>
</table>

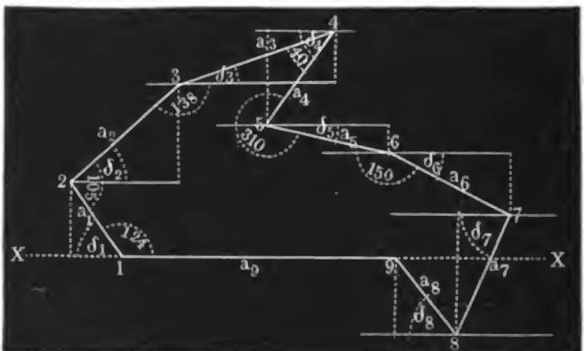
NB. Zur Berechnung der g-Spalte, d. h. zur Aufsuchung der Sinuse und der Cosinuse kann der Messknecht ebenfalls **gebraucht werden, da dessen Genauigkeit bis auf zwei Tausendtel geht. Nach der *i*-Spalte kann sofort die Flächenberechnung des Netzes nach der Mayer'schen Regel als auch die Construction desselben vorgenommen werden.**

Kontrole und der Verbesserung für die Abscissen liegt dann darin, dass die letzte Abscisse, d. i. die Diagonale, sich im Rechnungswerke beider Abtheilungen als gleichgross herausstellen muss. Ist die erscheinende Differenz eine statthafte, so wird das Mittel beider Grössen als richtige Basis genommen und darnach die Abscissenglieder korrigirt. Für die Korrektur und Kontrole der Ordinaten gilt auch hier der Satz, dass die letzte Ordinate oder die Summe aller Glieder in jeder Abtheilung = Null sein muss.

§. 225. Dritte Methode. System der **konstruktiven** Ableitung der Abweichungswinkel der Seiten gegen die Basis.

Das Geschäft des Reducirens auf den 1. Quadranten (die Ableitung des Grundwinkels und des zugehörigen Vorzeichens des Sinus und Cosinus) ist zwar an sich ganz leicht, dürfte jedoch dem mit den trigonometrischen Vorstellungen nicht recht Vertrauten immer noch zu schwierig erscheinen. Für diesen Fall kann man jene Reduction ganz umgehen und sich die Coordinatenglieder mit ihren Vorzeichen einfach und anschaulich konstruiren, wenn man so verfährt. Man entwirft sich eine möglichst treue und akkurate Skizze, entweder gleich draussen bei der Messung oder, besser noch, nach vollendeter Messung in der Stube, indem man die Figur aus den gemessenen Umfangslinien und Winkeln (wobei sich der Knecht als

Fig. 199.



Transporteur und Maassstab empfiehlt) zeichnet. Die beistehende Fig. 199 stelle diese Skizze vor; und wieder sei die Seite 1.9 die Abscissenbasis XX. Nun leitet man, indem man durch alle Ecken der Figur Parallelen zu ihr zieht, nach und nach die Abweichungs- oder Deklinationswinkel der einzelnen Seiten gegen XX, d. h. die Winkel δ_1, δ_2, δ_3 u. s. w. ab. — Wäre z. B. mittels des Knechtes nach Kapitel 9 gefunden, der Winkel bei der Anfangsstation 1 oder $\alpha_1 = 124°$; $\alpha_2 = 105°$; $\alpha_3 = 138°$; $\alpha_4 = 40°$; $\alpha_5 = 310$; $\alpha_6 = 150°$ u. s. w., so ergäbe sich, wenn man alle Winkel positiv nimmt, und die positive oder negative Beschaffenheit der Coordinatenglieder nur aus der Figur ableitet:

die Deklination der 1. Seite $= \delta_1 = 180-124 = 56°$,
das erste Abscissenglied $= - a_1 \cos 56°$ *),
das erste Ordinatenglied $= + a_1 \sin 56°$;

die Dekl. der 2. Seite $= \delta_2 = 105° - \delta_1 = 150° - 56° = 49°$
das zweite Abscissenglied $= + a_2 \cos 49°$,
das zweite Ordinatenglied $= + a_2 \sin 49°$;

die Dekl. der 3. Seite $= \delta_3 = 138 - 90 - Compl.\ \delta_2 = 7°$
das dritte Abscissenglied $= + a_3 \cos 7°$,
das dritte Ordinatenglied $= + a_3 \sin 7°$;

die Dekl. der 4. Seite $= \delta_4 = 40° + \delta_3 = 40 + 7 = 47$
das vierte Abscissenglied $= - a_4 \cos 47°$ *),
das vierte Ordinatenglied $= - a_4 \sin 47°$ *);

Die Dekl. der 5. Seite $= \delta_5 = 360 - 310 - \delta_4 = 360 - 357 = 3°$
und das fünfte Abscissenglied $= + a_5 \cos 3°$,
das fünfte Ordinatenglied $= - a_5 \sin 3°$ *);

u. s. w. u. s. w.

---

*) Sobald nämlich die Oeffnung der Abweichungswinkel nach links geht, fällt die Abscisse zurück, muss sonach der betreffende Cosinus, und sobald sie unter die Abscissenachse oder deren Parallele fällt, der betreffende Sinus negativ genommen werden.

Die successive Summirung dieser Glieder giebt nun die Coordinaten aller Ecken der Figur; als z. B.

für den Punkt 2 die Abscisse $x_2 = - a_1 \cos 56^\circ$;
die Ordinate $y_2 = + a_1 \sin 56_0$;

» » » 3 die Abscisse $x_3 = - a_1 \cos 56 + a_2 \cos 49^\circ$;
die Ordinate $y_3 = a_1 \sin 56^\circ + a_2 \sin 49^\circ$.

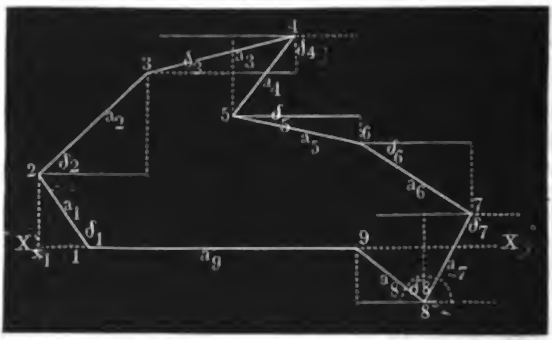
» » » 4 die Abscisse $x_4 = x_3 + a_3 \cos 7^\circ$;
die Ordinate $y_4 = y_3 - a_3 \sin 7^\circ$.

» » » 5 die Abscisse $x_5 = x_4 - a_4 \cos 47^\circ$;
die Ordinate $y_5 = y_4 - a_4 \sin 47^\circ$.

§. 226. Vierte Methode. System der **Rechnungs**ableitung der positiven und negativen Deklinationswinkel.

Wissenschaftlicher und glatter gestaltet sich die vorige Methode, wenn man die Deklination immer nach einer, etwa der rechten Seite hin nimmt, wo dann, Fig. 200, De-

Fig. 200.



klination von $a_1 = \delta_1$; Dekl. $a_2 = \delta_2$; Dekl. $a_3 = \delta_3$; Dekl. $a_4 = \delta_4$; Dekl. $a_5 = \delta_5$ u. s. w., zu nehmen und dann ferner zu beachten ist, dass die unterwärts fallende Deklination, wie δ_4, δ_5 und δ_6, als eine negative, die aufwärts fallende, δ_1, δ_2 als eine positive erscheint, sowie, dass die Cosinuse negativer Winkel dieselben wie die der gleich grossen positiven, die Sinuse aber die entgegengesetzten sind.

Demgemäss hätte man für die die Abscissen bildenden Cosinuse den $cos\,\delta_1$ (als eines stumpfen Winkels) negativ, wie es auch der negativen Abscisse x_1 entspricht, $cos\,\delta_2$ positiv; den Cosinus des negativen Winkels δ_4 = dem des positiven δ_1, also weil dieser stumpf ist, natürlich negativ; oder: dass die Cosinuse stets und nur negativ sind bei stumpfen Deklinationen, die Sinuse stets und nur negativ bei negativen Deklinationen. Augenscheinlicher noch stellen sich die negativen Sinuse der negativen Deklinationen hervor, indem jede abwärts steigende Seite eine Verkürzung der Ordinate erzeugt, das ihr zugehörige Ordinatenglied also negativ sein muss.

Für diese konsequentere und sachgemässere Vorstellungsart der Deklinationswinkel δ finden sich die letzteren aus den gemessenen Umfangswinkeln α_1, α_2, α_3 auch konsequent nach dem einfachen Gesetze: Die Deklination der $n$ten Seite ist = der Summe aller vorhergehenden inneren Umfangswinkel weniger $(n-1)$ 180 Grade; oder nach der Formelsprache, wenn man Σ (das griechische S, sprich sigma) als Zeichen der Summe wählt:

Deklination von $a_n = \delta_n = \Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots \alpha_n) - 180\,(n-1)$.

Hiernach ist nach den Winkelzahlen die Fig. 199 z. B. die Dekl. $a_4 = \delta_4$ in Fig. 200 $= (124 + 105 + 138 + 40) - 180 \cdot 3 = 407 - 540 = -133$ und

$cos. - 133^\circ = cos. 133 = - cos. 47^\circ$;

Abscissenglied also $= - a_4\ cos. 47$,

sowie $sin. - 133 = - sin. 133 = - sin. 47$;

Ordinatenglied $= - a_4\ sin. 47$.

Dekl. $a_5 = \delta_5 \ldots\ldots = (124 + 105 + 138 + 40 + 310) - 180 \cdot 4 = 717 - 720 = - 3$ und

$cos. - 3^\circ = cos. 3$.

Abscissenglied also $= + a_5\ cos. 3$;

sowie $sin. 3^\circ = - sin. 3^\circ$;

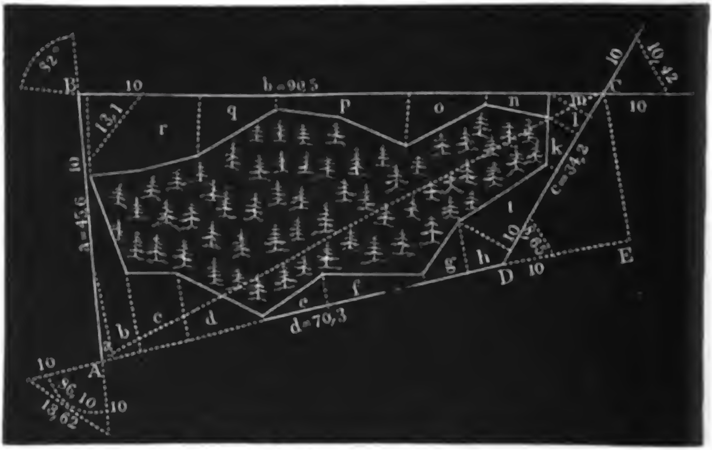
Ordinatenglied $= - a_5\ sin. 3^\circ$.

Die kleine Mühe, ein einziges Zahlenbeispiel, vielleicht von einem Sieben- oder Sechsecke einmal vollständig auszuführen, wobei man die Sinuse und Cosinuse aus dem

Knechte nur bis aufs Hundertel und die Winkel nur in vollen Graden anzunehmen braucht, wird sicherlich die volle Herrschaft über die glatte Methode zur Belohnung haben. Dass eine tabellarische Anordnung hier eben auch Vortheil bringend ist, liegt auf der Hand. (S. d. Beispiel S. 287.)

§. 227. **Beispiel einer trigonometrischen Umfangsaufnahme mit Berechnung nach der 1. Methode.** Das Waldstück Fig. 201 ist durch ein Netz von 4 Standlinien umzogen und diese Linien und ihre Winkel

Fig. 201.



sind durch die Kette und dabei zugleich sämmtliche rechtwinkelige Abschläge der Grenzpunkte mit eingemessen worden. Aus den der Figur eingeschriebenen Chordenzahlen ist mit Hülfe der Chordentafel des Knechtes ersichtlich, dass Winkel $A = 86{,}1$ Grad; Winkel $B = 82{,}0$ Grad; Winkel $C = 63{,}1$ Grad; Winkel $D = 128{,}9$ Grad, so dass man, wenn AD als Coordinatenbasis genommen wird, nach dem Schema der S. 279 folgendes Rechnungswerk hat:

a. Gemessene Winkel.	b. Verbesserte Winkel.	c. Winkelsumme	d. Vorzeichen des *Sin.*	*Cos.*	e. Grundwinkel.	f. Seiten mit Formelzeich.	g. Berechnete Glieder der *) der Ordinat	Absciss.	Verbesserte Glieder der Ordin.	Absciss.	Ganze Ordin.	Absciss.
86,1	86,1	86,1	+	+	86,1	+ 45,6	45,51	2,79	45,4	2,9	1) 0,0	1) 0,0
82,0	82,0	168,1	+	—	11,9	— 90,5	— 18,66	88,56	— 18,7	88,7	2) 45,4	2) 2,9
63,1	63,1	231,2	—	—	51.2	+ 34,2	— 26,63	— 21,44	— 26,7	— 21,3	3) 26,7	3) 91,6
128,9	128,8	0,0				— 70,3	+ 0,20	69,91	0,0	70,3	4) 0,0	4) 70,3
360,1	360,0											

*) Der Knecht giebt nämlich mittels seiner *Sin* - u. *Cos* -Tafel:

{*sin.* 86,1° = 0,998 und 0,998 × 45,6 = 45,51
{*cos.* 86,1° = 0,068 und 0,068 × 45,6 = 2,79
{*sin.* 11,9° = 0,205 und 0,205 × 90,5 = 18,66
{*cos.* 11,9° = 0,98 und 0,98 × 90,5 = 88,56
{*sin.* 51,2° = 0,78 und 0,78 × 34,2 = 26,65
{*cos.* 51,2° = 0,63 und 0,63 × 34,2 = 21,44.

Netzberechnung nach der Mayer'schen Regel.

(0,0 — 26,7) × 2,9 = ... — 77,4
(45,4 — 0,0) × 91,6 = + 4158,6
(26,7 + 0 0) × 70,3 = + 1877,0

6035,6 — 77,4
— 77,4

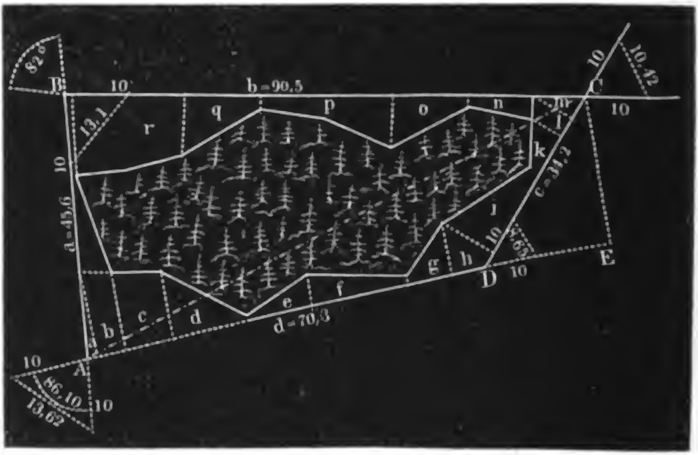
5958,2

2) 2979,1 □Ruthen.

Zusatz. Werden nun, nachdem die Netzfläche = 2979,1 □Ruthen gefunden, die Sectionen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; desgleichen *h*; dann *i*, *k*, *l*, *m*, dann *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s* und endlich *t* wo nöthig, ebenfalls nach der Mayer'schen Trapezialregel quadrirt und deren Summe von der Netzfläche abgezogen, so erhält man die Fläche des Grundstückes ohne Zeichnung und also auch frei von den unvermeidlichen Fehlern derselben.

§. 228. **Beispiel einer trigonometrischen Umfangsaufnahme mit Berechnung nach der 4. Methode.**

Wir legen dieselbe Figur und dieselben Zahlen zu Grunde; und haben dann:



Verbesserte Winkel.	Winkelsumme.	Berechnete Deklinationen.	Deren Sinus.	Deren Cosinus.	Seiten.	Produkte oder berechnete Glieder. der Ordinat.	Produkte oder berechnete Glieder. der Absciss.	Das Uebrige ganz wie vorher auf S. 285.
1) 86,1	86,1	86,1 — 0 × 180° = 86,1	+ 0,998	+ 0 068	45,6	+ 45,51	+ 2,79	
2) 82,0	168,1	168,1 — 1 . 180° = — 11,9	— 0,205	+ 0,98	90,5	— 18,66	+ 88,7	
3) 63,1	231,2	231,2 — 2 . 180° = —128,8	— 0,78	— 0,63	34,2	— 26,65	— 21,44	
4) 128,8	360,0				70,3			
						+ 0,20	69,91	

Drittes Buch.

Praktische Stereometrie

oder

der Messknecht als Grössenmesser

für:

16) Körperliche Raumgebilde im Allgemeinen.
17) Prismatische Vollkörper.
18) Pyramidale Vollkörper.
19) Prismatische und pyramidale Stutze.
20) Parabolisch ausgebauchte Vollkörper und Stutze.
21) Parabolisch eingebauchte Vollkörper und Stutze.
22) Kugeln und deren Theile.
23) Sphäroiden.
24) Beliebig ein- und ausgebauchte Polyëder und Kreiskörper.

Sechzehntes Kapitel.

Grundsätze und Regeln über die körperliche Messkunst insgemein.

§. 229. In Anbetracht der Art und Weise, wie die Stereometrie gewöhnlich abgehandelt und die Bildung unserer Leute demgemäss hierin beschaffen zu sein pflegt, findet es der Knecht nicht für überflüssig, eine kleine Essenz derjenigen Wahrheiten vorauszuschicken, welche die bewusste und leichte Ausübung seiner hier und da eigenthümlichen Methoden zu vermitteln geeignet sind. Zugleich gewährt dies Kapitel »Insgemein« einen willkommenen Platz zur Aufnahme der mehr allgemeinen Messoperationen der körperlichen Geometrie.

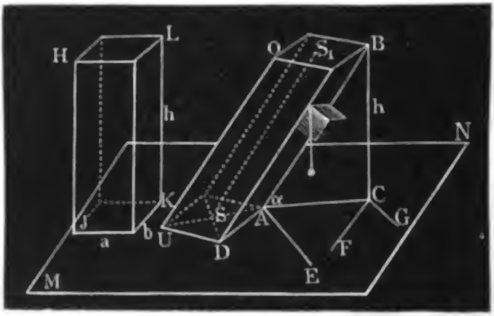
§. 230. Bekanntlich unterscheiden sich die stereometrischen oder körperlichen Raumgebilde von den planimetrischen oder ebenen dadurch, dass sie mit ihren Punkten »im Raume«, d. h. im ganzen nach allen Seiten hin ausgedehnten Raume und nicht bloss in einer und derselben Ebene liegen, wie letzteres im Gebiete der Planimetrie wirklich der Fall ist oder doch gedacht wird.

Die praktische Stereometrie, d. h. die Messkunst körperlicher Raumgebilde, hat es in Folge dessen, ausser mit den verschiedenen Körperformen, auch noch mit den räumlichen Winkeln und den Krumm-

flächen zu thun und sich überhaupt, wenn sie gut und vollständig begründet sein soll, auf folgende wesentlichste Sätze und Regeln zu stützen.

1) Geneigte Linien.

Fig. 202.



§. 231. Wenn BA eine zu betrachtende gegen die Ebene MN geneigte Linie, BC ein Loth auf MN ist; so sei und heisse A der Fusspunkt der Schiefgeneigten BA, C der des Lothes BC; AD, AE, AC, sämmtlich in der Ebene MN, Fusslinien der ersteren; CA, CF, CG Fusslinien des Lothes; Winkel BAD, Winkel BAE, Winkel BAC Fusswinkel jener; Winkel BCA, Winkel BCF, Winkel BCG Fusswinkel des letzteren. BC heisse die Höhe der Schiefen, AC ihr Grund oder ihre Projection auf die Ebene MN. Die Fusswinkel des Lothes sind alle $= 90°$ oder rechte Winkel; von den Fusswinkeln der Schiefgeneigten ist $BAC = \alpha$ (d. h. der in der Lothebene liegende) der kleinste, und heisst vorzugsweise ihr Neigungswinkel zur Ebene MN; oder auch der Neigungswinkel der Ebene MN gegen die Linie AB. Seine Grösse leitet der Knecht in seiner Eigenschaft als Trigonometer leicht nach Kapitel 6 ab, wenn zwei bestimmende Stücke des rechtwinkeligen Dreiecks gegeben sind.

Ist MN die wasserrechte oder Horizontal-Ebene, so ist der Grund AC eine Horizontale und BC das Pen-

delloth, und der Neigungswinkel α ein Elevationswinkel, der einfach und direkt nach Kap. 10 durch den Knecht zu beobachten ist. Wo es angeht, kann dies auch durch unmittelbares Aufsetzen oder Anlegen des Knechtes an die betreffende Linie geschehen, wie obige Figur zeigt. Siehe auch Fig. 103, S. 192.

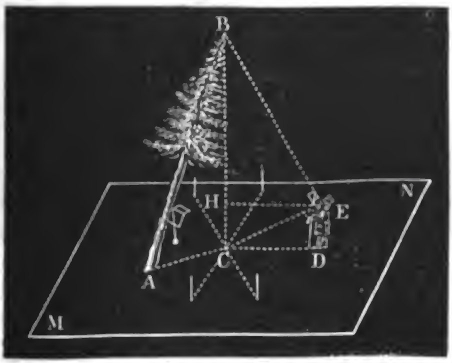
§. 232. Beispiele.

1. Beispiel. Wie gross ist des Prismas Schiefe α, Fig. 202, wenn die Höhe $BC = 12$ und der Grund $AC = 7$?

Wenn $AC = 7$ als Radius genommen wird, erscheint BC als die 7fache Tangente von α, d. h. $tg_7 \alpha = 12$, also die (Einheits-) $tg\,\alpha = {}^{12}/_7 = 1{,}71$, wozu des Knechtes Tangentenskala deutlich genug $\alpha = 59{,}6^0$ angiebt.

2. Beispiel. Um die Länge eines auf horizontaler Grundfläche schiefstehenden Baumes AB genau zu ermitteln, hatte man durch Herunterlothen des Scheitels B (Visirens mittels des Pendelfadens des Knechtes) den Fusspunkt C des Scheitellothes, und dann auf bekannte Weise (Kap. 13) die Höhe $BC = 60$ Fuss und die Basis $AC = 16$ Fuss gefunden, so dass nach dem pythagoräischen Satze ($AB^2 = AC^2 + BC^2$) $AB = \sqrt{60^2 + 16^2} = \sqrt{3744} = 61{,}8$ Fuss.

Fig. 203.

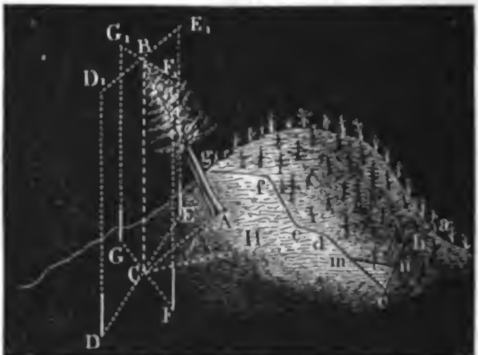


2. Auflös. Hätte man, statt die Höhe BC zu messen,

den Neigungswinkel $\alpha = 75^0$ oder, was gleichzeitig geschehen konnte, seinen Cosinus $= 0,26$ beobachtet, so erhielte man (laut Kap. 12) $AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{16}{0,26} =$ 61,7 Fuss; oder auch, weil AB als Secante zu betrachten und nach der *SEC.*- Skala des Knechtes $sec.\ 75^0 = 3,86$ ist, $AB = AC\ sec.\ A = 16 \times 3,86 = 61,8'$.

3. Beispiel. Um die Länge eines an einem Hange stehenden nicht vertikalen Baumes genau zu messen, ist es am sichersten, den Lothpunkt C des Scheitels B durch Visiren mit dem Pendel des Knechtes zu ermitteln und die Höhe BC, die Schiefe CA und deren Elevation γ zu messen (wie Kap. 11 und 13 lehrt), wo dann im Dreiecke BCA, das in der Regel kein rechtwinkeliges sein wird, 2 Seiten (BC und CA) und der Zwischenwinkel $(90 - \gamma)$ bekannt und nach S. 137 die 3. Seite durch Rechnung zu finden ist. — Kann man aber den Winkel A als einen rechten betrachten, so hat man schneller $AB = \sqrt{BC^2 - CA^2}$.

Fig. 204.



4. Beispiel. Der Winkel, den die Sonne mit der Horizontalebene des Beobachters bildet (das, was die Astronomen die Sonnenhöhe nennen) findet sich durch das Pendel ganz leicht und bis auf $^1/_4$ Grad genau, indem man den Knecht so hält (oder, an einen Stock

angeschraubt, so stellt), dass der lothrecht in eines der Visirringelchen (zwischen dem Worte **Verlag**) eingesteckte Stift *c* seinen Schatten genau in die der Kante *ba* parallele Linie (*nm*, S. 188) wirft.

Fig. 205.



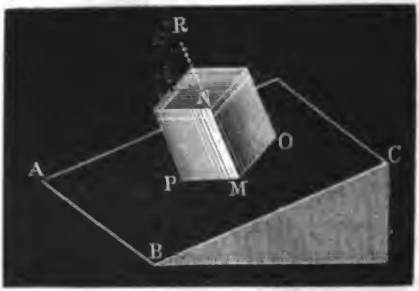
Ist man im Besitze einer sogenannten **»Tafel der Sonnenhöhe«**, so kann man den **Messknecht sonach auch als Sonnenuhr und überhaupt als Uhrenregulator, der selbst bis auf die einzelnen Minuten genau zu arbeiten gezwungen werden kann, verwenden.** (Siehe viertes Buch.)

§. 233. Aber auch wenn die Grundebene keine Horizontale ist, vermag der Knecht unmittelbar Perpendikel darauf zu fällen und zu errichten und Neigungswinkel von Linien gegen Ebenen abzumessen. Seine desfallsigen Methoden werden sich am besten durch folgende Lehrbeispiele mittheilen lassen.

1. Aufgabe. In einem Punkte *M* einer geneigten Ebene *ABC* ein Loth auf ihr zu bestimmen.

Auflös. Setze den, wo möglich mittels Klemme (*k*, S. 156) zur Würfelecke formirten Knecht, so auf die Ebene, dass zwei seiner Würfelkanten (*MP*, *MO*) mit ihr und im Punkte *M* zusammenfallen; dann ist die Visirkante *MN* (da sie mit 2 Fusslinien *MP*, *MO* rechte Winkel macht) ein Perpendikel zur Ebene.

Fig. 206.



2. Aufgabe. Ein Loth von einem ausserhalb einer Ebene gelegenen Punkte *R* auf erstere zu fällen oder: dessen Fusspunkt *M* zu finden.

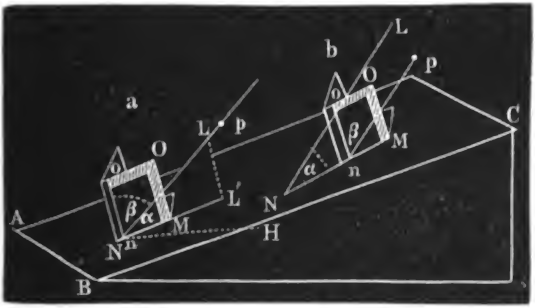
Auflös. Suche mittels Aufstellens des würfelförmigen Knechtes (vorigem Verfahren gemäss) den Punkt *M*, für welchen eine von *R* nach *M* gezogene Linie auch den Punkt *N* trifft, d. h. mit der Visirkante zusammenfällt.

3. Aufgabe. Den Neigungswinkel einer Linie *NL* gegen eine Ebene *AC* zu messen.

Auflös. Setze den Messknecht auf die Ebene, wie *a*, Fig. 207, zeigt, nämlich so, dass der Pendelaufhängepunkt im Scheitel des zu messenden Winkels, die eine Seitenfläche scharf auf die Ebene und die mit der Winkel-Skala versehene Kante *MO* an der ge-

neigten Linie NL anzuliegen kommt. Das in die Richtung der letzteren gehaltene Pendel np giebt den Winkel β an, der das Complement des Neigungswinkels α ist, also von 90° abgezogen, letzteren giebt.

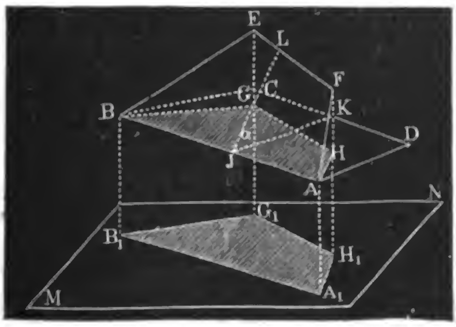
Fig. 207.



Zusatz. Man kann den Knecht auch so auf die Ebene stellen, dass des Pendels Nullpunktslinie no ein Loth der Linie NL bildet, wie in b, Fig. 207, wo dann das Pendel np zur gegebenen Linie NL parallel zu richten ist, während des Knechtes Beobachtungsfläche OM natürlich in die Ebene NOn zu liegen kommt.

2) Geneigte Ebenen.

Fig. 208.



§. 284. Wenn AB die Durchschnittslinie der beiden beliebig begrenzten Ebenen $ABCD$ und $ABEF$, so repräsentirt der Winkel α, den die beiden in diesen Ebenen vom Punkte J aus rechtwinkelig mit AB gezogenen Linien JL und JK mit einander bilden, die Neigung der Fläche BF gegen BD und auch gegen MN, wenn letztere parallel mit BD ist. Sind EG_1, FH_1 Lothe auf MN, so ist die Figur $ABGH$ und die ihr ganz gleiche $A_1B_1G_1H_1$ die Projection der Geneigten $ABEF$ auf die Ebene BD oder MN.

Denkt man sich letztere horizontal, so wird die Figur BH oder B_1H_1 eine Horizontalprojection, die dann auch Grundriss (Horizontalgrund, Grund) heisst.

Es ist nicht schwer nachzuweisen *), dass, wenn der Neigungswinkel einer Ebene (BF), Fig. 210, gegen eine andere (BD) $= \alpha$ ist, dann ihre auf letztere gestellten Lothe mit ihr (BF) den Neigungswinkel $(90 - \alpha)$ bilden, oder überhaupt: dass der Neigungswinkel einer Ebene gegen ihre Projectionslinien (Lothe) und der gegen ihre Projektionsebene (Grund) einander zu 90° ergänzen.

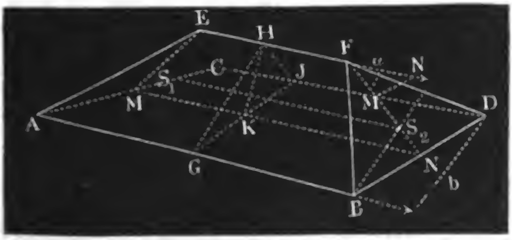
Wäre z. B. der Neigungswinkel des Lothes FH_1 gegen $FB = 37^\circ$ erwiesen, dann wäre α_1 oder der Neigungswinkel der Fläche BF gegen $BH_1 = 90 - 37 = 53^\circ$.

Aufgabe. Wäre die Neigung der Parallelkanten AB, CD oder EF des dachförmigen Körpers, Fig. 209, gegen die Querseitenfläche BFD zu messen, so muss man EF oder eine ihr beliebige Parallele etwa durch einen Stab oder Faden verlängern; von einem Punkte N dieser Verlängerung ein Loth NM auf die Fläche fällen, und mittels Messung zweier Seiten des Projectionswinkels MFN

*) Siehe Tharander Jahrbuch 1852; auch Fig. 126 und 127 auf S. 207.

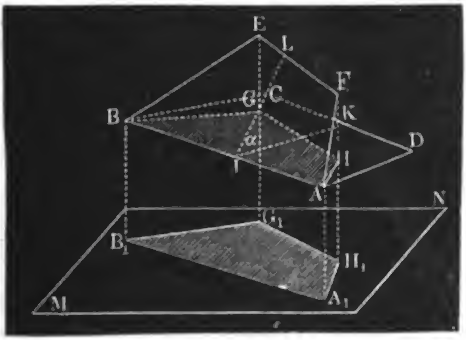
den Winkel α mittels der Sinus- oder Cosinus- oder Tangentenskala ermitteln. — Z. B. wenn der Stab $FN =$

Fig. 209.



6 Fuss und der Cosinus $FM = 4{,}8$ Fuss lang wäre, würde man haben den Einheitscosinus $= \frac{4{,}8}{6} = 0{,}80$, und wenn man diese 80 in der Cosinusspalte aufsucht, den Winkel $=$ fast 37^0.

Fig. 210.



§. 235. Die Messung eines Flächenwinkels, da derselbe immer auf einen Linienwinkel ($LJK = \alpha$) zurückgeführt werden kann, ist sonach ein Geschäft der planimetrischen Messkunst, sobald nur die Schenkel JL und JK rechtwinkelig auf der Kante AB des Flächenwinkels abgesteckt sind. Wie in seiner Doppeleigenschaft als Trigonometer und

Winkelmesser dem Knechte verschiedene Wege zu Gebote stehen, diesen Fall zu lösen, ist in den betreffenden Kapiteln 6 und 11 hinlänglich nachgewiesen worden.

§. 236. Die Flächengrösse b der Projection BH oder $B_1 H_1$ aus der Grösse a der Geneigten BF erfolgt nach der Formel $b = a \cos \alpha$ oder Regel: Cosinuire die Schiefebene; und umgekehrt, die Grösse a der Schiefebene aus ihrer Projection b nach der Formel $a = \frac{b}{\cos \alpha} = b \sec \alpha$ oder Regel: Secantire die Projection oder dividire sie durch den Cosinus (des Neigungswinkels). — Zu weiterer Erläuterung ist auf S. 204 und folg. zu verweisen *).

4) Ist BD eine Horizontebene, so sind auch BA und JK Horizontalen. JL ist dann das, was man bei Böschungen, Berghängen u. dergl. die Falllinie und α, was man den Böschungs- oder Abdachungswinkel nennt.

Die genaue Ermittelung eines Abdachungswinkels hätte also nach folgender Anweisung zu geschehen: Stelle den Knecht im beliebten Punkte J des Abhangs auf; und lass ihn in seiner Eigenschaft als Niveau (S. 175) die Horizonatale BJA und in seiner Eigenschaft als Winkelkopf (S. 176) die Falllinie JL und in seiner Eigenschaft als Höhenwinkelmesser (S. 188) die Elevation dieser Linie finden.

(Vergleiche zu weiterer Erläuterung und statt besonderer Beispiele: S. 113, Buch 3; Kap. 10, 11 u. 12).

3) Krummflächen.

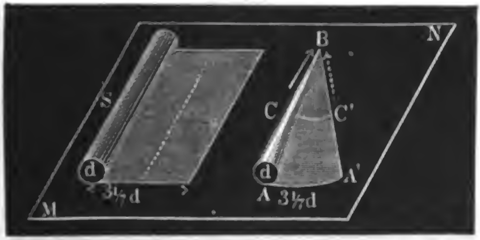
§. 237. Die Ausmessung oder Quadrirung krummer Flächen wird auch ihre Complanation oder, wenn sie als Oberfläche eines bestimmten Körpers erscheint, Complanation dieses Körpers genannt. Denn indem wir sagen, jene Kugel oder jener Berg hat n Quadratfusse Oberfläche, haben wir die letztere gleichsam eben gemacht (complanirt).

---

*) Für gebrochene und krumme, namentlich Bergflächen, ausführlicher im Tharander Jahrbuche 1852.

Flächen, deren Krümmung so beschaffen ist, dass man nach gewissen Richtungen hin noch gerade Linien ziehen kann, heissen einfach gekrümmte, so z. B. der Mantel des Cylinders und des Kegels, Fig 211. Solche

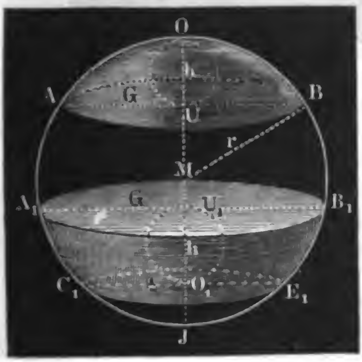
Fig. 211.



sind wirklich in die Ebene auszubreiten, d. h. »entwickelbar« (wie denn z. B. jener ein Rechteck, dieser ein Kreissector ist). Ihnen gegenüber stehen die unentwickelbaren oder doppelt gekrümmten (die Oberfläche der Kugel, Fig. 212, des Paraboloids, Fig. 213 (a. f. S.), des krummen Cylinders, Fig. 214 u. 215 (a. f. S.).

Eine Krummfläche, von solcher gesetzmässigen Gestaltung, dass sie mathematisch streng berechnet werden kann, heisst eine geometrische; ausserdem eine ungeometrische, auch wohl gesetz- oder formlose. Die ersteren sind, soweit sie für die Technik Wichtigkeit haben, in der Regel an bedeutsame geometrische Körperformen gebunden, und sollen, so weit nöthig, bei diesen mit zur Erledigung kommen. (S. Cylinder, Kegel, Kugel.)

Fig. 212.



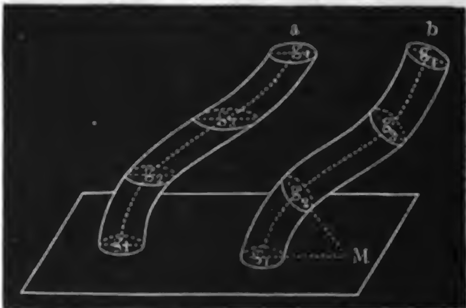
§. 238. Wie die Ausmessung der gesetzlosen

Krummflächen, sobald nur deren Projectionselemente und deren Neigungsverhältnisse bekannt sind, vom Knechte bewirkt wird, ist — obwohl eigentlich in die körperliche

Fig. 213.



Fig. 214. Fig. 215.



Geometrie gehörig — der besseren Entwickelung wegen schon in Kapitel 12 gelehrt und erläutert worden, wo sich z. B. für den in Fig 216 im Aufrisse und Fig. 217 im Grundrisse gegebenen Berg unter den dort angenommenen Böschungswinkeln das Verhältniss des Grundes zur Oberfläche wie 10 zu 11, und weil der Grund = 100 Acker war, die Grösse der Oberfläche = 110 Acker ergab. Siehe auch das Beispiel S. 135.

Fig. 216.

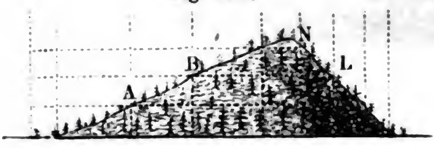
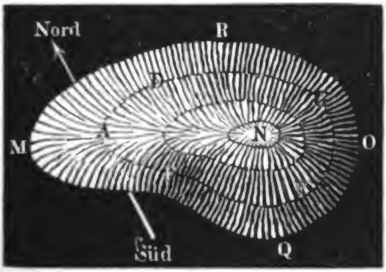


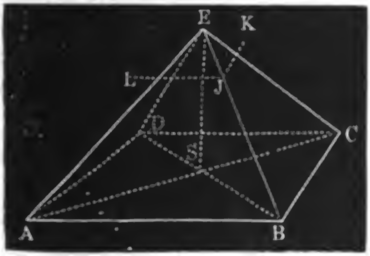
Fig. 217.



4) Die körperliche Ecke.

§. 239. Wenn drei oder mehrere Flächen sich in einem Punkte — dem Scheitel E — Fig. 218, schneiden, oder wenn von einem (Scheitel-) Punkte E drei oder mehr Linien (Kanten) ausgehen, die nicht in einerlei Ebene liegen, so entsteht der eigentliche Körperwinkel oder die Körperecke. Man ist übereingekommen, die Summe

Fig. 218.



ihrer Seitenwinkel (Winkel AEB + Winkel BEC + Winkel CED + Winkel DEA) als ihr Maass zu betrachten; in Folge dessen sich der leicht einzusehende Satz ergiebt, dass, die Winkel um E zusammen nie so gross als deren Projection um S sein können, oder, das Maass jeder körperlichen Ecke nie die Grösse von 360° erreichen kann. Die Ausmessung einer körperlichen Ecke durch den Messknecht hätte sonach in der Messung sämmtlicher Seitenwinkel, am besten nach der Sehnenmethode S. 177 zu geschehen.

Die Ausmessung der Kantenwinkel aber, d. h. derer, die die einzelnen Aussenflächen (z. B. AEB und CEB)

an ihrer gemeinschaftlichen Kante (EB) mit einander bilden (Winkel LJK), ist auf S. 299 gelehrt.

5) Körperformen und deren Elemente.

§. 240. Mathematisch heisst ein Körper, sobald man — absehend von seinem Stoffe — einzig nur die Verhältnisse seiner Gestalt und Grösse in Betracht zieht. Gegensatz: Physischer Körper.

Geometrisch nennen wir solche Körper, deren Gestalt eine gewisse Gesetzmässigkeit darbietet, so dass sie mit mathematischer Strenge zu untersuchen (zu berechnen) sind. Gegensatz: Ungeometrische, ungesetzliche, unförmliche Körper.

Gleich an Grösse, kurzweg: »gleich« (=) heissen solche Körper, die gleichen Rauminhalt (Volumen) haben, wie verschieden auch ihre Gestalt sei.

(Eine Kanne und ein Kasten, von denen jedes netto 66 preuss. Pfunde reines Wasser in sich aufnimmt, sind an Volumen einander und auch einem Würfel von 1 preuss. Fuss Seite gleich.)

Gleich an Gestalt, d. h. ähnlich ($\sim$) sind 2 Körper dann, wenn sämmtliche Abmessungen des einen mit den gleichliegenden (homologen, correspondirenden, ähnlichen) des anderen ein und dasselbe Verhältniss und in Folge dessen auch beide einerlei Winkel an sich haben.

(Würfel und Kugeln unter sich sind immer ähnlich; Kegel und Cylinder unter sich nur dann, wenn sich ihre Grunddurchmesser wie ihre Längen verhalten, z. B. der Kegel mit 3mal kleinerem Durchmesser auch eine 3mal kleinere Länge hat. Alle Fässer, bei denen der Böttcher die Länge, Breite und Spitzung der Dauben nach einerlei Verhältniss zurichtete, sind ähnliche Körper; nahe genug sind dies auch die Thierkörper einer und derselben Gattung, oder besser eines und desselben Schlages. Siehe das siebente Buch.

§. 241. Solche Körper, die durch lauter Ebenen begrenzt sind, heissen — weil sie viele, und zum mindesten 4, Aussenflächen haben müssen — **Polyëder** (Vielflächner). Wenn die Seitenkanten eines solchen parallel sind, erhält er die Bezeichnung **Prisma** oder prismatisches Polyëder; und wenn sie alle nach einem Punkte convergiren: **Pyramide**, pyramidales Polyëder.

Jenes heisst noch besonders ein **vollständiges und Voll-Prisma**, wenn diese Seitenkanten gleich lang, die Seitenflächen also Parallelogramme sind; und diese ebenso eine volle Pyramide, wenn alle Seitenkanten bis zur Spitze vollständig vorhanden, die Seitenflächen sämmtlich Dreiecke sind; wie in beiden beistehenden Figuren (Fig. 219 und Fig. 220).

Fig. 219.

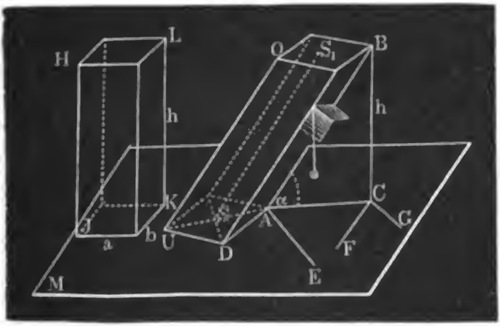
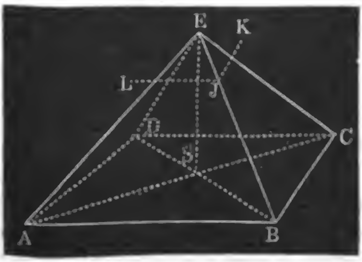
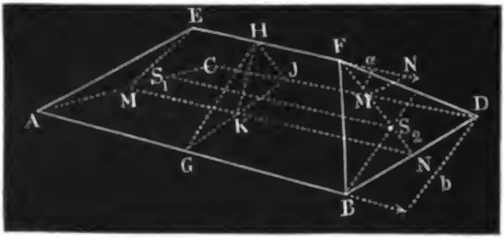


Fig. 220.



Ausserdem unvollständig oder abgestutzt wie das dachförmige Prisma, Fig. 221.

Fig. 221.



§. 242. Diejenige Aussenfläche, auf der ein solcher oder anderer Körper stehend oder aufliegend gedacht wird, heisst seine Grundfläche oder Basis. Ist eine ihr gegenüber stehende vorhanden, wie beim Prisma stets und bei der abgestumpften Pyramide (sobald man nicht etwa ausnahmsweise, wie in Fig. 221 eine Seitenfläche zur Basis macht), so wird diese als »obere Grundfläche« bezeichnet. — Das Loth vom höchsten Punkte eines Körpers auf dessen Grundfläche heisst des Körpers Höhe; das vom oberen Endpunkte irgend einer Längendimension, z. B. einer Seitenkante: die senkrechte Höhe dieser Dimension. Ist die Basis eine symmetrische Figur, so hat sie bekanntlich auch einen geometrischen Mittelpunkt; so jedes regelmässige Vieleck, jedes Parallelogramm u. s. w. (auch Kreis und Ellipse). Denken wir uns beim Prisma durch diesen Punkt eine Linie parallel mit den Seitenkanten, so erhalten wir die geometrische Achse desselben, während wir bei der Pyramide als geometrische Achse die Verbindungslinie zwischen dem Scheitel und dem Mittelpunkte der Basis zu betrachten haben, wie Fig. 220.

§. 243. Während ein geometrischer Mittelpunkt und demgemäss eine geometrische Achse nur bei symmetrisch geformter Basis denkbar, ist dagegen für jede irgend wie geformte Grundfläche der Schwerpunkt (Balancirpunkt) stets vorhanden, natürlich auch die durch ihn, beim Prisma wie-

der parallel zu den Seitenkanten, bei der Pyramide dagegen wieder durch die Spitze, gelegte Schwerachse.

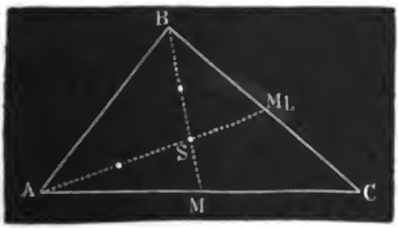
Ein Prisma oder eine Pyramide heisse gerade, wenn ihre Schwerachsen (beim Prisma folglich auch die Seitenkanten) auf der Basis senkrecht stehen. Der Winkel, den ausserdem jene Achse SS_1, Fig. 219, und ES, Fig. 220, mit der Grundfläche bildet, heisse des Körpers Schiefe; das Loth von ihrem oberen Endpunkte auf die Basis die senkrechte Höhe dieser Achse.

Wenn die Basis eines Vollprismas ein Parallelogramm ist, so sind dessen sämmtliche 6 Aussenflächen Parallelogramme, oder je zwei sind einander parallel gegenüber und sich gleich. Nach dem Vorgange der lateinischen (griechischen) Geometer nennt man eine solche Form noch heut zu Tage Parallelepipedum (Parallelflächner). Ein gerades und volles Parallelepipedum hat sonach lauter Rechtecke zu Aussenflächen. Der Würfel oder Cubus ist ein gerades Parallelepipedum, dessen Breite, Dicke und Höhe einerlei, dessen Aussenflächen also gleichseitige Rechtecke (Quadrate) sind.

§. 244. Der Schwerpunkt, dessen Theorie in die mechanische Physik gehört, findet sich für irgend eine Fläche leicht, sobald man zwei verschiedene Linien angeben kann, welche beide die Fläche halbiren, indem deren Durchschnittspunkt der Schwerpunkt ist. Derselbe fällt daher bei jeder symmetrischen Figur mit deren geometrischem Mittelpunkte zusammen; so beim Kreise, Quadrate, Rechtecke und jedem Parallelogramme

Beim Dreiecke, Fig. 222, findet er sich, wenn man eine Ecke mit der Mitte der Gegenseite verbindet und diese Halbirungslinie in 3 gleiche Theile theilt, wo dann der zunächst der Seite liegende Theilpunkt S der Schwerpunkt,

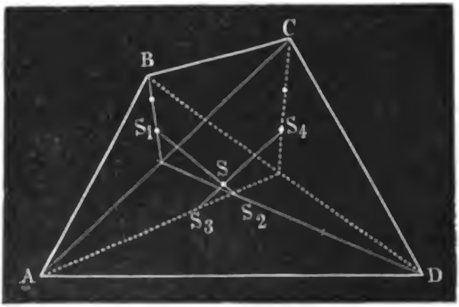
Fig. 222.



d. h. der Punkt ist, um welchen herum alle auf die einzelnen Punkte der Fläche wirkenden (gleichen) Schwerkräfte sich im Gleichgewichte halten, so dass, wenn die Fläche eine materielle, etwa aus gleichförmigem Blech gefertigte wäre, S der sogenannte Balancirpunkt sein würde.

Beim irregulären Vierecke, Fig. 223, findet der-

Fig. 223.



selbe sich, indem man es erst durch eine Diagonale AC in 2 Dreiecke zerlegt und die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Dreiecke bestimmt, dasselbe dann hinsichts der anderen Diagonale macht, wo dann der Durchschnittspunkt S der beiden »Schwerachsen« S_1 S_2 und S_3 S_4 den gesuchten Schwerpunkt S giebt. — Um den Schwerpunkt S unregelmässiger oder überhaupt aller Flächen durch blosse Einschätzung zu bestimmen, muss man sich also immer 2 Linien denken, von denen jede für sich die Fläche in 2 gleiche Hälften theilt, wie MN und PO, Fig. 224 (a. f. S.) in Bezug auf das Wasserprofil AC.

Beim Trapeze z. B. liegt er stets innerhalb der die Mitten beider Parallelseiten verbindenden Linie MM_1, Fig. 225 (a. f. S.)

§. 245. Ist die Grundfläche eine krummlinige Figur, so sind zwar Seitenkanten eigentlich nicht vorhanden, wohl aber **denkbar**, sobald man sich die Basis als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt. Das Prisma mit kreisförmiger Grundfläche, wie der Untertheil $AJKB$

der Fig. 226, führt den speciellen Namen: **Walze** oder **Cylinder**; und das mit **elliptischer** Basis Fig. 227, **Cylindroid** (d. h. cylinderähnlich). Die Py-

Fig. 224.

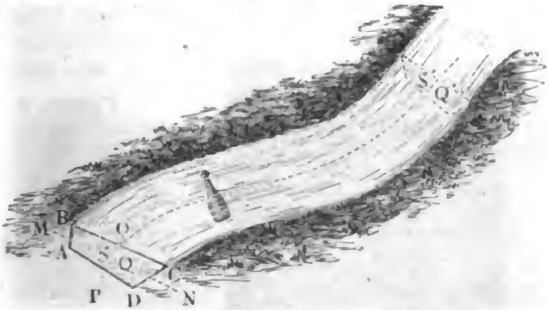


Fig. 225.

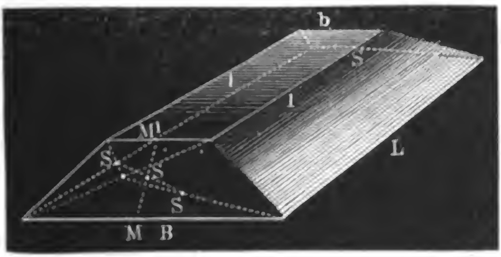


Fig. 226.

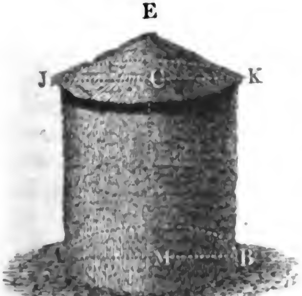
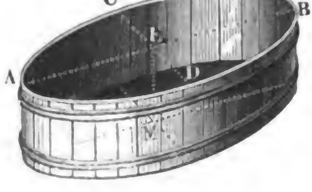


Fig. 227.



ramide mit kreisförmiger Basis, wie *JEK*, Fig. 226, heisst Kegel, Conus. Auch hat man, ähnlich wie bei den Polyëdern, den Cylinderstutz, Fig. 228, und den Kegelstutz, Fig. 229, von dem vollen Cylinder und Kegel, zu unterscheiden. Bei den cylindrischen und konischen

Fig. 228.

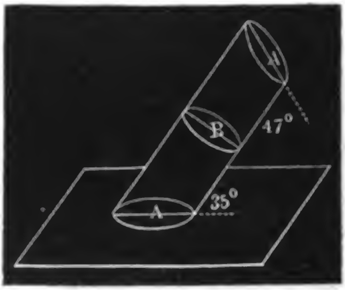
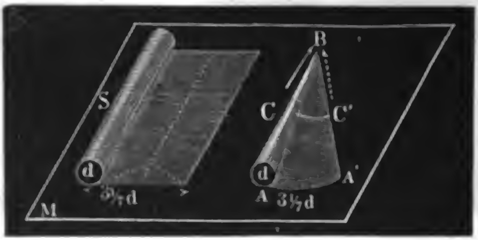


Fig. 229.



Fig. 230.

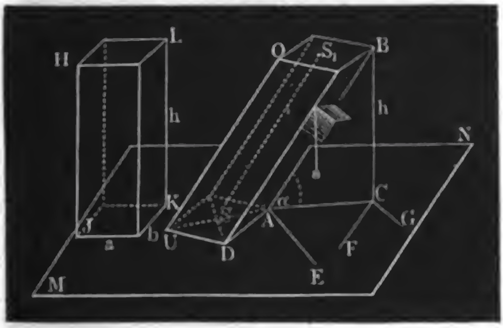


Körpern fallen die geometrische und die Schwerachse in einer Linie zusammen.

Ist bei dem Prisma, Fig. 228, der Querschnitt rechtwinkelig durch die Seiten ein Kreis, so ist dasselbe eigentlich ein auf beiden Seiten abgestutzter Cylinder, dessen Grundfläche dem Normalquerschnitte gleich war. So wie er aber dasteht, und wenn man die Basis, auf der er steht, als Grundfläche ansieht, ist er ein Cylindroid, und zwar, da die obere Grundfläche nicht parallel zur unteren ist, ein abgestutztes Cylindroid.

§. 246. Es ist von Nutzen, sich die Körper durch die Bewegung von Flächen, die man dann **erzeugende** nennt, entstanden zu denken. Der prismatische Raum entstand demgemäss durch Fortrückung der Grundfläche in immer paralleler Lage mit sich, und das Prisma ward **gerade**, wenn die Bewegungsrichtung (**die Rückungslinie**) rechtwinkelig zur Fläche war, ausserdem schief, wie beides

Fig. 231.



in Fig. 231 zu sehen. In Folge dessen sind alle unter sich parallelen Querschnitte prismatischer Körper an Gestalt und Grösse ganz einerlei.

Schnitte, welche die Seitenkanten oder Achsen rechtwinkelig durchschneiden, heissen **Normalquerschnitte**.

Ist die Schiefe des Prismas $\alpha = 35^0$ (Fig. 228), so ist nach S. 207 die Neigung des Normalquerschnitts gegen die Grundfläche $= 90 - \alpha = 55^0$.

§. 247. Die Rückungslinie kann auch krumm sein, wo dann ein **krummverschobenes** Prisma entstand, bei dem jedoch ebenfalls alle mit der Grundfläche parallelen Querschnitte (Fig. 232a, a. f. S., g_1, g_2, g_3, g_4) einander gleich sind.

Anders ist es bei einer solchen krummlinigen Fort-

rückung, Fig. 232 b, der erzeugenden Fläche g_1, wobei die letztere sich immer rechtwinkelig zur Rückungsachse hält, wie das bei der Bildung des prismatischen Ringes (Fig. 233) statt hat, dessen Normalquerschnitt immer senkrecht auf den Rückungskreis (S_1 S_2 S_3 S_4), sich gleichsam um dessen Mittelpunkt (M) bewegt, also eine rotirende Bewegung gehabt hat. Ein krummes Prisma, bei wel-

Fig. 232.

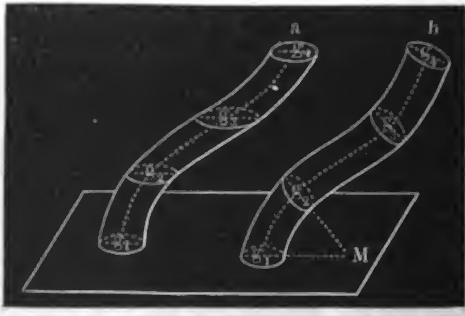
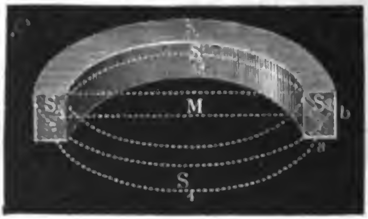


Fig. 233.



chem nicht die einander parallelen, sondern die Normalquerschnitte einander ähnlichgleich sind, und das wir ein krummgebogenes nennen wollen, ist sonach (ganz oder — wie Figur 232 b — stückweise) nicht sowohl als ein Rückungs-, sondern besser als ein Rotations-Körper zu betrachten. Selbst der gerade Rückungskörper des Kreises, der gerade Cylinder, kann als Rotationskörper eines Rechtecks $MAJC$ Fig. 226 um eine Seite CM angesehen werden.

§. 248. **Die pyramidalen Formen sind als Rückungskörper anzusehen**, wobei die erzeugende Grundfläche sich der Art stetig verkleinerte, dass in demselben Verhältnisse, wie ihre Entfernung von dem Convergenz- oder Verschwindungspunkte O abnahm, auch ihre Dimensionen abnahmen. Alle der Grundfläche parallelen Querschnitte G, γ, g sind ihr ähnliche Figuren; ihre homologen Abmessungen a_3, a_2, a_1 oder AB, CD, EF verhalten sich wie die zugehörenden Oberhöhen OG, $O\gamma$, Og oder Oberseiten AO, CO, EO; ihre Flächen wie die Quadrate dieser Dimensionen. Verhalten sich also die Entfernungen der Flächen g, γ u. G von der Spitze O, wie 1 zu 2 zu 3, so verhalten sich ihre Inhalte wie 1 zu 4 zu 9. Der gerade Kegel kann aber auch als Rotationskörper angesehen werden, mit dem rechtwinkeligen Dreiecke AOU als Erzeugungsfläche und der Kathete OU als Rotationsachse.

Fig. 234.

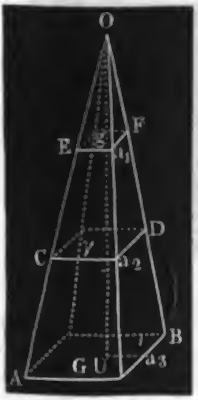
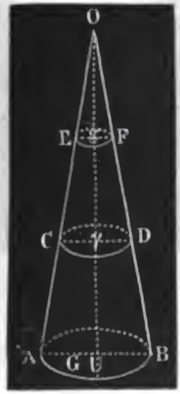


Fig. 235.



§. 249. Ausser den Pyramiden und Kegeln mit geraden Seiten — die wir künftig immer gemeine nennen wollen — kommen im Leben nicht selten auch solche vor, deren Seiten nach aussen oder nach innen gekrümmt — aus- oder eingebaucht — sind. Am besten berechnen sich dergleichen ausgebauchte pyramidale Körper, wenn die Bauchung parabolisch (s. S. 257) ist, indem dann sich die Querschnitte g, γ, G Fig. 236 u. Fig. 237 a. f. S. gerade wie ihre Entfernungen vom Scheitel verhalten; also wenn das Verhältniss der Oberhöhen Og, $O\gamma$ u. OG gleich dem der Zahlen 1, 2, 3 ist, d. h. wenn die Entfernung der Quer-

schnitte eine gleiche ist, so verhalten sich auch deren Flächen wie 1, 2, 3 und deren gleichnamige Dimensionen *AB*,

Fig. 236.

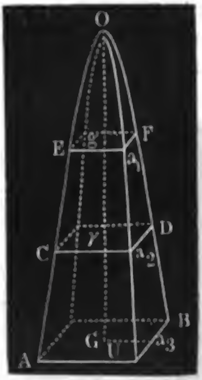
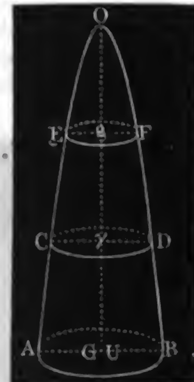


Fig. 237.



CD, *EF* wie die Quadratwurzeln ihrer Oberhöhen (ihrer Entfernungen von der Spitze). Wegen dieser einfachen Gesetzmässigkeit suchen wir andere Arten von Ausbauchung gern auf die parabolische zurückzuführen.

Bei den eingebauchten pyramidalen Formen ist es jedoch vortheilhafter, nicht sowohl die eigentliche (apollonische) Parabel, sondern deren Abwickelungslinie (Evolute *ABC*), Fig. 237, zur Bauchungskurve anzunehmen, eine Kurve, die auch zum Parabelgeschlecht gehört, indem hinsichts ihrer auf *AX* genommenen Abscissen und der darauf senkrechten Ordinaten das Gesetz $y^{n'} = ax$ besteht, nämlich: $y^{3/2} = ax$ oder $y_1^3 : y_2^3 = x_1^2 : x_2^2$, weshalb sie auch die semikubische oder, nach ihrem englischen Begründer Neil, die Neil'sche Parabel genannt wird. — Wenn man x_1, x_2 u. s. w. halbirt, drittelt, viertelt u. s. w., so erhält man wiederum eine Neil'sche Parabel, die sich aber näher bei der Achse *AE* hält, z. B. wie *Abc*.

Wir werden die pyramidalen Körper, deren Seiten

nach der semikubischen Parabel eingebaucht sind, im Künftigen kurzweg parabolisch eingebauchte nennen.

Fig. 238.

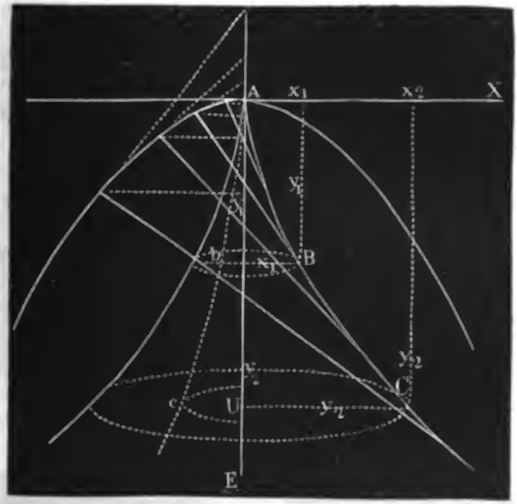


Fig. 239.

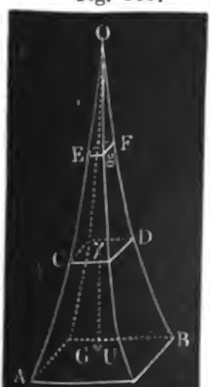
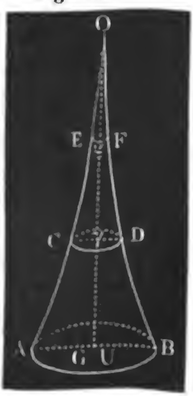


Fig. 240.



§. 250. Denken wir uns alle pyramidalischen Formen als Rückungskörper und das Fortrücken von der Spitze O ausgehend mit wachsender Erzeugungsfläche, und bezeichnen die jeweilige Entfernung der letzteren von der Spitze mit dem Namen Oberhöhe und den Buchstaben h und H, so zeigt sich folgender karakteristischer Unterschied:

a. Bei der parabolisch ausgebauchten Pyramide wächst die Erzeugungsfläche einfach wie die Oberhöhe; denn $g : G = h : H$ (s. S. 314).

b. Bei der gemeinen (geradseitigen) dagegen: wie die Quadrate der Oberhöhen (also stärker); denn $g : G = h^2 : H^2$ (s. S. 314).

c. Bei der parabolisch eingebauchten endlich: wie die Würfel der Oberhöhen (also noch stärker); denn nach S. 315 ist $x_1^3 : x_2^3 = y_1^3 : y_2^3$, d. h. $g : G = h^3 : H^3$.

Wenn bei einem krumm verschobenen Kegel die der Grundfläche parallelen Querschnitte g, γ, G sich wie die Quadrate der Oberhöhen h, h_1, H verhalten, oder bei einem krummgebogenen die zur Achse senkrechten Quer-

Fig. 241.

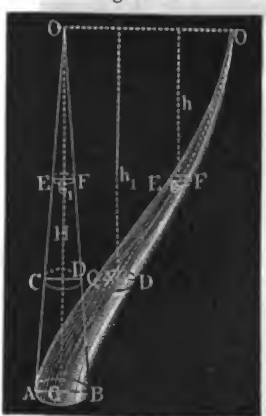


Fig. 242.



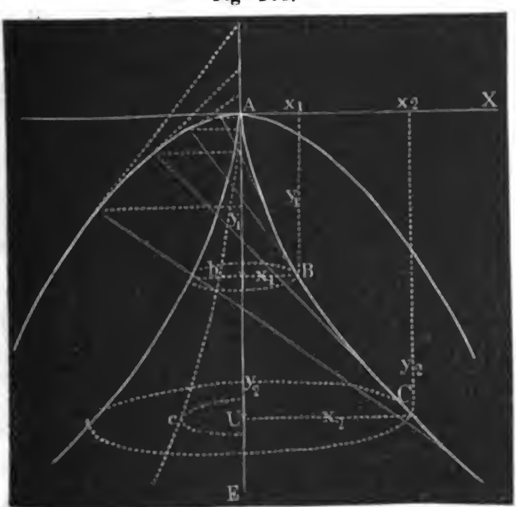
schnitte g, γ, G, wie die Quadrate ihre oberen Achsenstücke $Og, O\gamma, OG$, so gehört diese Form immer auch

in die Klasse der gemeinen Kegel, da das Bildungsgesetz *b*, für diese Form als das Allgemeine und Ursächliche, die gerade Seite aber nur als ein specieller Fall für die gerade Rückungslinie anzusehen ist. — Aehnliche Erweiterungen gelten auch für die parabolisch pyramidalen Körper.

§. 251. Alle Körper mit kreisförmigen Querschnitten (Kreiskörper) können als aus Rotation um eine bestimmte Achse entstanden gedacht werden; die geraden unmittelbar, die schiefen durch Verschiebung oder Beugung der geraden. (Siehe Fig. 241 u. 242.)

Wie der gerade Kegel durch Rotation eines rechtwinkeligen Dreiecks um seine Kathete, so ist der ausgebauchte Parabelkegel (oder das Paraboloid) entstanden durch Rotation einer halben Parabelfläche *AOU* Fig. 237 um die Achse *OU*; der eingebauchte (das Neiloid) Fig. 240 durch Rotation der zwischen der Evolute und der Achse einer Parabel liegenden Fläche *ACU* oder *AcU*, Fig. 243, um die Achse der letzteren.

Fig 243.



Bemerkenswerth sind ausserdem noch folgende Rotationskörper: Die Kugel, Sphäre (S. Fig. 212 S. 301), entstanden durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser; das Ellipsoid oder Sphäroid, durch Umdrehung einer halben Ellipse um die kleine oder grosse Achse, wo im ersten Falle das gedrückte oder linsenförmige, Fig. 244, im anderen das längliche oder eiförmige, Fig. 245,

Fig. 244.

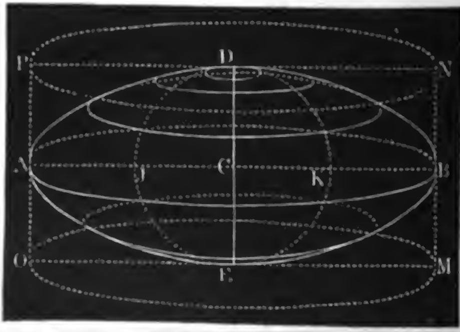
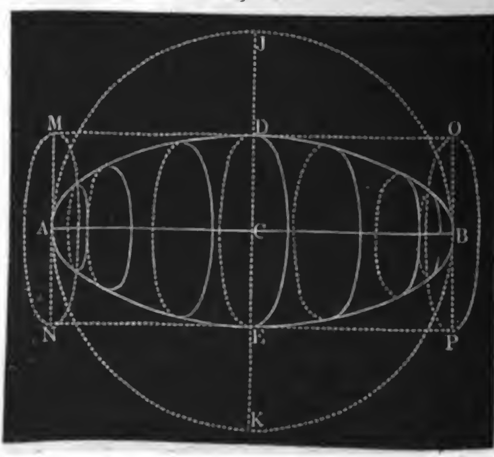
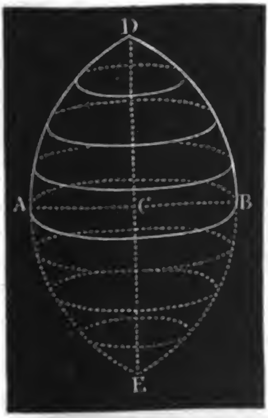


Fig. 245.



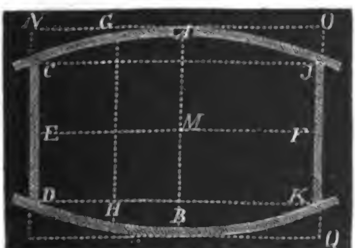
entsteht; die sphärische und die parabolische Spindel, Figur 246, jene durch Umdrehung eines Kreissegments, diese durch Umdrehung eines Parabelsegments um die Sehne *DE*; der Fassraum, Fig. 247, durch Umdrehung eines Rechtecks *ECJF* mit angesetztem Segmente *CAJ* um die Grundlinie *EF*. U. s. w.

Fig. 246.



§. 252. Die Ermittelung des Rauminhaltes (Volumens) eines Körpers bezeichnet man kurz mit dem Worte: Kubiren, indem dasselbe darin besteht, anzugeben, wie viele Male der zum Körpermaasse angenommene Würfel (*Cubus*, der, je nachdem seine Seite 1 Zoll, 1 Fuss, 1 Meter lang ist, Kubikzoll, Kubikfuss, Kubikmeter genannt wird) in ihm enthalten ist.

Fig. 247.



Diese Ausmittelung des Volumens, die Kubirung der körperlichen Räume nach geometrischen Regeln, bildet im gewöhnlichen technischen Leben das hauptsächlichste, wo nicht ausschliessliche Geschäft der praktischen Stereometrie.

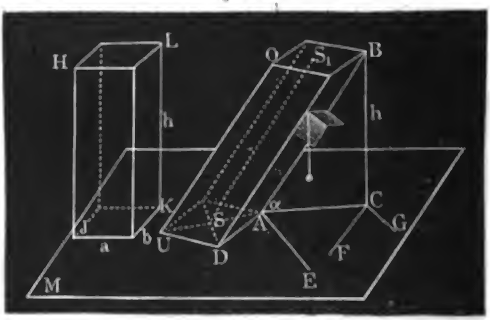
Gegenüber dieser geometrischen Kubirung giebt es aber auch eine mechanische, entweder durch Ermitte-

lung der Dichtigkeit und des Gewichts des Körpers (s. 5. Buch) oder durch Untertauchen in Wasser (Aichung) innerhalb eines mit einer Volumenskala versehenen Gefässess (s. 6. Buch.)

§. 253. Den meisten unserer Leser dürfte wohl bekannt sein, dass die geometrische Kubirung auf folgenden theilweise leicht zu erweisenden wissenschaftlichen Wahrheiten beruht.

1. Körper von gleich grossen Grundflächen und Höhen, deren gleich hoch genommene Querschnitte ebenfalls gleich sind, sind auch an Volumen einander gleich; so z. B. zwei irgend wie gestaltete prismatische Körper von gleicher Grundfläche und Höhe; ebenso zwei derglei-

Fig. 248.



chen pyramidalische Körper wie Fig. 249; oder 250 u. 251; oder 252 u. 253. So auch in Fig. 254, wo $h = h_1$ und $a \times b = a_1 \times b_1$ und folglich Prisma V an Volumen $=$ Prisma P ist.

2. Das Volumen des vollen Prismas wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt; d. h.: wenn man die letztere

Fig. 249.

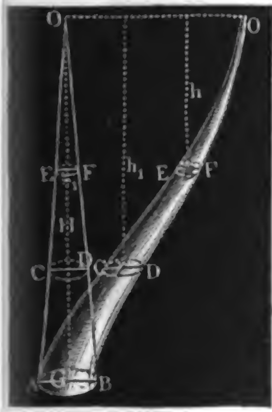


Fig. 250.

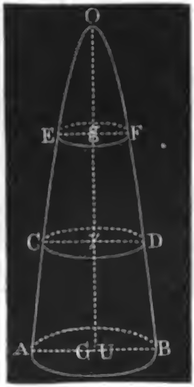


Fig. 251.

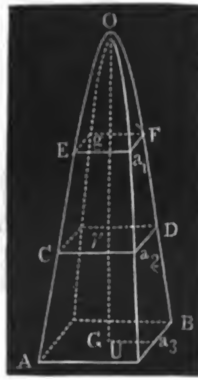
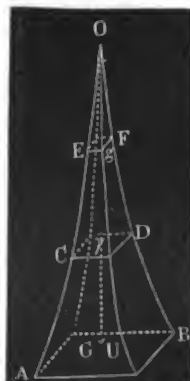


Fig. 252.



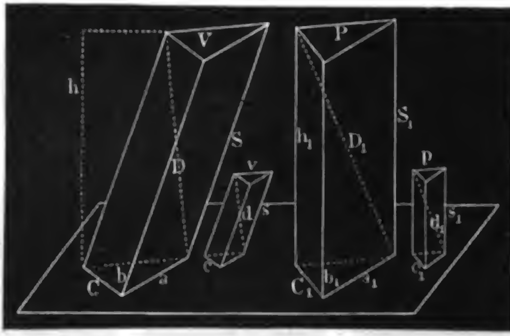
Fig. 253



nach Fussen und die erstere in □Fussen ausgemessen hat, so giebt das Produkt beider Zahlen die Menge der inwohnenden Kubikfusse.

3. Wenn man, das Prisma als Rückungskörper betrachtend, dies Gesetz so ausdrückt: Die Erzeugungs-

Fig. 254.



fläche multiplicirt mit der rechtwinklig zu ihr gemessenen Länge ihres Schwerpunktsweges, so gilt es in dieser Fassung nicht allein von den prismatischen Rückungskörpern, sondern auch von allen Rotationskörpern, die Drehachse mag in oder ausser ihnen liegen, die Drehung eine volle kreisförmige sein oder nicht. (Diese höchst interessante Regel findet sich schon in den griechischen Werken des Pappus, wird aber gewöhnlich nach dem Schweizer-Mönche Guldin genannt, der sie im 17. Jahrhundert bekannt machte. Die Guldin'sche Regel gilt auch für die Complanation solcher Flächen, die durch Fortrückung oder durch Rotation irgend einer Linie entstanden sind, heisst aber hier einfacher: Länge der Linie $\times$ Weg ihres Schwerpunktes.)

3. Der Würfel der Linie a, dessen Grundfläche also $= a^2$, und Höhe $= a$, ist demnach an Inhalt $= a^2 \times a = a^3$. Darum heisst die dritte Potenz einer Grösse auch der Würfel derselben. — Ein Würfel von 3 Fuss Seite enthält $3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$ Würfel von 1 Fuss Seite oder 27 Kubikfusse.

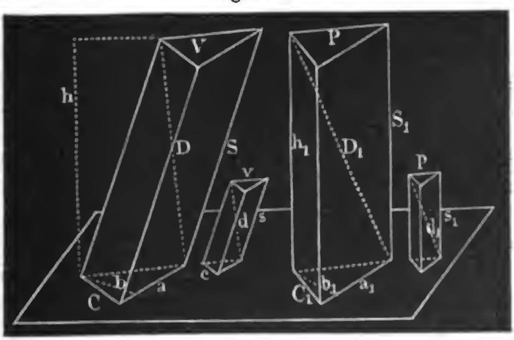
4. Jedes dreikantige Prisma lässt sich durch zwei Schnitte in drei Pyramiden zerlegen, von denen immer je zwei gleiche Grundfläche und Höhe haben, so dass alle

drei einander gleich sind, und in weiterer Schlussfolge mit Benutzung des Satzes 1 folgt: Jeder (gemeine) pyramidale Körper hat $\frac{1}{3}$ soviel Volumen als ein Prisma von gleich grosser Basis und Höhe.

5. Zwei ähnliche dreikantige Prismen verhalten sich ihrem Volumen nach wie die Würfel (oder dritten Potenzen) ihrer homologen oder ähnlichen Abmessungen; ihren Aussenflächen nach wie die Quadrate oder zweiten Potenzen derselben.

Ist z. B. das Prisma v ähnlich ($\backsim$) V und bezeichnen S und s die Seitenkanten, C und c zwei gleichliegende Grundseiten, D und d zwei homologe Diagonalen, so ist vermöge der Aehnlichheit zunächst $S : s = C : c = D : d$, und in Folge dessen, wenn V und v das Vo-

Fig. 255.



lumen, O und o die Oberflächen beider Prismen bedeuten:

$$V : v = S^3 : s^3 = C^3 : c^3 = D^3 : d^3$$
$$O : o = S^2 : s^2 = C^2 : c^2 = D^2 : d^2.$$

Waren z. B. alle Dimensionen des Prismas V 3mal grösser als die von v, also das Verhältniss $S:s = D:d = C:c = 3:1$, so wäre sein Volumen $3 \times 3 \times 3 = 27$mal

und seine Oberfläche $3 \times 3 = 9$mal grösser als beim Prisma *v*.

6. Wenn man sich eine irgendwie gestaltete Körperform, (einen Baum oder ein Stück Vieh) in lauter dreikantige Prismen zerlegt denkt (was immer angeht, wenn man sich diese nur klein genug vorstellt), so muss sich ein anderer ähnlicher Körper, also ein solcher, der in allen seinen Dimensionen jenem proportional, z. B. *n*mal kleiner ist (z. B. ein Baum, der nach Durchmesser und Länge des Stammes, der Aeste und der Krone immer 3mal kleiner wäre) in ganz gleicher Weise in dreikantige Prismen (Elemente) zerlegen lassen, so dass deren Anzahl in beiden Körpern gleich gross, die Dimensionen derselben im letzteren aber durchweg *n*mal kleiner als im ersteren sein müssen. In Folge dessen ist jedes prismatische Element des letzteren dem Volumen nach n^3mal kleiner als im ersteren, also auch alle zusammen hier n^3mal kleiner als dort. (Die Masse jenes 3mal kleineren Baumes also $3^3 = 27$mal kleiner als die des anderen.) Da man ferner ähnliche Betrachtungen und Schlüsse in Bezug auf die Oberfläche solcher Körper machen kann, so folgt allgemein: **Jede zwei Körper** (welcher Formgattung sie auch gemeinsam angehören), **die in allen ihren Abmessungen proportionirt**

Fig. 256.



und also auch mit einerlei Winkeln erscheinen (ähnlich sind), verhalten sich ihrer Oberfläche nach wie die Quadrate, ihrem Körperinhalte nach wie die Würfel ihrer homologen Abmessungen.

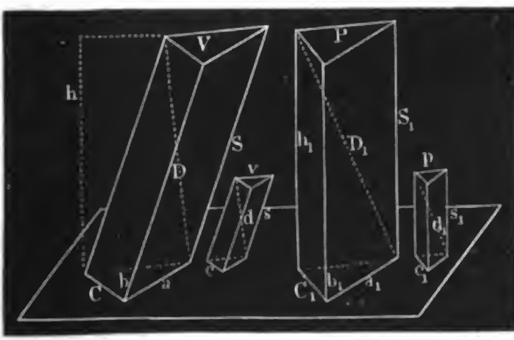
Siebenzehntes Kapitel.

Ausmessung der prismatischen Vollkörper.

§. 254. Das Vollprisma überhaupt.

Das Karakteristische dieser Form ist: Die Längs-

Fig. 257. Fig. 258.



(oder Seiten-) Kanten sind sich parallel und die beiden kongruenten Grundflächen ebenfalls (Fig. 257 und 258). Als eine besondere Art des Vollprismas ist auch das krummgebogene anzusehen, dessen Endflächen Normalquerschnitte sind. (Siehe Fig. 233 und Fig 234 auf Seite 312.)

Ist g die Grundfläche und h die lothrecht darauf genommene Länge oder Höhe, so ist gemäss 2) Seite 320 das Volumen $V = g \times h$, d. h.

= dem Produkte aus den Zahlen g und h, welches Produkt Würfel desselben Maasses bezeichnet, mit welchem Grundfläche und Höhe (jene natürlich in Quadraten dieses Maasses) ausgedrückt sind.

Zum Beispiel. Ein vierkantiger Balken der 1,5 □Fuss Grund- oder Stirnfläche und 20 Fuss Länge hat, enthält 1,5 × 20 = 30 Kubikfusse Inhalt.

Häufig kommt es aber vor, dass bei verlangter Inhaltsangabe in Kubikfussen die Stärken in Zollen oder die Stirnfläche in □Zollen gegeben sind. Beim Decimalmaasse verwandelt man letztere leicht in □Fusse durch Vorrücken des Kommas um 2 Stellen. 275 □Decimalzolle z. B. sind 2,75 □Fusse. Beim Duodecimalmaasse hat man aber statt mit 100 mit 144 zu dividiren, um diese Verwandlung zu bewirken. Diese bei der Berechnung balkenförmiger Körper und auch sonst noch häufig vorkommende Division in eine blosse Ablesung zu verwandeln, besitzt der Knecht die schon aus Früherem bekannte *Pr.*-Spalte. (Siehe das Kapitel von den Reciproken S. 33.)

Hat das Prisma die Schiefe α, und ist seine schiefe Länge $= l$, dann ist sein Volumen $V = g \,.\, l \,.\, sin.\, \alpha$, wie aus Kapitel 6 leicht folgt.

Ist es krumm, und l die Länge seiner Schwerachse, so ist $V = g \,.\, l$. (Seite 322.)

Ist bei gegebenem Inhalte eine Dimension zu finden, so hat man aus $gh = V$ entweder $h = \frac{V}{g}$ oder $g = \frac{V}{h}$.

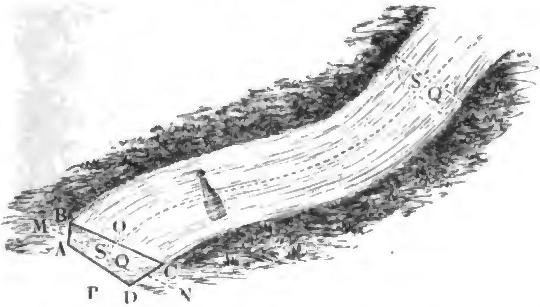
1. Beispiel. Ein Stamm oder Astabschnitt, Fig. 259, mit gleichförmigen, aber unregelmässig geformten Querschnitten, hatte, nach der Simpson'schen Regel berechnet, 210 □Zoll (Duodec.) Grundfläche und 3 Fuss Länge, also, da die *Pr.*-Spalte die 210 □Zoll in 1,46 □Fuss verwandelt, einen Inhalt
= 1,46 × 3 = 4,38 Kubikfuss.

Fig. 259.



2. Beispiel. Fig. 260 stellt ein Stück eines Wasserbettes vor, innerhalb dessen das Querprofil und in Folge dessen auch die Geschwindigkeit des Wassers nahe genug gleichförmig ist. Die krumme Länge SS

Fig. 260.



(der Schwerachse, S. 307) war 100 Fuss, das mittels einiger Ordinaten gemessene und berechnete (S. 235) Profil $= 20$ □Fuss, und die hineingeworfenen Schwimmer brauchten 25 Sekunden zur Durchlaufung dieser Strecke (d. h. das Wasser hatte eine Geschwindigkeit von $\frac{100}{25} = 4'$), so ist der ganze Wasserkörper $V = 20 \,.\, 100 = 2000$ Kubikfuss und der Wasserzufluss pro Sekunde $= \frac{2000}{25} = 80$ Kubikfuss, oder auch $20 \,.\, 4 = 80$ Kubikfuss.

§. 255. Das dreikantige Prisma. (Fig. 261 a. f. S.)

Ist a die Grundlinie, b die Höhe der dreieckigen Grundfläche und h die rechtwinkelige Länge des Körpers, so ist sein Inhalt $V = \frac{1}{2}\, a \,.\, b \,.\, h$ oder $a \,.\, b \,.\, \frac{h}{2}$.

Fig. 261.

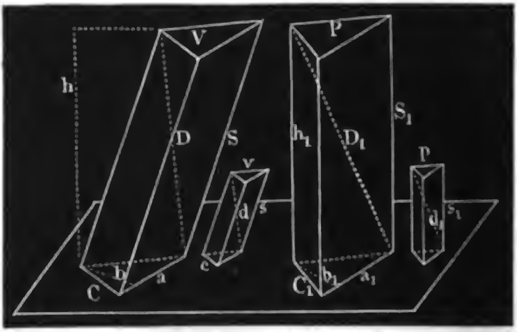
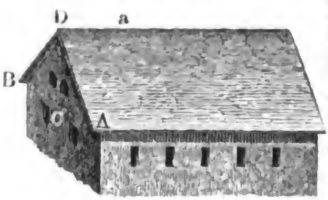


Fig. 262.



1. Beispiel. Wieviel Raum inclusive Holzwerk hat ein Giebeldach, Fig. 262, dessen Tiefe (oder Breite) $AB = 40$ Fuss, Höhe $CD = 15$ Fuss und Länge $l = 80$ Fuss?

$V = 40 . 15 . 40 =$ 24000 Kubikfuss.

2. Beispiel. Wieviel Kubikzolle enthält ein dreikantiger Metallstab von 12 Zoll Länge, 10 Linien (Duodec.) Breite und 7 Linien Dicke?

Die Grundfläche $\frac{1}{2}\ a\,b = \frac{1}{2}\ .\ 70 = 35$ □Linien in der *Pr.*-Spalte aufgesucht, giebt 0,243 □Zolle; also $V = 0{,}243 \times 12 = 2{,}916$ Kubikzolle.

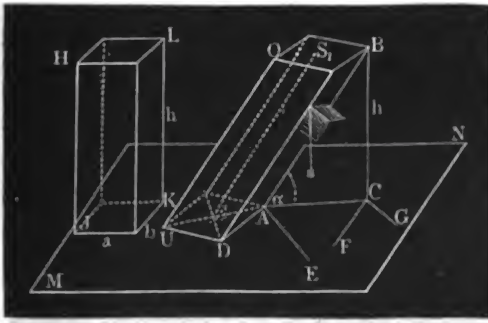
§. 256. Das Parallelepipedum (der vierkantige Balken).

Das gerade (*IKL*, Fig. 263), hat zu Seitenflächen lauter rechteckige, das verschobene (*UB* Fig. 263) entweder ganz oder theilweis schiefe Parallelogramme.

Bezeichnen *a* und *b* die rechtwinkeligen Abmessungen (die Länge und Breite) der Grundfläche, *h* die lothrecht darauf genommene Länge

oder Höhe des Körpers, so ist des Balkens Volumen $V = a \times b \times h$, d. h. = dem Produkte aus Dicke, Breite und Höhe.

Fig. 263.



1. Beispiel. Die gleichförmig dicke Frontenmauer, Fig. 264, deren Länge = 80 Fuss, Dicke a = 3 Fuss, Höhe h = 10 Fuss ist, so zu kubiren, dass Fenster- und Thüröffnungen als voll gerechnet werden.
$V = 80 . 3 . 10 = 2400$ Kubikfuss.

Fig. 264.



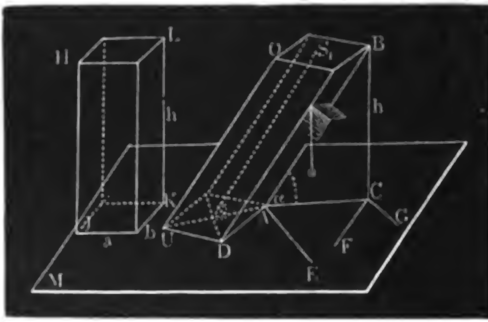
Zusatz. Wäre jedes Fenster 3 Fuss breit und 6 Fuss hoch und die Thür 4 Fuss breit und 9 Fuss hoch, so wären abzurechnen für jedes Fenster $3 . 6 . 3 = 54$ Kubikfuss und für die Thür $4 . 9 . 3 = 108$ Kubikfuss.

2. Beispiel. Einen rechteckig vierkantigen Balken von 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe und 40 Fuss Länge Duodecimalmaass zu kubiren.

8 × 10 = 80 □Zolle mittels der *Pr.*-Spalte in □Fusse reducirt, giebt 0,555 □Fuss, wonach also $V = 0{,}555 \times 40 = 22{,}2$ Kubikfuss.

3. **Beispiel.** In Fig. 265 stelle *UB* einen prismatischen Strebepfeiler vor, dessen rechteckige Grundflächen 2 Fuss breit und 3 Fuss lang, bei einer schiefen Höhe

Fig. 265.

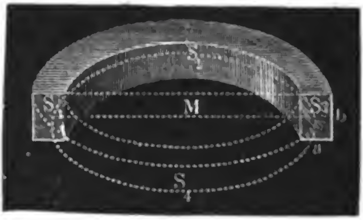


$AB = 12$ Fuss und einem Böschungswinkel $\alpha = 70^0$. Wieviel Kubikfuss Mauerwerk enthält er genau? —

Es ist $V = g \,.\, l \,.\, sin.\, \alpha$, also hier $V = 2 \,.\, 3 \,.\, 12\, sin.\, 70^0$, und da der Knecht letzteren = 0,94 giebt, $V = 72 \times 0{,}94 = 67{,}7$ Kubikfuss.

4. **Beispiel.** Der parallelepipedische Ring, Fig. 266, ist 5 Zoll dick, 7 Zoll hoch (Duodec.) und in der Achse $S_1 S_2 S_3$ netto 6 Fuss lang; wie gross sein Volumen?

Fig. 266.



Der Normalquerschnitt $= 5 \,.\, 7 = 35$ □Zoll, was nach der *Pr.*-Spalte = 0,243 □Fuss; also $V = 0{,}243 \times 6 = 1{,}458$ Kubikfuss.

§. 257. **Der Würfel** ist ein specieller Fall des Parallelepipedums, in welchem b und $h = a$ sind, so **dass des Würfels Inhalt** $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

1. **Beispiel.** Wie viele Kubikzolle stecken im Würfel von 1 Fuss Seite, d. h. im Kubikfusse?
   Beim Duodecimalmaass: $a = 12$ Zoll; $V = 12^3 = 1728$ Kubikzoll.
   Beim Decimalmaass: $a = 10$ Zoll; $V = 10^3 = 1000$ Kubikzoll.

2. **Beispiel.** Die Kubikelle, ein Würfel von 2 Fuss Seite, hat also an Kubikfussen?
   $a = 2$ Fuss; also $V = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Kubikfuss.

§. 258. **Das vierkantige Prisma mit trapezförmigem Querschnitte** (oder mit 2 parallelen Seitenflächen), Fig. 267.

Wenn b_1 und b_2 die beiden Grund- oder Parallelseiten der Grundfläche, m deren Mittellinie und a der Abstand zwischen beiden, so ist bekanntlich (s. S. 230) die Stirnfläche $g = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\, a$ oder $= m \times a$ und das Volumen $V = g \cdot h$ $= (b_1 + b_2)\, a\, \frac{h}{2} = m \cdot a \cdot \frac{h}{2}$.

1. **Beispiel.** Fig. 267 stelle den Kasten eines Brettwagens vor, der nach preussisch. Maasse im Boden 15 Zoll, oben 24 Zoll Breite, dazu 18 Zoll Tiefe und 15 Fuss Länge besitzt. Man soll angeben, wieviel Scheffel derselbe fasst?

Fig. 267.



   Die Grundfläche ist $= 39 \times 9 = 351$ □Zoll, was nach des Knechtes *Pr.*-Spalte $= 2{,}435$ □Fuss; daher Volumen $= 2{,}435 \times 15 = 36{,}525$ Kubikfuss.
   In seiner Eigenschaft als Maassrath giebt er aber auf der Vorderseite an, dass 1 preussischer Kubikfuss

$= {}^9/_{16}$ Scheffel, also 36.525 Kubikfuss = 36,525 $\times {}^9/_{16}$ = 20,55 Scheffel.

2. Beispiel. Wie weit muss man die Schieber oder Vorsetzer dieses Brettwagens von einander stellen, wenn man den Kasten als ein preussisches Zwölf-Scheffel-Maass benutzen will?

Da nach der *m*-Tabelle 1 Scheffel = ${}^{16}/_9$ Kubikfuss, muss das Volumen $V = 12 \cdot {}^{16}/_9 = 21^1/_3$ Kubikfuss sein, also da $g = 2{,}43$ □Fuss und $g \times h = V$ oder $h = \frac{V}{g}$, folgt $h = \frac{21{,}33}{2{,}43} = 8^3/_4$ Fuss.

§. 259. Walze oder Cylinder.

Nach der gewöhnlichen Formel berechnet, wobei *d* die Stärke, d. h. den Durchmesser, und *h* die rechtwinkelige Achsenlänge bezeichnet, würde

a) wenn Höhe und Stärke im Maasse des Inhalts gemessen: $V = \frac{\pi}{4} d^2 h = 0{,}785\, d^2 h$

b) wenn die Stärke in 10mal kleinerem Maasse (Decimalzollen) gegeben ist: $V = 0{,}00785\, d^2 h$

c) wenn die Stärke in 12mal kleinerem Maasse (Duodecimalzollen) gegeben ist: $V = 0{,}00545\, d^2 h$.

Oder immer = der zu *d* gehörigen Kreisfläche (K_d oder Kr_d) multiplicirt mit der Achsenlänge *h*; wobei natürlich *K* (oder *Kr*) und *h* in einerlei Maassen (z. B. □Fuss und Fuss) ausgedrückt sein müssen.

Wie die *Kr.*-Spalte der Vorderseite die letztere Formel oder wenigstens deren vorderen Theil $0{,}00545\, d^2$ (die Grundfläche) in eine blosse Ablesung verwandelt und also auch den Cylinderinhalt für Duodecimalmaass ergiebt, ist aus Kapitel 14, S. 251 ersichtlich. Es dürfte aber nicht unnöthig sein, hier nochmals zu bemerken, dass die *Kr.*- und *Sx.*- (Kreis- und Sextanten-) Spalte nicht bloss

in Zollen und □Fussen, sondern auch für jede zwei andere Maasse arbeitet, deren Reductionszahl 12 ist.

Hinsichts der Walzenkubirung im Duodecimalmaass gilt demgemäss als

Regel: Lies aus der Hauptskala der Vorderseite mittels der *Kr.*- oder *Sx.*-Spalte des Cylinders Grundfläche im (□) Maasse des gesuchten Volumens nach S. 251 ab und multiplicire dasselbe mit der in gleichem (aber linearem) Maasse ausgedrückten Länge.

Beispiel. Eine sächsische Bierkanne soll 72,3 Kubikzolle enthalten. Ist das vor mir stehende cylindrische Kannenglas von 3 Zoll 2 Linien Weite und 9 Zoll Tiefe richtig?

Auflösung. Den Durchmesser = 38 Linien in der *Kr.*-Spalte aufgesucht! Er überschreitet dieselbe.

Man kann nun in die Sextanten-Spalte (*Sx.*) gehen und den bei 38 stehenden Inhalt 1,313 gleich 6fach ausschreiben, also in der Grösse 7,878 □Zoll, wonach das Volumen dieses Glases $V = 7,878 \times 9 = 70,9$ Kubikzoll.

§. 260. Walzenkubirung. (Fortsetzung.)

Für jedes andere als das Duodecimalmaass folgt ebenso die

Regel zur Aufsuchung des Cylinderinhalts V: Suche mittels der *K*-Spalte (resp. *S*-Spalte) der Rückseite die Grundfläche in derjenigen Benennung, in welcher der Kubikinhalt ausgedrückt werden soll und multiplicire sie mit der in gleichem Maasse gemessenen Achsenhöhe (s. S. 247).

Beim krummen (einerlei Normalquerschnitt habenden) setze statt Achsenhöhe: Achsenlänge.

1. Beispiel. Wieviel Kubikfuss Holzmasse enthält ein aufgebauter Feimen, Fig. 268 a. f. S, gespaltenen Holzes von 11,2 Fuss Durchmesser und 12 Fuss Höhe, wenn erfahrungsmässig 20 Procent für Zwischenraum abgeht.

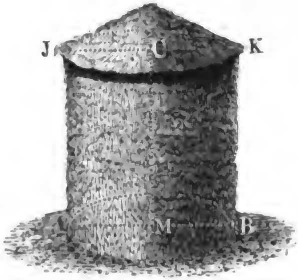
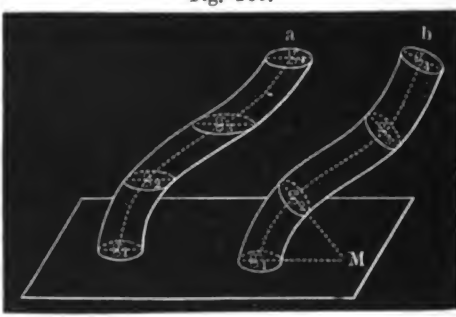


Fig. 273.

Auflösung. Zu 11,2 giebt die *K.*-Spalte den Inhalt 98,5 □Fuss; sonach $V = 98{,}5 \times 12 = 1182$ Kubikfuss Raum; und nach Abzug von 20 Procent, d. h. nach Multiplication mit 0,80 an Holzmasse: 946 Kubikfuss, oder da 80 Kbkfuss = eine gewöhnliche Klafter von 3 Fuss Scheitlänge $= \frac{946}{80} = 11{,}8$ Klf.

2. **Beispiel.** Wieviel Kubikzolle hat ein krummes Aststück Fig. 269 b., dessen kreisförmiger Normalquer-

Fig. 269.



schnitt gleichförmig 1,3 Zoll Stärke und dessen krumme Achse 20 Zoll Länge hat?

Die *K*-Spalte giebt beim Striche 1 Ganzes 3 Zehntel den Inhalt 1,33 □Zoll, also $V = 1{,}33 \times 20 = 26{,}6$ Kubikzoll.

3. **Beispiel.** Wie aber, wenn des vorigen Aststücks Inhalt gleich in Fussen abzuleiten und das gegebene Zollmaass Decimalmaass wäre?

Zu 1,3 Decimalzoll giebt die *K*-Spalte die Kreisfläche, wenn sie in □Fussen, d. h. 10mal grösserer Benennung, ausgedrückt werden soll (wobei bekannt-

lich jeder Grad der Inhaltsskala 1 Hundertel bedeutet), 0,0133 □Fuss; also da die Länge 20″ = 2′ ist: $V = 0{,}0133 \times 2 = 0{,}0266$ Kubikfuss.

§. 261. Jene Hauptskala ist sonach auch als eine Volumen-Tabelle der einfussigen Walzen zu betrachten, sobald man deren in Zollen gegebene (Durchmesser-) Stärken in der *Kr.*- oder *K*-Spalte aufsucht.

Beispiele im Duodecimalmaasse.

1. Beispiel. Inhalt der einfussigen Walze bei 14¼ Zoll Durchmesser?

   Die *Kr.*-Spalte zeigt bei 14¼ deutlich auf 110,8 (Hundertel) oder 1,108 Kubikfuss.

2. Beispiel. Die 52 Zoll starke Walze hat pro 1 Fuss Länge an Inhalt?

   Da 52 die Kreisspalte übersteigt, aber noch in der *Sx.*-Spalte liegt, nimmt man Sx_{52} sechsfach und findet $V = 2{,}458 \times 6 = 14{,}748$ Kubikfuss.

3. Beispiel. Die einfussige Walze von 1¼ oder 1,25 Zoll?

   Die natürliche Aufsuchung nach der *Kr.*-Spalte würde geben 0,8 (Hundertel), d. h. 0,008 Kubikfuss. — Im Falle man aber mehr Genauigkeit wünscht, nimmt man den Durchmesser 10fach (also = 12,5 = 12½) und bedenkt, dass der diesem zugehörige Inhalt 0,852 dadurch der 100fache, also der einfach gesuchte = 0,00852 Kubikfuss ist.

4. Beispiel. Die einfussige Walze von 75 Zoll Durchmesserstärke?

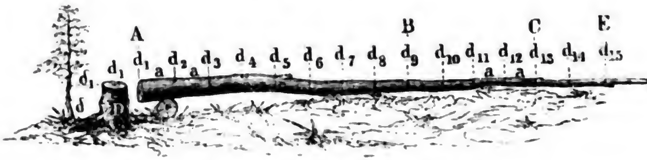
   Da 75 selbst die *Sx.*-Spalte überschreitet, so findet sich durch die *Kr.*-Spalte und mittels des Zehnteldurchmessers 7,5 der (100fach zu nehmende, daher gleich als Ganze abzulesende) Inhalt = 30,7 Kubikfuss.

5. Beispiel. Einen Baumklotz von 16 Fuss Länge und 16 Zoll Durchmesser zu kubiren.

   Kr_{16} giebt 1,396; also $16 \times Kr_{16} = 1{,}396 \times 16 = 22{,}336$ Kubikfuss.

6. **Beispiel.** Ein Stamm von 72 Fuss Länge soll aus dem mittleren Durchmesser = 11 Zoll, als Walze kubirt werden.

Fig. 270.



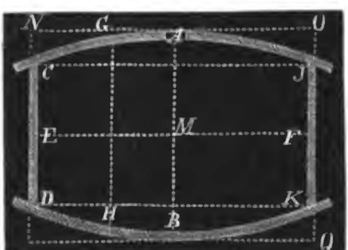
$72 \cdot Kr_{11} = 72 \times 0{,}66 = 47{,}52$ Kubikfuss.

7 **Beispiel.** Ein cylindrischer Getreidefeimen hat an Durchmesser 16 Fuss (= 192 Zoll) und an Höhe 24 Fuss; also an Inhalt, wenn das Schock Garben zu 250 Kubikfuss zu rechnen ist?

Da *Kr.* (192″) die Tabelle überschreitet, finden wir 100 *Kr.* (19,2) als 201 Kubikfuss; und $V = 201 \times 24$ = 4824 Kubikfuss oder $\frac{4824}{250} = 19{,}296$, d. i. 19,3 Schock.

8. **Beispiel.** Der Fassinhalt wird, wenn die Fasslinie *CAI* eine parabolische Krümmung hat, vollkommen genau gefunden, wenn man ihn als Cylinder berechnet, der den zwischen Spund und Boden liegenden mittleren Durchmesser *GH* zur Stärke hat. (S. Parabelkegel.) Wie viel Quart beträgt demnach der Inhalt, wenn *GH* = 33″ und *EF* = 6 Fuss ist?

Fig. 271.



Zu 3,3 der *Kr.*-Spalte gehören 5,9, also da nach der *m*-Tabelle 27 Quart = 1 Kubikfuss, $V = 5{,}9 \times 6 \times 27$ = 955,8 Quart.

§. 262. Walzen (b. Berechnung des unbekannten Durchmessers).

Aus $V = g \cdot h$ folgt $g = \frac{V}{h}$ und daraus die

Regel: Man dividirt den gegebenen Körperinhalt durch die gleichnamige Länge und nimmt zur so gefundenen Kreisfläche (nach S 250) den Durchmesser aus der *K*-Spalte; oder, dafern man denselben im Duodecimalmaass wünscht, aus der *Kr.*-Spalte.

1. Beispiel. Wie dick müsste der Draht sein, der bei 10 Zoll Länge netto ein Kubikzoll Masse haben soll?

Seine Grundfläche müsste sein $= \frac{V}{h} = \frac{1}{10}$ (□Zoll) = 0,1 □Zoll. Zu 1 Zehntel Grad der Inhaltsskala zeigt aber die *K*-Spalte nahe auf $3\frac{1}{2}$ Zehntel (Zoll); da dies jedoch nicht scharf genug, nehmen wir lieber den Inhalt 100fach (die Stärke also 10fach) und finden bei $0,1 \times 100 = 10$ der Inhaltsskala deutlich den Durchmesser 3,57, also, da dies 10fach ist, $d = 0,357$ Zoll

2. Beispiel. Ein Landwirth will einen Getreidefeimen in Form eines Cylinders aufsetzen, der nicht höher als 20 Fuss werden und dabei 60 Schock Garben à 200 Kubikfuss fassen soll. Mit welchem Radius muss er die Grundfläche abstecken?

Inhalt $V = 60 \cdot 200 = 12000$ Kubikfuss; Grundfläche $g = \frac{V}{h} = \frac{12000}{20} = 600$ □Fuss, welche Flächenzahl allerdings die Inhaltsskala überschreitet. Wir erinnern uns aber (S. 248), dass die 100mal kleinere Fläche einem 10mal kleineren Durchmesser entspricht; suchen also statt 600 nur 6,00 □Fuss in der Inhaltsskala, finden dazu in der *K*-Spalte netto $2\frac{3}{4}$ oder 2,75 Fuss, welche verzehnfacht 27,5 als Durchmesser dieses Feimens, also $13\frac{3}{4}$ Fuss als Radius geben.

§. 263. **Walzen.** (c. Berechnung der unbekannten Länge).

Aus $V = g \cdot h$ folgt $h = \frac{V}{g}$ oder die

Regel: Dividire den Körperinhalt durch die nach *Kr.*- oder *K*-Spalte gesuchte Grundfläche.

Beispiel. Um das Astholz des Baumes speciell zu kubiren oder auch um dessen specifisches Gewicht zu finden, will man ein regelmässiges cylindrisches Probestück aussuchen und wiegen, welches immer genau $1/_{10}$ Kubikfuss enthalten soll, und sich zu dem Zwecke ein Hülfstäfelchen anfertigen, das für jede vorkommende Stärke die zugehörende Länge eines Probestücks à 0,1 Kubikfuss angiebt. Welche Längenzahl müsste in diesem Täfelchen bei 3,4 Zoll Stärke (Decimalmaass) zu stehen kommen?

Die Grundfläche g ist nach *K*-Spalte beim Striche 3,4 = 9,1 □Zoll oder 0,091 □Fuss; daher die Länge

$$= \frac{0{,}1 \text{ Kbkf.}}{0{,}091 \,\square\text{Fuss}} = 1{,}099 \text{ Fuss.}$$

§. 264. **Das Cylindroid oder der Cylinder mit elliptischer Grundfläche.** Fig. 272.

1) Ist d der kleinste, D der grösste Durchmesser, h die Höhe, so ist $V = (\text{Kreis } d)\ \frac{D}{d} \times h$ oder $= (\text{Kreis } D)\ \frac{d}{D} \times h$; in Worten: Suche die Kreisfläche der einen Hauptachse der Ellipse, proportionire sie nach dem Verhältnisse beider Achsen und multiplicire mit der Höhe.

2) Das schiefe Cylindroid, Fig. 273, ist oft nur ein gerader, schief abgeschnittener Cylinder, in welchem Falle der Normalquerschnitt IK ein Kreis; dann findet sich natürlich der Inhalt schneller:

V = dem Normalquerschnitt $\times$ Achsen- oder Seitenlänge.

1. Beispiel. Ein prismatischer, 4 Fuss tiefer Bottich mit elliptischer Grundfläche, Fig. 272, hatte die grösste Weite $AB = 8{,}4$ Fuss und die kleinste $CD = 6{,}0$ Fuss preuss. Maass; also wie viel Quart Inhalt?

Auflösung. Den Kreis von 8,4 Durchmesser giebt die K-Spalte zu 55,4 □Fuss; diesen mit $\frac{6{,}0}{8{,}4}$ oder $^5/_7$ verkleinert, die Ellipsenfläche 39,57 □Fuss; also $V = 39{,}57 \times 4 = 158{,}28$ Kubikfuss und zwar, nach der m-Tabelle à 27 Quart, also $V = 158{,}28 \times 27 = 4273\frac{1}{2}$ Quart.

Fig. 272.

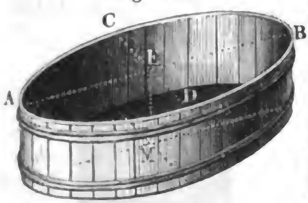
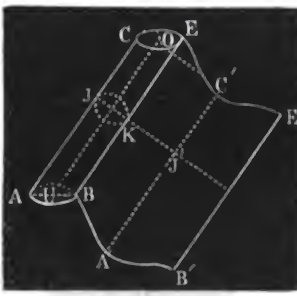


Fig. 273.



2. Beispiel. Das schief aber mit parallelen Endflächen CE und AB abgeschnittene sonst cylindrische Aststück, Fig. 273, hat 4,2 Zoll Stärke und 2 Fuss Seitenlänge Decimalmaass. Man soll seinen Inhalt nach Kubikfussen angeben:

Zu 4,2 Zoll der K-Spalte gehört die Kreisfläche 0,139 □Fuss, also ist $V = 0{,}139 \times 2 = 0{,}278$ Kubikfuss.

Achtzehntes Kapitel.

Die pyramidalen Vollkörper.

---

§. 265. Das Wesentlichste von der Gesetzmässigkeit dieser Raumgestalt ist auf S. 313 u. f. aufgeführt.

Die gemeine pyramidalische Körperform, Fig. 274 und 275, mit der des Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe verglichen, das wir das Grundprisma nennen wollen, ist, wie jedes stereometrische Lehrbuch beweist, $\frac{1}{3}$ oder $33\frac{1}{3}$ Procent des letzteren Wird dies

Fig. 274.

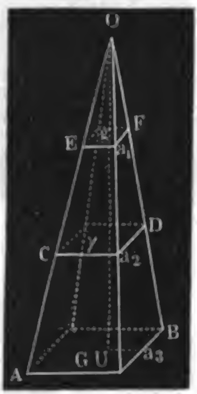
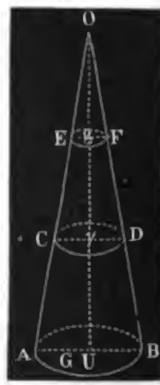


Fig. 275.



Verhältniss der pyramidalen Form zu der ihrer Grundfläche und Länge entsprechenden prismatischen (dem Grundprisma) mit dem Namen Formzahl belegt, so hat man:

1) Die Formzahl des gemeinen pyramidalen Vollkörpers ist $= \frac{1}{3}$, als Decimalbruch ausgedrückt $= 0{,}333$, als Procentsatz ausgedrückt $= 33\frac{1}{3}$.

Wenn man das Grundprisma auf den dritten Theil seiner Höhe reducirt, so wird es also der Pyramide an Inhalt gleich. Diese reducirte Höhe heisse die **Formhöhe** und man hat dann:

2) **Die Formhöhe pyramidaler Körper ist $= \frac{1}{3}$ der Scheitelhöhe.**

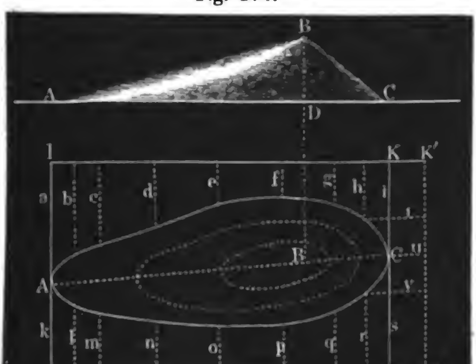
Zusatz. Die Formhöhe jedes Körpers ist = Scheitelhöhe $\times$ Formzahl. Demgemäss ist die

§. 266. **Allgemeine Kubirungsregel für gemeine pyramidale Vollkörper: Multiplicire die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe, oder das Drittel der Grundfläche mit der ganzen Höhe;** in Buchstaben: (1) $V = \frac{1}{3}\, g h$, woraus auch, im Falle man d. Grundfläche suchte: (2) $g = \frac{3V}{h}$, oder

» » » » Höhe » (3) $h = \frac{3V}{g}$.

1. **Beispiel.** Die Masse eines Berges mit geradliniger Abböschung zu finden.

Fig. 276.

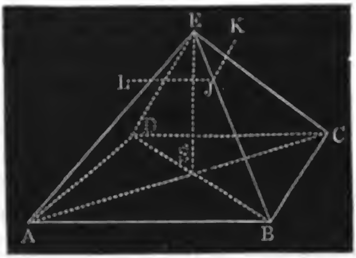


Auflösung. Miss mit dem Knechte die Höhe BD. (Kapitel 13) und die Grundfläche g (Kapitel 14);

jene sei 24 Meter, diese 350 □Meter, also Inhalt $350 \times \frac{24}{3} = 350 \,.\, 8 = 2800$ Kubikmeter oder Stere.

2. Beispiel. Wie hoch müsste man den Mittelpunktpfahl ES einer in Form eines quadratischen Spitzdaches von 20 Fuss Grundlinie aufzurüstenden Miethe, Fig. 277, machen, wenn dieselbe 500 sächsiche Scheffel fassen soll?

Fig. 277.



Da nach der m - Tabelle des Knechts 1 sächsicher Scheffel $= \frac{32}{7}$ Kubikfuss, folgt das nöthige Volumen $= 500 \,.\, \frac{32}{7} = 2286$ Kubikfuss, und da $g = 20 \times 20 = 400$ □Fuss, folgt nach Formel (2) $h = \frac{3V}{g} = \frac{6858}{400} = 17{,}15$ Fuss hoch.

§. 267. Der gemeine Vollkegel AOB, Fig. 278

Fig. 278.

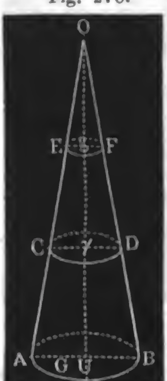
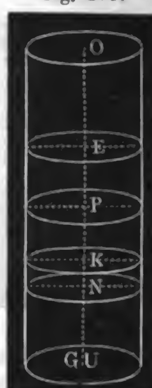


Fig. 279.



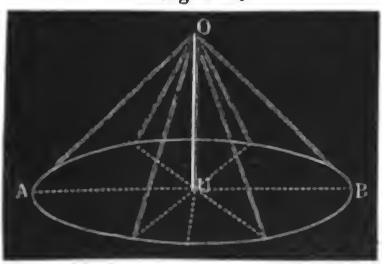
(und Fig. 275 S. 340), als specieller Fall der Pyramide, ist natürlich ebenfalls $= \frac{1}{3}$ seiner Grundwalze Fig. 279; seine Formhöhe (UK) also ebenfalls gleich dem dritten Theile seiner Scheitelhöhe, und es folgt daraus als

1te Kubirungsregel: Suche in der *Kr.*- oder *K*-Spalte die Grundfläche und multiplicire sie mit dem dritten Theile der Höhe, oder ihr Drittel mit der ganzen Höhe.

Die Formeln (1) $V = \frac{1}{3}\ Gh$, (2) $G = \frac{3\ V}{h}$ und (3) $h = \frac{3\ V}{G}$ des vorigen Paragraphen gelten ganz unverändert.

1. Beispiel. Ueber einem kreisförmigen Rundtheile *AB*, Fig. 280, von 16 Fuss Durchmesser soll ein Dach, das 300 preussische Scheffel fasst, aufgestellt werden. Wie hoch muss der Achsenpfahl werden, da nach Tabelle *m* der preussische Scheffel $= \frac{16}{9}$ Kubikfuss?

Fig. 280.



Die Formel (3) sagt: Die Höhe ist = dem 3fachen Inhalt dividirt durch die Grundfläche. Nun ist jene $= 3 \times 300 \times \frac{16}{9} = 1600$ Kubikfuss, und diese (siehe den Strich 16 der *K*-Spalte) = 201,1 □Fuss, folglich $OU = \frac{1600}{201,1} = 7,95$ Fuss.

2. Beispiel. Der Stamm *ABO*, Fig. 281 a. f. S., hat eine krumme Achsenlänge von 36 Fussen. Die Durchmesserstärken *EF*, *CD*, *AB* nehmen genau wie ihre

Fig. 281.



Spitzenlängen Og, $O\gamma$, OG zu. Er ist also ein krummgebogener gemeiner Kegel, und demgemäss, wenn seine Grundstärke 5,6 Zoll ist, sein Inhalt?

Für Decimalmaass: Kreis von 5,6 Zoll nach K-Spalte $=$ 0,246 □Fuss; Formhöhe $= \frac{36}{3} = 12$; Inhalt $= 0{,}246 \times 12 = 2{,}952$ Kubikfuss.

Für Duodecimalmaass: $Kr_{5,6} = 0{,}171$ □Fuss; also $V = 0{,}171 \times 12 = 2{,}052$ Kubikfuss.

§. 268. **Der gemeine Vollkegel** (Fortsetzung).

Des Kegels mittlere Stärke δ ist halb so gross als die Grundstärke $\left(= \frac{d}{2}\right)$; ihre Walze also $^1/_4$ so gross als die Grundwalze. Nun ist aber der Kegel $= {}^1/_3 = {}^4/_{12}$ derselben; jene Mittelwalze aber $^1/_4 = {}^3/_{12}$ derselben. Und daraus folgt die

2te Kubirungsregel: Berechne den Kegel als Walze des mittleren Durchmessers und vermehre dieselbe um ihr Drittel.

In Ermangelung eines besonderen Werthes zeigt diese Regel wenigstens, welchen Fehler man begeht, wenn man gemeine Vollkegel, z. B. gestreckte Stangenhölzer, aus dem mittleren (hier = dem geglichenen) Durchmesser kubirt.

Zusatz. Da übrigens der Kegel = Grundflächendrittel $\times$ Achsenlänge = Grundflächensechstel $\times$ 2facher Achsenlänge, so folgt als

3te Kubirungsregel: Multiplicire die mittels der Sextantenspalte (Sx oder S) entnommene Grundfläche mit der doppelten Achsenlänge.

§. 269. Zu Theilungen des Kegels auf directem Wege in gleiche oder verhältnissmässige, oder in Theile von gefordertem Inhalte gewährt der Knecht ebenfalls wesentliche Erleichterungen, wie der mit der Geometrie etwas Vertraute leicht finden wird. In der Wirklichkeit wird man aber in der Regel besser thun, die Theilung auf dem Wege des Versuches zu bewirken, indem man die Sectionen erst nach dem Augenmaasse bestimmt, sie dann nach Vorschrift kubirt, zu der vorfindlichen Differenz, als cylindrische Scheibe betrachtet, nach S. 388 die Länge sucht und diese noch davon oder dazu nimmt.

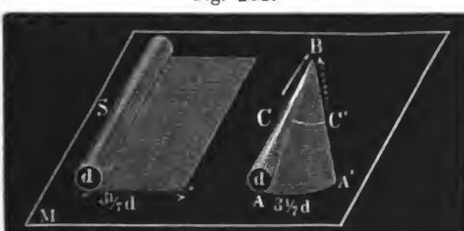
§. 270. Des geraden Kegels Mantelfläche (ABA') ist ein Sector, dessen Radius = der Kegelseite $s(=AB)$ und dessen Bogenlänge = des Kegels Grundumfang ist; darum seine Flächengrösse (S 253):

$$ABA' = M = \frac{\text{Grundumfang} \times \text{Seite}}{2} = \frac{22}{7}\,\frac{d.s}{2}$$

$$= \frac{11}{7}\,d.s \text{ oder:}$$

Multiplicire das Produkt aus Grundstärke und Seite mit $\frac{11}{7}$.

Fig. 282.



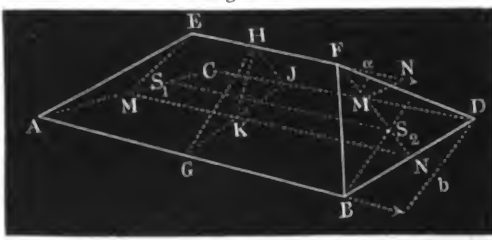
Beispiel. Ein kegelförmiger Stamm von $d = 2$ Fuss Grundstärke und $s = 30$ Fuss Seitenlänge hat an äusserer Rindenfläche: $\frac{11}{7} \cdot 2 \cdot 30 = 94\frac{2}{7}$ □Fuss.

Neunzehntes Kapitel.

Die abgestutzten prismatischen und pyramidalischen Körper.

§. 271. Das dreikantige schief abgeschnittene Prisma (das Walmdach).

Fig. 283.



Nach der gewöhnlichen Anschauungsweise als Prisma würden die parallelen Kanten *AB*, *CD* und *EF* als Seitenkanten, die von ihnen gebildeten Trapeze als Seitenflächen, die Dreiecke *ACE* und *BFD* als antiparallele Grundflächen anzusehen sein. Es ist aber natürlicher, diese oft vorkommende Gestalt als eine dachförmige zu bezeichnen, gleichviel ob sie wirklich ein Dach mit vier Dachflächen (Walmdach, Fig. 284), oder einen Sandhaufen oder sonst etwas vorstellt. Dann ist und sind

Fig. 284.



das Trapez *ABCD* Fig. 283 die Bodenfläche,
die Trapeze *AF* und *ED* die Lang-Seitenflächen;
die beliebig geneigten Dreiecke *ACE* und *BFD* die Quer-Seitenflächen (Walmflächen).

Bezeichnen nun die Buchstaben l_1, l_2, l_3 die drei Längskanten, *AB*, *CD* und *EF*, von denen die letztere

auch der **First** oder **Rücken** genannt wird, $GJ = b$ die rechtwinklige Breite der Bodenfläche; $\triangle\ GHJ = q$ einen **Normalquerschnitt**, dessen Loth HK (= **Rükkenhöhe**) $= h$ sein möge, und S_1 und S_2 die Schwerpunkte beider Walmflächen, so lässt sich leicht nachweisen, dass die Linie $S_1\ S_2 = s$ die mit den Längskanten parallele Schwerachse (S. 307) und an Grösse $= \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}$, d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der drei Längskanten ist*).

Vermöge des bekannten Satzes der Elementar-Stereometrie hat man aber für das Volumen eines dachförmigen Körpers

die Formel $V = q \times \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}$ oder

1te **Regel**: **Multiplicire den Normalquerschnitt mit dem arithmetischen Mittel der drei Längen.**

Und vermöge obiger Erläuterung die

2te **Regel**: **Multiplicire den Normalquerschnitt mit der Entfernung der Schwerpunkte beider Walmflächen.**

1. **Beispiel**. Wieviel zweispännige Fuhren à 40 sächsische Kubikfuss stecken in dem dachförmig aufgeschaufelten Haufen, Fig. 283, dessen beide Bodenlängen 12 Fuss und 15 Fuss, Bodenbreite 8 Fuss, Rückenlänge 9 Fuss und Rückenhöhe 6 Fuss beträgt?

Querschnitt $q = \frac{8 \times 6}{2} = 24$ □Fuss; Mittellänge

$= \text{Schwerachse} = \frac{12 + 15 + 9}{3} = 12$ Fuss;

$V = 24 \times 12 = 288$ Kubikfuss $= 7\frac{1}{5}$ Fuhren.

Zusatz. Oft hält es schwer, dem Normalquerschnitte direct beizukommen. Dann kann man denselben genau oder annähernd aus der Grösse einer Walmfläche, z. B. aus $BFD = g$ wie folgt ableiten: Ermittele oder schätze nach S. 299 den Neigungswinkel α einer Längskante gegen die Fläche g. Dann ist $90 - \alpha$ der Nei-

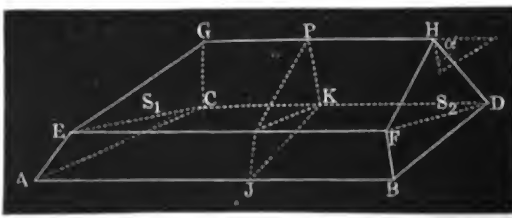
*) Siehe Tharander Jahrbuch 1852.

gungswinkel der Walmfläche g gegen den Normalquerschnitt (S. 298), letzterer ist aber die Projection derselben, also nach Kapitel $q = g\ cos.\ (90 - \alpha)$ oder $= g\ sin.\ \alpha$, woraus $v = g \times s \times sin.\ \alpha$, d. h.

3te Regel: Multiplicire eine der schiefen Querflächen mit der Schwerachse $S_1\ S_2$ und mit dem Sinus des Neigungswinkels α einer Längskante gegen die fragliche Querfläche.

§. 272. Das vierkantige schief abgeschnittene Prisma (Fig. 285) (dessen Querflächen und Normalquerschnitte Trapezoiden sind, wenn nicht die Deckfläche EH der Bodenfläche parallel ist) kann zwar durch Zerlegung

Fig. 285.



in 2 dreikantige ganz nach Vorschrift des vorigen Paragraphen kubirt werden; für's praktische Leben empfiehlt der Knecht aber folgende Methoden: *)

1) Ermittele die Fläche des Normalquerschnitts $IP = q$, desgleichen die Schwerpunkte S_1 u. S_2 der beiden Quer-Seitenflächen (S. 308) und multiplicire deren Entfernung s (die Schwerachse) mit q.

Zusatz. Wenn die directe Ermittelung des Normalquerschnitts q Schwierigkeiten hat, so kann sie indirect also geschehen: Quadrire eine der Querflächen, z. B. $BH = g$, beobachte nach 1) Kap. 16 den Neigungswinkel α einer der Parallelkanten zu ihr und multiplicire sie mit dem Sinus dieses Winkels. — Oder: Miss und schätze den Winkel, unter welchem die Querseitenfläche g gegen den Normal-

*) Siehe Tharander Jahrbuch 1852.

querschnitt geneigt ist, und multiplicire seinen Cosinus mit jener Fläche (S. 300).

Beispiel. Stellt die Fig. 285 einen parallel- und vierkantigen, sonst aber unregelmässigen Haufen vor, und ist die Entfernung $S_1 S_2$ der nach S. 308 eingeschätzten Schwerpunkte $= 20$ Fuss; die Fläche $AG = 30$ □Fuss, und ihr ebenfalls geschätzter Neigungswinkel zum Normalquerschnitte $= 25^\circ$, so ist das Volumen

$$V = 20 \times 30 \times \cos. 25^\circ,$$

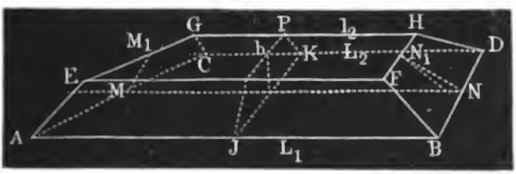
und da letzteren die *COS.*-Skala zu 0,90 angiebt:

$$V = 600 \times 0{,}9 = 540 \text{ Kubikfuss.}$$

§. 273. Der vorige Körper in grösserer Regelmässigkeit

1) Ist die Deckfläche *EH* parallel zur Bodenfläche *AD*, so wird der Normalquerschnitt $IP = q$ und

Fig. 286.



überhaupt auch jede Aussenfläche ein Trapez. Und bedeutet *B* die Breite der Boden-, *b* der Deckfläche und *h* den lothrechten Abstand beider (die Höhe dieses abgestumpften Daches), so ist nicht nur die Ermittelung von *q* bedeutend vereinfacht [nämlich $q = \frac{1}{2}(B + b)\,h$], sondern auch die der Schwerachse *s*, indem S_1 und S_2 in der Linie MM_1 und NN_1 liegt, die durch die Mitte der beiden Grundseiten jeder Querseitenfläche gezogen wird

2) Soll das parallel abgestumpfte Dach nicht mittels der Schwerachse, sondern mittels seiner Längskanten berechnet werden, und es bezeichnet wieder *B* die Breite der Boden-, *b* die der Deckfläche; *h* die Höhe der letzteren; L_1, L_2 die beiden Längskanten der Boden-, und

l_1, l_2 die der Deckfläche, so hat man (mittels Zerlegung in dreiseitige Prismen):

$$V = [B(L_1 + L_2 + l_2) + b(l_1 + l_2 + L_1)]\frac{h}{6} \text{ oder auch}$$

$$V = B \, . \, \frac{\frac{L_1 + L_2 + l_1}{3} + b\,\frac{l_1 + l_2 + L_2}{3}}{2}\, h$$

oder in Worten:

a) Die beiden Grundlängen und eine Oberlänge addirt und mit der Grundbreite multiplicirt; dann die beiden Oberlängen und die der vorigen Oberlänge opponirte Grundlänge addirt und mit der Oberbreite multiplicirt, die Summe beider Produkte mit dem sechsten Theile der Höhe (oder das Sechstel dieser Summe mit der ganzen Höhe) multiplicirt; oder so:

b) Suche das arithmetische Mittel aus beiden Grundlängen und einer Oberlänge und multiplicire es mit der Grundbreite; desgleichen das arithmetische Mittel aus beiden Oberlängen und die der vorher gewählten Oberlänge gegenüber liegende Grundlänge und multiplicire es mit der Oberbreite; und das arithmetische Mittel dieser beiden Produkte multiplicire mit der Höhe.

Beispiel. Auf einem würtembergischen Schüttboden findet sich ein Getreidehaufen in der gewöhnlichen Form des abgestumpften Daches, dessen Unter- und Oberlängen zwar gleichlaufend aber verschieden lang sind, die unteren 21 und 18, die oberen 17 und 15 Fuss, während die Bodenbreite 10, die Deckbreite 7 Fuss und die Höhe 3 Fuss beträgt. Wieviel Scheffel enthält derselbe, da des Knechtes Maasstafel den Kubikfuss $= \frac{2}{15}$ Scheffel angiebt?

$B = 10$; $b = 7$; $L_1 = 21$, $L_2 = 18$; $l_1 = 17$, $l_2 = 15$; $h = 3$.

Die beiden Grundlängen und eine Oberlänge (l_2)

geben zusammen $21 + 18 + 15 = 54$ u. $\times 10 = 540$.

Die beiden Oberlängen und die zu l_2 opponirte Grundlänge L_1 geben zusammen . . . . $17 + 15 + 21 = 53$ u. $\times\ 7 = \underline{371}$.

$$911$$

Und $911 \times \frac{h}{6} = 911 \times \frac{1}{2} = 456\frac{1}{2}$ Kubikfuss.

Oder:

Die beiden Grundlängen L_1, L_2 und die Oberlänge l_1 $= 56$ u. $\times\ 10 = 560$.

Die beiden Oberlängen l_1 l_2 und

die Grundlänge L_2 . . . . . $= 50$ u. $\times\ 7 = \underline{350}$,

$$910$$

welche Differenz gegen 911 einem kleinen Messungsfehler zuzuschreiben, so dass $V = 456$ Kubikfuss $= 456 \times \frac{2}{15} = 60\frac{4}{5}$ Scheffel.

§. 274. Fortsetzung.

Ist das abgestumpfte Dach so regelmässig, dass die Grund- und Deckfläche rechteckig geformt ist und l die obere Länge $(= l_1 = l_2)$ und L die untere $(= L_1 = L_2)$ bedeutet, so vereinfacht sich die vorige Formel in die folgende leicht verständliche:

$$V = [B\,(2L + l) + b\,(2l + L)]\,\frac{h}{6}.$$

Beispiel. Ein in rechteckiger Grund- und Deckfläche aufgeschaufelter Kornhaufen hat unten 20 Fuss Länge und 12 Fuss Breite, und oben 16 Fuss Länge und 9 Fuss Breite bei 2 Fuss Höhe; wieviel Wiener Metzen sind darin, wenn die Fusse österreichisches Maass bedeuten?

$$V = [12\,(40 + 16) + 9\,(32 + 20)]\ \tfrac{2}{6} = (672 + 468)\ \tfrac{1}{3}$$
$$= \frac{1140}{3} = 380 \text{ Kubikfuss.}$$

Oder nach Regel (b):

$$\frac{20+20+16}{3} = 18\tfrac{2}{3} \times 12 = 224 \qquad \frac{16+16+20}{3} = 17\tfrac{1}{3};\ \times 9 = 156$$

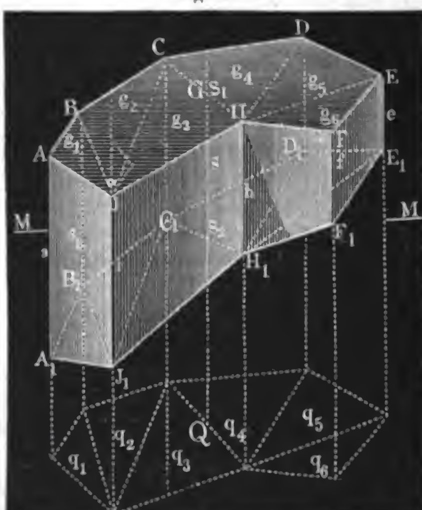
$$\text{und } \frac{224+156}{2} = 190 \times 2 = 380 \text{ Kubikfuss.}$$

Nun ist nach des Knechtes *m*-Tafel 1 Kubikfuss $= 0{,}513$ Metzen, also 380 Kubikfuss $= 380 \times 0{,}513$ $= 194{,}94$ Wiener Metzen.

§. 275. **Der vielkantige Prismenstutz.**

Die eine der Grundflächen, welche messbar ist, z. B. AE, sei $= G$, ihr Neigungswinkel gegen die Seitenkanten HH_1, AA_1 u. s. w. $= \alpha$ (messbar nach 1) Kap. 16); ihr Nei-

Fig. 287.



gungswinkel gegen den Normalquerschnitt $Q = \beta$ (messbar nach 2) Kap. 16 oder auch $\beta = 90^\circ - \alpha$ nach S. 298);

S_1 ihr Schwerpunkt (bestimm- oder schätzbar nach S. 308) und S die parallel zu den Seitenkanten durch ihn gelegte, bis zur anderen Grundfläche reichende Schwerachse $S_1 S_2$. Endlich sollen g_1, g_2, g_3 die durch Diagonalisirung der gedachten messbaren Grundfläche G entstehenden Dreiecksflächen und q_1, q_2, q_3 deren korrespondirende (Projectionen) des Normalquerschnittes, ferner a, b, c, d u. s. w. die den Punkten A, B, C, D u. s. w. zugehörenden prismatischen Seitenkanten AA', BB' CC' u. s. w., sowie s_1, s_2, s_3 die den einzelnen dreikantigen Prismen g_1, g_2, g_3 entsprechenden Schwerachsen bedeuten; dann können wir, wie sich nachweisen lässt*), das Volumen dieses Körpers nach folgenden Methoden auffinden, die wir nun gleich in der Formelsprache ausdrücken wollen:

$$1 \begin{cases} V = Q \times S \text{ oder} \\ V = G \times S \times \cos.\beta \text{ oder } = G \times S \times \sin.\alpha \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} V = q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 s + q_4 s_4 \ldots \\ V = (g_1 s_1 + g_2 s_2 + g_3 s_3 + g_4 s_4 \ldots) \times \cos.\beta \text{ oder} \times \sin.\alpha \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} V = \tfrac{1}{3} \begin{cases} a \times (\text{alle anstossenden Dreiecke des Normalquerschnitts} \ldots = q_1) \\ b \times (\text{» » » »} = q_1 + q_2) \\ c \times (\text{» » » »} = q_2 + q_3 + q_4) \\ d \times (\text{» » » »} = q_4 + q_5) \end{cases} \end{cases}$$

und so fort alle Kanten durch und dann summirt.

Oder auch, wenn man die Projectionen q durch $g \cos.\beta$ oder $g \sin.\alpha$ ausdrückt, nach ganz gleichem Gesetze:

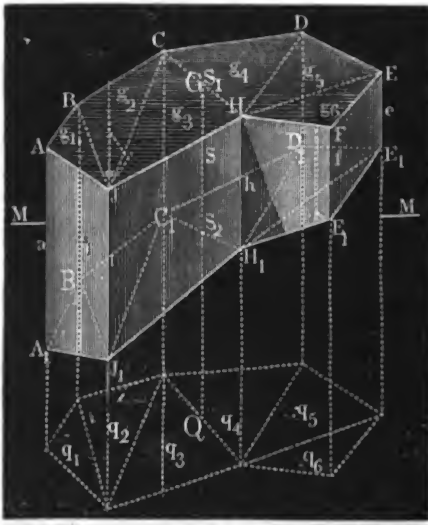
$$V = \tfrac{1}{3}\,[a \cdot g_1 + b\,(g_1 + g_2) + c\,(g_2 + g_3 + g_4) + d\,(g_4 + g_5) + e\,(g_5 + g_6) + f\,(g_6) + h\,(g_3 + g_4 + g_5 + g_6) + i\,(g_1 + g_2 + g_3)] \times \cos.\beta \text{ oder } \times \sin.\alpha.$$

1. Beispiel. AE, Fig. 288 a. f. S., stelle die Oberfläche eines nach der gezeichneten Abgrenzung abzubauenden Lehm-, Thon- oder Steinlagers oder dergl.

*) S. Tharander Jahrbuch 1852. S. 151 u. s. w.

vor, welche, an der unteren Partie einer Bergleithe gelegen, nach einer nach Kapitel 11 bewirkten Messknechtsbeobachtung eine Neigung von 24° gegen die Horizontale besitzt. Der Abbau soll in senkrechten

Fig. 288.



Wänden bis zur Horizontalsoole *MM* bewirkt, vorher aber behufs des Verkaufs dieses Abbaues derselbe nach Ellen kubirt werden Man begnügte sich zunächst damit, die schiefe Oberfläche durch Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen und mittels des Messknechts als Winkelkopf diese Dreiecke auszumessen und zu berechnen, dann nach S. 308 den Schwerpunkt S_1 einzuschätzen und mittels des Knechts als Niveau seine Höhe über der Basis M (die Schwerachse S) zu beobachten. Wenn nun diese Messungen $g_1 = 10$, $g_2 = 30$, $g_3 = 40$, $g_4 = 50$, $g_5 = 25$, $g_6 = 15$, also $G = 170$ □Ellen und $S = 114$ Zoll $= 4^3/_4$ Ellen ergab, wie gross wäre hiernach die abzubauende Masse?

Da der Normalquerschnitt hier die Horizontale ist, so ist auch die beobachtete Elevation 24° der fragliche Winkel β der Formel, und also nach Formel (1) $V = GS \cos \beta = 170 \times 4^3/_4 \times \cos. 24^\circ$, und da letzteren des Knechtes *Cos.*-Spalte = 0,91 giebt:

$$V = 170 \times \frac{19}{4} \times 0{,}91 = 735 \text{ Kubikellen.}$$

2. Beispiel. Es wurde aber wünschenswerth, der eben behandelten Schätzung eine genauere Ermittelung nachfolgen zu lassen, weshalb von jedem Dreiecke der Schwerpunkt aufgesucht (S. 307) und mittels Nivellirens durch den Knecht deren Höhen über der Soole ermittelt wurden, wonach sich ergab: $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, $s_3 = 5$, $s_4 = 6$, $s_5 = 5^1/_2$, $s_6 = 7$ Ellen. Wie gross ist also das wirkliche Volumen?

Nach Formel (2)

$V = (g_1\ s + g_2\ s_2\ .\ .\ .) \cos. \beta = [10\ .\ 2 + 30\ .\ 3 + 40\ .\ 5 + 50\ .\ 6 + 25\ .\ 5^1/_2 + 15\ .\ 7] \cos. 24^\circ = [20 + 90 + 120 + 300 + 137^1/_2 + 105]\ 0{,}91 = 852{,}5 \times 0{,}91 = 776$ Kubikellen.

§. 276. Das vielkantige Prisma mit unebenen Grundflächen.

In Anbetracht der vorhergegangenen Lehren wird der Denkende sich wohl von selbst schon die Regel geben:

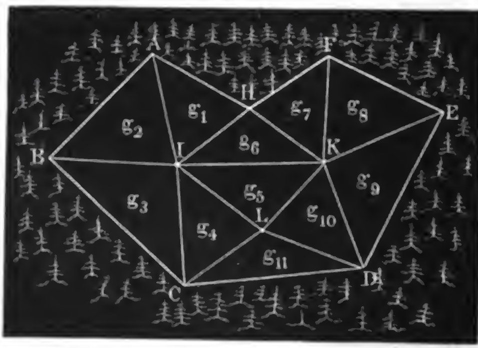
Triangulire die zugängliche Grundfläche *BE* Fig. 289 dafern nöthig, durch Annahme von Innenpunkten (*I* u. *K*) dergestalt, dass alle Dreiecke und deren Gegenflächen auf der entgegengesetzten Basis hinlänglich als eben zu betrachten sind, und verfahre nun nach den Regeln (2) oder (3) des vorigen Paragraphen.

Am besten wird es sein, die Regel (2) in Anwendung zu bringen. Wäre die zugängliche Grundfläche eben und rechtwinklig zu den Seitenkanten, dann repräsentirte dieselbe gleich den Normalquerschnitt und ergäbe sofort die Grössen q_1, q_2 u. s. w. Ist sie aber uneben, so hat man entweder für jedes Dreieck g_1, g_2 den Neigungswinkel β_1, β_2 . . . (nach Kap 11) zu suchen, oder aber nach Kap. 12

den mittleren Cosinuswinkel β zu finden und damit ganz nach Vorschrift (2) oder (3) des vorigen Paragraphen zu verfahren.

Beispiel. Fig. 289 ist der Plan der ziemlich horizontalen Oberfläche eines abgegrenzten Torflagers, das behufs einer rationellen Kubirung triangulirt und am Schwerpunkte jedes Dreiecks (S. 307) mittels

Fig. 289.



Bohrung oder Einschlagens auf seine Mächtigkeit untersucht worden ist. Wenn man nun gefunden hat im

Dreiecke	g_1	die Fläche	25	□Ellen	u. die Mächtigkeit		5	Ellen
»	g_2	»	30	»	»	»	7	»
»	g_3	»	55	»	»	»	6	»
»	g_4	»	90	»	»	»	12	»
»	g_5	»	80	»	»	»	15	»
»	g_6	»	64	»	»	»	10	»
»	g_7	»	25	»	»	»	6	»
»	g_8	»	20	»	»	»	3	»
»	g_9	»	60	»	»	»	4	»
»	g_{10}	»	70	»	»	»	11	»
»	g_{11}	»	50	»	»	»	4	»

so muss sein der Inhalt $= 25 \,.\, 5 + 30 \,.\, 7 + 55 \,.\, 6 + 90 \,.\, 12 + 80 \,.\, 15 +$ etc. $= 5005$ Kubikellen.

§. 277. **Der Cylinder- und Cylindroidenstutz, Fig. 290.**

Das arithmetische Mittel zweier einander diametral entgegengesetzten Seitenlängen l_1 und l_2 ist hier immer gleich der Achsenlänge s und wenn q den Normalquerschnitt bedeutet:

$$V = q \cdot s = \frac{1}{2} q \cdot (l_1 + l_2).$$

Ist die Neigung der Achse gegen die eine Grundfläche $g = \alpha$, die des Normalquerschnittes gegen diese Fläche $= \beta$, also $\beta = 90 - \alpha$ (s. S. 298), so ist

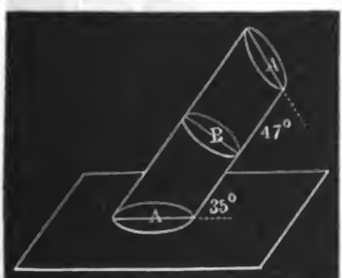
$$q = g \cos. \beta = g \sin. \alpha \text{ und } g = \frac{q}{\sin. \alpha} = \frac{q}{\cos. \beta}.$$

Ist nun der Stutz entstanden:

1) aus einem geraden Cylinder, dann ist q ein Kreis und sein Durchmesser d des Cylinders Stärke; g aber und g_1 sind Ellipsen; entstand er dagegen:
2) aus einem schiefen Cylinder, und ist die eine kreisförmige Grundfläche g noch vorhanden, so kann der, hier elliptische, Normalquerschnitt q statt besonderer Berechnung auch nach obiger Gleichung aus g abgeleitet werden.

Beispiel. Fig. 290 sei ein Baumstück von 16 Zoll Stärke und 7 Fuss kleinster und 9 Fuss grösster Länge; also von wie viel Kubikfuss Inhalt?

Fig. 290.



Ist es Duodecimalmaass, so giebt der Knecht nach der *Kr.*-Spalte die Kreisfläche zu 16 Zoll = 1,396 □F., also $V = 1,396 \times \frac{7 + 9}{2} = 11,168$ Kubikfuss.

Ist es Decimalmaass, so giebt die Rückseite des Knechts nach der *K*-Spalte zu 16 Zoll $q = 2,012$ □Fuss, $V = 2,012 \times 8 = 16,096$ Kubikfuss.

§. 278. **Der Pyramidenstutz oder Obelisk**, Fig. 291 und 292.

Das Karakteristische dieser Form ist, dass alle Seitenkanten nach einem Punkte hin konvergiren. Es ist daher unrichtig, wenn man, wie im praktischen Leben nicht selten geschieht, das abgestutzte Dach (Fig. 293 oder 294) ohne Weiteres als Obelisk betrachtet und berechnet; da nur ausnahmsweise seine 4 Seitenkanten einen gemeinschaftlichen Konvergenzpunkt haben werden. Im Falle die obere Grundfläche g der unteren G nicht parallel, ist die genaue Kubirung schwierig, mindestens sehr umständlich, und geschieht am einfachsten noch dadurch, dass man die Ergänzungslänge CO, Fig. 292, und deren Loth $CI = CO . sin. \alpha$, sucht, und die beiden Vollpyramiden ACB und

Fig. 291.

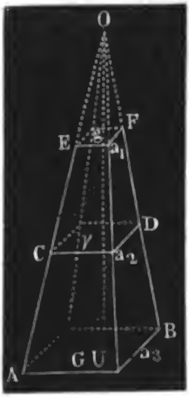


Fig. 292.



DCE berechnet. Sind die Grundflächen viereckig und zwei Seiten der unteren und zwei der oberen unter und gegen einander parallel, wie in Fig. 291 und Fig. 294, so kann man auch die Kubirungsweise des prismatischen Stutzes anwenden (§. 272). In vielen Fällen wird es aber ausreichen, die antiparallele obere Grundfläche nach dem Augenmaasse parallel gegen die untere auszugleichen und

den schiefen Stutz in einen parallelen zu verwandeln; ein solcher Stutz mit parallelen Grundflächen ist immer gemeint, wenn vom Obelisk oder Pyramiden- oder Kegelstutz kurzweg die Rede ist.

Fig. 293.

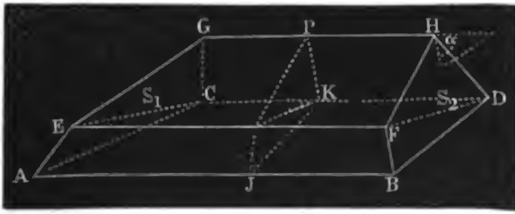
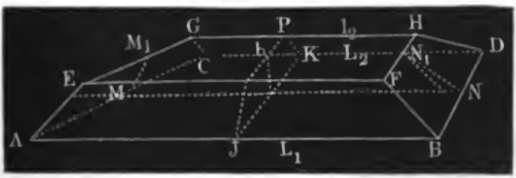


Fig. 294.



§. 279. Fortsetzung (Kubirung des Obelisken).

Was nun dieses Obelisken Volumen anlangt, so ist, wenn G die untere, g die obere Grundfläche und h den senkrechten Abstand (des Obelisken Höhe) bedeutet, in allen Lehrbüchern der Stereometrie zu finden, dass

$$(1)\ V = \frac{(G + g + \sqrt{Gg})}{3} h, \text{ d. h.}$$

Um einen Obelisk mathematisch genau zu kubiren, berechne 1) die untere Grundfläche, 2) die obere, 3) die Quadratwurzel aus dem Produkte beider, und multiplicire das arithmetische Mittel dieser 3 Grössen mit der Höhe des Stumpfes.

Wollte man statt des arithmetischen Mittels $\frac{G + g + \sqrt{Gg}}{3}$ nur das arithmetische Mittel beider Grund-

flächen $\frac{G+g}{2}$ nehmen (welche man auch die geglichene nennt), so würde man den Inhalt zu gross bekommen (s. folg. Kapitel). Und würde man statt dessen die Grundfläche der faktischen Mitte, die eigentlich mittlere γ nehmen, so würde $\gamma \times h$ das Volumen zu klein ergeben.

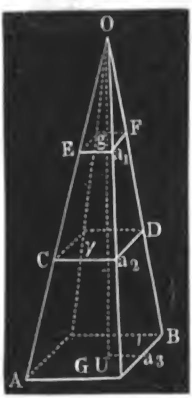
Vollkommen genau erhält man des Pyramidenstumpfs Inhalt aber auch nach der Regel

(2) $V = \frac{G + 4\gamma + g}{6} h$, oder in Worten:

Multiplicire die Höhe h des Stumpfes mit dem arithmetischen Mittel aus den beiden End- und vier mittleren Grundflächen.

[Der Beweis dieses wenig gekannten Satzes ist am leichtesten zu führen, wenn man γ durch G und g ausdrückt, was gar leicht geht, da G, γ und g und überhaupt alle parallelen Querschnitte pyramidaler Körper ähnliche Figuren sind. Das so gefundene γ in Formel (2) eingesetzt, verwandelt diese in Formel (1).]

Fig. 295.



Die in der Regel etwas umständliche Berechnung aller 3 Grundflächen ist aber nicht einmal nöthig. Bezeichnet nämlich A irgend eine Dimension, etwa eine Seite der unteren Grundfläche und a und α die gleichliegende Seite der oberen und mittleren, so hat man aus $G : g = A^2 : a^2$ und $G : \gamma = A^2 : \alpha^2$ und weil $\alpha = \frac{A+a}{2}$ ist, auch

(3) $V = \frac{1}{6} [A^2 + a^2 + (A+a)^2] \frac{G}{A^2} \times h$ oder auch

$\frac{1}{6} [A^2 + a^2 + (A+a)^2] \frac{g}{a^2} \times h$, d. h.:

Nimm eine beliebige Dimension der einen Grundfläche (A), ebenso die gleichliegende der anderen (a) und die Summe beider (oder, was dasselbe ist, die gleichliegende Seite der Mittelfläche doppelt.) Multiplicire jede dieser 3 Zahlen mit sich selbst; die Summe dieser 3 Quadrate mit einer der beiden Grundflächen dividirt durch das Quadrat ihrer fraglichen Dimension, und endlich mit der Sechstel-Höhe des Obelisken.

Sind die Stärkengrössen (A, a und G) in 12mal kleinerem Maasse gemessen als Höhe und Inhalt (z. B. in Duodecimalzollen, wenn letzterer in Fussen ausgedrückt werden soll), so ist es in der Regel vortheilhafter, die Rechnung ohne Weiteres mit diesen Zahlen bis zur Multiplication mit der Höhe auszuführen, dies Resultat (□Zolle) mittels der *Pr.*-Skala des Knechts (in □Fusse) zu verwandeln und dann erst mit h zu multipliciren.

Zusatz. Dass der viereckige Pyramidenstumpf, wenn 2 obere und 2 untere Grundseiten mit einander parallel gehen, eben so gut als abgestumpftes Dach (S. 348) berechnet werden kann, nicht aber umgekehrt jedes abgestumpfte Dach als viereckiger Pyramidenstutz, ist früher schon bemerkt.

§. 280. Beispiele.

1. Beispiel. Eine obeliskenförmige Steinsäule zu kubiren, die zur Basis 250 □Zolle, zur Höhe 20 Fuss und in gleichnamiger Seite in beiden Grundflächen 10 und 7 Zoll maass?

$$A = 10;\ a = 7;\ G = 250;\ h = 20$$

$$A^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$a^2 = 7 \times 7 = 49$$

$$(A+a)^2 = 17 \times 17 = \underline{289}$$

$$438;$$

ferner: $\frac{G}{A^2} = \frac{250}{100} =$ und $438 \times \frac{250}{100} = 1095$ □Zoll,

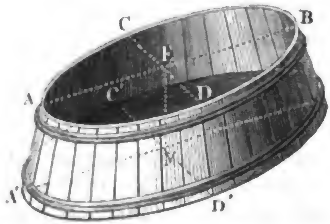
welche mittels der *Pr.*-Spalte des Knechtes in

□Fusse verwandelt 7,6 □Fuss geben (nämlich 109,5 □Zoll nahe 0,76 □Fuss), so dass

$$V = \frac{1}{6} \times 7{,}6 \times 20 = 25\tfrac{1}{3} \text{ Kubikfuss.}$$

2. Beispiel. In einer Brennerei Sachsens stand ein Bottich mit elliptischen Grundflächen und konisch zulaufenden Seiten. Der grösste Durchmesser der oberen Grundfläche war 8 Fuss, der kleinste 5 Fuss 1 Zoll = 61 Zoll; der grösste untere 100 Zoll = $8\frac{1}{3}$ Fuss, die lothrechte Tiefe $2\frac{5}{12}$ Fuss; Alles in preussischem Maasse gemessen. Wie hoch berechnet sich sein Inhalt nach preussischen Quarten und sächsischen Kannen?

Fig. 296.



Gegeben $a = 8$, $A = 8\frac{1}{3}$; $A + a = 16\frac{1}{3}$; g = Ellipse von 96 und 61 Zoll Achse.

Berechnung der Fläche $ACBD = g$ (S. 2. Buch. Ellipse). Zu 9,6 giebt des Knechtes *Kr.*-Spalte die Kreisfläche

50,2 □Fuss, also $g = 50{,}2 \times \frac{61}{96}$ □Fuss = 31,9 □Fuss.

Berechnung der Klammergrösse $A^2 + a^2 + (A + a)^2$.

$$\begin{aligned} A^2 &= 8\tfrac{1}{3} \times 8\tfrac{1}{3} = 69\tfrac{4}{9} \;\square\text{Fuss} \\ a^2 &= 8 \times 8 = 64 \;\text{»} \\ (A+a)^2 &= 16\tfrac{1}{3} \times 16\tfrac{1}{3} = \underline{266\tfrac{7}{9}} \;\text{»} \\ & \qquad\qquad\qquad 400\tfrac{2}{9} \;\text{»} \\ & \qquad\qquad\quad = 400{,}22 \;\square\text{ Fuss.} \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{6}\left(A^2 + a^2 + (A + a)^2\right) \cdot \frac{g}{a^2} \cdot h =$$

$$\frac{1}{6} \times 400{,}22 \times \frac{31{,}9}{64} \times \frac{29}{12} = 80\tfrac{1}{2} \text{ preuss. Kubikfuss circa.}$$

Um dies Volumen in Quarten auszudrücken, sagt uns des Knechtes Maasstafel *m*: 1 Kubikfuss preuss. = 27 Quart,

$$\text{also } 80^{1}/_{2} \times 27 = 2173 \text{ preuss. Quart.}$$

Und um dasselbe auch in sächsischen Kannen auszudrücken, lesen wir in der *f*-Tabelle, dass 87 Quart $= 107$ Kannen, oder 1 Quart $= \frac{107}{87}$ Kannen, also

$$2173 \text{ Quart} = 2173 \times \frac{107}{87} = 2672 \text{ Kannen.}$$

1. **Zusatz.** Hätte man die Dimensionen geglichen und dann das Gefäss als Cylindroid berechnet, würde man nur 1985 Quart oder etwas über 2400 Dresdener Kannen erhalten haben.

2. **Zusatz.** An dem Mantel dieses Gefässes stand der geaichte Inhalt mit 2845 Dresdener Kannen angeschrieben, woraus hervorging, dass seine Form nicht genau elliptisch-konisch sein konnte. Soll die Berechnung von dergleichen Formen ganz zuverlässige Resultate geben, so muss man die Grundfläche nach der Simpson'schen Regel (s. Flächenquadrirung) quadriren.

§. 281. **Der Kegelstumpf oder parallel zur Grundfläche abgeschnittene gemeine Kegel.**

Fig. 297.



Für diese wichtige, im technischen Leben häufig vorkommende Körperform geben die mathematischen Lehrbücher bekanntlich und gemäss Formel (1) der S. 359 die Kubirungsregel:

$$(1)\quad V = \frac{\pi}{12}\,(D^2 + d^2 + Dd)\,h \text{ oder}$$

$$= 0{,}262\,(D^2 + d^2 + Dd)\,h,$$

wo h die Achsenlänge und D und d die beiden Endstärken (Durchmesser) bedeuten.

Für die Rechnungspraxis kann man diese unbequeme Formel umgestalten in:

(2) $V = \frac{\pi}{48} [3 (D + d)^2 + (D - d)^2]\, h = 0{,}0654$
$[3 (D + d)^2 + (D - d)^2]\, h.$

In beiden Formeln kommt, wenn D und d in Duodecimalzollen gegeben und h und V nach Fussen ausgedrückt sein soll, noch der Divisor 144 hinzu.

Formel (1) gestaltet sich aber leicht um in

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 h + \frac{1}{12} \cdot \frac{\pi}{4} (D - d)^2 h \text{ oder}$$

$$= [\text{Kreis von } \frac{D + d}{2} + \frac{1}{12} \text{ Kreis v. } (D - d)]\, h.$$

Man kann also jeden Kegelstumpf auch als Walze berechnen, deren Stärke die mittlere, oder, was beim gemeinen Kegel dasselbe, die geglichene Stärke des Stumpfes ist; muss aber zu diesem Resultate noch das Zwölftel einer gleichlangen Walze addiren, deren Stärke gleich der Differenz der beiden Endstärken ist. Für die Benutzung des Messknechtes gestaltet sich diese Regel am besten so:

(3) Suche mittels der *Kr.*- oder *K*-Spalte die Kreisfläche zum mittleren oder geglichenen Durchmesser; ebenso zur Differenz der beiden Enddurchmesser; dividire die letztere gleich beim Ablesen durch 12, addire diese Grösse zur ersteren und multiplicire diese Summe mit der Achsenlänge.

1. Beispiel. Einen abgewipfelten ganz geradseitigen Stamm von 40 Fuss Länge und 8 Zoll oberer und 30 Zoll unterer Stärke nach Regel (3) zu kubiren:

Auflösung 1. Wenn die Zahlen Duodecimalmaass bedeuten, hat man

Kreisfläche von 19 Zoll	= 1,969	also $V = 2{,}189 \times 40$
1/12 » » 22 »	= 0,220	= 87,56 Kubikf.
	2,189	

2. Wenn es Decimalmaass war:

K_{19}	= 2,835	also $V = 3{,}152 \times 40 = 126{,}08$ Kbkf.
$\frac{1}{12} K_{22}$	= 0,317	
	3,152	

Eine noch viel bequemere Kubirungsregel leitet der Knecht aber aus der Formel (2) der Seite 360 ab, indem sich dieselbe für den Kegelstumpf verwandelt in

$$V = \frac{\text{Kreisfl. v. } d + \text{Kreisfl. v. } D + \text{Kreisfl. v. } (D + d)}{6} h$$

und, weil mittels der Sx.- und S-Spalten die Kreissechstel ohne Weiteres sich ergeben, in die Messknechtsregel:

(4) **Suche mittels der Sx.- oder S-Spalte die Inhaltszahlen (Kreissextanten) zur oberen, unteren und vereinigten oberen und unteren Stärke, und multiplicire deren Summe mit der Achsenlänge.**

2. Beispiel. Obigen Stamm im Beispiel 1 nach Regel (4) zu kubiren.

Auflösung 1. Für Duodecimalmaass:

$$\left.\begin{array}{l} Sx_8 = 0{,}058 \\ Sx_{30} = 0{,}818 \\ Sx_{38} = \underline{1{,}313} \\ \qquad\quad 2{,}189 \end{array}\right\} \text{ und } 2{,}189 \times 40 = 87{,}56.$$

2. Für Decimalmaass:

$$\left.\begin{array}{l} S_8 = 0{,}084 \\ S_{30} = 1{,}178 \\ S_{38} = \underline{1{,}890} \\ \qquad\quad 3{,}152 \end{array}\right\} \text{ und } 3{,}152 \times 40 = 126{,}08.$$

(5) NB. Bezeichnet G^1 die Querfläche bei $^1/_3$ der Höhe, so ist des Kegelstumpfes Inhalt auch $= \frac{3\,G^1 + g}{4} h$.

Fig. 298.



§. 282. **Weitere Beispiele über Kubirung und Theilung des Kegelstumpfs.**

1. Beispiel. Wie viel Quart fasst der beistehende Bottich, dessen oberer Durchmesser 2,5 Fuss, unterer 3,5 Fuss, und Tiefe 5 Fuss beträgt?

Die S-Spalte der Rückseite giebt zu

2,5 den Inhalt	0,82 □Fuss			also $V = 7{,}12 \times 5$
3,5 » »	1,60 »			$= 35{,}6$ Kubikfuss,
6,0 » »	4,7 »			
	7,12			

und, da die Maasstafel 1 Kubikfuss $=$ 27 Quart lehrt, so $V = 35{,}6 \times 27 = 961{,}2$ Quart.

2. Beispiel. Wie tief muss man ein Gefäss machen, das in Form eines Kegelstumpfs bei 5 Fuss oberer und 4 Fuss Bodenweite 60 Kubikfuss halten soll? Die Tiefe heisse x Fusse, so ist nach der zehntheiligen Kubirungstafel:

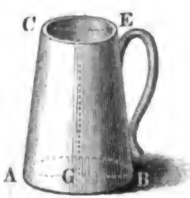
$$S_4 = 2{,}1$$
$$S_5 = 3{,}3$$
$$S_9 = 10{,}6$$

16,0, und nun muss sein:

$$16 \times x = 60 \text{ Kubikfuss},$$
$$\text{also } x = \frac{60}{16} = 3^3/_4 \text{ Fuss.}$$

3. Beispiel. Ein gemüthlicher Baierisch-Bier Trinker in Sachsen fand sein Krüglein, Fig. 299, doch gar zu niedlich aus des Schöpfers Hand hervorgegangen. Sein Messknechtserfahrener Nachbar belehrte ihn jedoch, dass laut m-Tabelle die sächsische Kanne 72,2 Kubikzolle, das »Töpflein« also 36,1 dergleichen enthalten müsse, und fand sofort mit einem Zollstabe des Glases obere Weite $=$ 2,8 Zoll und Tiefe $=$ 5,1 Zoll, und mittels eines eingepassten Holzstückchens die

Fig. 299.



lichte Bodenweite = 3 Zoll messend, und sonach des Töpfleins Fassungsraum zu?

$$S_{2,10} = 1,02$$
$$S_{3,10} = 1,18$$
$$S_{5,10} = 4,4$$
$$\overline{6,60} \times 5,1 = 33,6$$ Kubikzoll, also, ungerechnet den Schaum, um 2,4 Kubikzoll zu klein.

4. Beispiel. Ein 60 Fuss langer Stamm von 5 Decimalzoll oberem und 15 Decimalzoll unterem Durchmesser und geraden Seiten (also gemeiner Kegelform) soll durch Quertheilung in drei Stücke von gleichem Inhalte zerlegt werden: wie lang jedes?

Inhalt des ganzen Stammes (0,033 + 0,294 + 0,523) 60 = 51,0 Kubikfuss, demnach jedes Stück = 17,0 Kubikfuss.

Nehmen wir versuchsweise das erste obere Stück 30 Fuss lang, wobei es 10 Zoll untere Stärke bekommt, und berechnen seinen Inhalt, so erhalten wir (0,033 + 0,131 + 0,294) 30 = 13,74 Kubikfuss, es fehlen also noch 17,0 — 13,7 = 3,3 Kubikfuss. — Nehmen wir deshalb noch 6 Fuss dazu, so haben wir dann ein Spitzenstück von 5 Zoll oberem, 11 Zoll unterem Durchmesser und 36 Fuss Länge, dess Inhalt = (0,033 + 0,158 + 0,335) 36 = 18,9 Kubikfuss. Was jetzt zuviel ist (18,9 — 17,0 = 1,9 Kubikfuss), ist zu betrachten als eine cylindrische Scheibe von 11 Zoll Durchmesser und 1,9 Kubikfuss Inhalt, deren Dicke sich leicht findet durch $\frac{1,9}{\text{Kreis v. 11'' Durchm.}}$ $= \frac{1,9}{0,95} = 2$ Fuss, so dass das erste Theilstück 36 — 2 = 34 Fuss lang würde. — Um den zweiten Sägeschnitt zu finden, thut man am besten, den ersten zu ignoriren, und auf demselben Wege, den Abschnitt eines 2 × 17,0 Kubikfuss haltenden Spitzenstücks zu berechnen.

Zusatz. Würde man obigen Stamm als Walze mit geglichenem Durchmesser $\frac{5+15}{2} = 10$ Zoll oder 1 Fuss berechnen, so würde man statt 51,0 Kubikfuss erhalten haben, da die *K*-Spalte bei 10 auf 0,785 zeigt, $0{,}785 \times 60 = 47{,}1$ Kubikfuss; also fast 4 Kubikfuss zu wenig.

Zwanzigstes Kapitel.

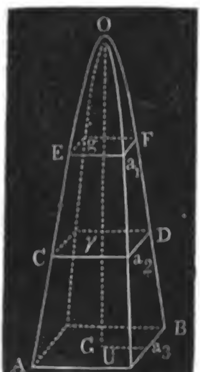
Die parabolisch ausgebauchten Vollkörper und Stutze.

---

§. 283. **Die parabolisch ausgebauchte Pyramidenform im Allgemeinen.**

Ist *G* die Grundfläche, *g* ein oberer, γ ein mittlerer zur Grundfläche paralleler Querschnitt, und denkt man sich vom Scheitel *O* eine unendlich kleine, der Basis *G* aber ähnliche Erzeugungsfläche, gleichsam das Embryo von *g* oder γ oder *G*, parallel mit sich so fortrücken (dass alle ihre Dimensionen sich vergrössern in dem Verhältnisse, wie die Quadratwurzeln aus den Entfernungen vom Scheitel sich vergrössern, oder was dasselbe ist) dass, während ihre Gestalt dieselbe bleibt, ihre Grösse einfach wie ihre Entfernungen vom Scheitel *O* zunimmt, so erhalten, wie schon S. 316 erläutert wurde, die Seitenkanten die Krümmung einer (Apollonischen) Parabel.

Fig. 300.



Wären z. B. die Abstände, *G* von γ, γ von *g* und *g* von *O* gleich, so ist γ doppelt so weit vom Scheitel entfernt als *g*, d. h. die Oberhöhe von *g* verhält sich zur

Oberhöhe von γ wie 1 zu 2, also auch $g : \gamma = 1 : 2$ oder $\gamma = 2g$; ferner ebenso $g : G = 1 : 3$ und $G = 3g$ und $\frac{g+G}{2} = \frac{g+3g}{2} = 2g$ also $= \gamma$, d. h. das arithmetische Mittel zweier Querflächen ist gleich der Querfläche ihrer Mitte; eine Regel, die für alle parabolisch ausgebauchte Körper, sie mögen voll oder abgestutzt sein, gilt.

Daraus folgt auch, dass bei jeder parabolisch ausgebauchten Vollpyramide die Querfläche der Mitte genau halb so gross als die Basis (weil für $\gamma = \frac{G+g}{2}$, beim Vollkörper $g = 0$) und jede Dimension (α) der Mitte $^7/_{10}$ (richtiger 0,71 oder 71 Procent) so gross als die gleichnamige (A) der Basis ist (indem $A : \alpha = \sqrt{G} : \sqrt{g} = \sqrt{1} : \sqrt{^1/_2} = 1 : 0{,}707$). Bei $^1/_4$ der Länge von der Basis an, d. h. bei $^1/_4$ Unterhöhe sind die Dimensionen 0,87 so gross als die der Basis. Und bei $^3/_4$ der Länge, oder $^1/_4$ Oberhöhe = 0,50 oder die Hälfte der Grundstärke.

Um sich zu versichern, ob die Ausbauchung eines in der Wirklichkeit vorkommenden Körpers parabolisch ist, kann man denselben daher auf diese Eigenschaften untersuchen.

Z. B. Wenn ein Stamm von 20 Zoll Grunddurchmesser als ein Parabelkegel angesehen werden soll, welche Stärke muss er dann in der Mitte und in der Mitte jeder Hälfte, d. h. welchen Durchmesser muss er bei $^1/_4$, $^2/_4$ und $^3/_4$ seiner Länge haben?

Bei $^1/_4$ Unterhöhe $= 20 \times 0{,}87 = 17{,}4$ Zoll.
In der Mitte: $= 20 \times 0{,}71 = 14{,}2$ Zoll reichlich.
In der Mitte der oberen Hälfte oder bei $^3/_4$ Unterhöhe $= \frac{20}{2} = 10$ Zoll.

§. 284. Die parabolisch ausgebauchte Vollpyramide.

(G die Basis, γ die ihr parallele Mittelfläche, h die Höhe.)

Zerlegt man durch parallel zur Grundfläche geführte Schnitte den Körper in ganz dünne Scheiben und betrachtet diese als Prismen, und berechnet deren Inhalt, so findet man: dass deren Summe um so mehr dem Werthe $\frac{1}{2} . G . h$ gleich kommt, je dünner sie sind, woraus denn folgt, dass dies Product die wahre Grösse des Volumens sein muss. Man hat also, da $\frac{1}{2}\ G$ auch $= \gamma$ ist:

(1) $V = \frac{1}{2} . G . h$, d. h. = dem halben Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe; oder

(2) $V = \gamma . h$, d. h. = dem Prisma der mittleren Stärkenfläche, und sonach

(3) die Formzahl $f = \frac{1}{2}$ oder 0,50 und die Formhöhe $= \frac{h}{2}$, und weil Basis $\times$ Formhöhe immer den Inhalt giebt, die

Kubirungsregel: Multiplicire die Grundfläche mit der halben Höhe.

§. 285. Der parabolisch ausgebauchte Vollkegel (das Apollonische Paraboloid).

Aus dem vorigen Paragraph folgt unmittelbar: Das Paraboloid ist genau gleich der Hälfte seiner Grundwalze, oder auch gleich seiner Mittelstärken-Walze; und der Messknecht leitet daraus ab die Kubirungsregeln:

1) Suche zum Grunddurchmesser mittels der *Kr.*- oder *K*-Spalte die Kreiflsäche und multiplicire sie mit der halben Achsenlänge.

2) Suche zum mittleren Durchmesser die Kreisfläche und multiplicire sie mit der Achsenlänge.

Handelt es sich darum, aus dem gegebenen Inhalt irgend eine Dimension zu finden, so bedenke man, dass $\frac{Gh}{2} = V$, also

3) $G = \frac{2\,V}{h}$ und $h = \frac{2\,V}{G}$ oder, im Falle die mittlere Stärke gesucht wäre, dass $\gamma h = V$, also $\gamma = \frac{V}{h}$.

Zusatz. Die Formzahl des Paraboloids in Bezug auf seine Grundwalze ist also = $1/2$ = 0,50; die Formhöhe also immer gleich der halben Scheitelhöhe.

1. **Beispiel.** Die Fig. 301 bedeute einen parabolisch ausgebauchten Stamm. (Im Falle diese Figur dem Auge des praktischen Forstmannes gegenüber den im Walde vorkommenden Formen nicht gestreckt genug erschiene, darf man sich nur alle Breiten auf die Hälfte oder das Drittel verkleinert denken. Dass man dabei ein Paraboloid behält ist S. 257, erläutert worden.) Die Länge ist 60 Fuss, die Grundstärke $19\frac{1}{2}$ Decimalzolle; also sein Inhalt?

Fig. 301.



Die *K*-Spalte sagt bei $19\frac{1}{2}$ = 2,986 □Fuss, und da die Formhöhe = 30, V = 2,986 $\times$ 30 = 89,58 Kubikfuss.

2. **Beispiel.** Der vorige Stamm, in der Mitte gemessen, zeigte eine Stärke von 13,8 Zoll (Decimalmaass); und es ist nach dieser Messung bei 60 Fuss Länge sein Inhalt?

Die *K*-Spalte zeigt bei 13,8 den Kreisinhalt = 1,496 also V = 1,496 $\times$ 60 = 89,76.

3. **Beispiel.** Der parabolisch aufgebaute Feimen, Fig. 302, habe 9′ Grunddurchmesser und 12′ Höhe; also wieviel Inhalt?

Fig. 302.

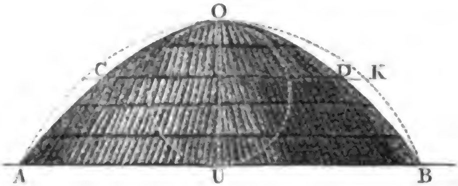


Durch Aufsuchung des Striches 9 in der *K*-Spalte erhält man die Grund-

fläche 63,6, und also das Volumen $V = 63{,}6 \times 6 = 381{,}6$ Kubikfuss.

4. Beispiel. Ein Meiler, in Form eines Paraboloids,

Fig. 303.



hatte 24 Fuss Durchmesser und 11 Fuss Höhe. Wieviel Raumklafter à 108 Kubikfuss fasst er in sich? — Um mittelst der Rückseite zu 24 Fuss die Kreisfläche zu suchen, muss man, da 24 die K-Spalte überschreitet, zum 10mal kleineren Durchmesser 2,4 gehen, und dessen Kreisfläche 4,52 hundertfach nehmen, so dass man hat $V = 452 \times \frac{11}{2}$

$= 2486$ Kubikfuss $= \frac{2486}{108} = 23{,}02$ Klafter. — Oder: Suche den übersteigenden Durchmesser 24 in der S-Spalte und nimm den beistehenden (Sextanten-) Inhalt 6fach; also, da $S_{24} = 75{,}4$ □Fuss, so muss sein

$V = 75{,}4 \times 6 \times {}^{11}/_{2} = 75{,}4 \times 33 = 2488$ Kubikfuss $= 23{,}03$ Klafter.

5. Beispiel. Man soll in einem alten Bestande, dessen Stämme sehr vollholzig (ausgebaucht) und durchschnittlich 60 Fuss hoch sind, einen Stamm von 240 Kubikfuss Masse au suchen. Welche Grundstärke muss derselbe haben?

Nach (3) dieses Paragraphen ist $G = \frac{2\,V}{h} = \frac{480}{60} =$ 8 □Fuss. Diese Kreisfläche 8 □Fuss gehört, wie uns die K-Spalte zeigt, dem Durchmesser 2,3 Fuss

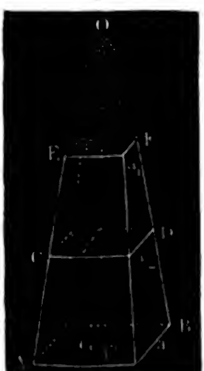
zu; oder, wenn es Duodecimalmaass wäre: $2{,}3 \times 12 = 27{,}6$ Zoll.

6. **Beispiel.** Ein Landwirth hat zur Basis eines zuckerhutförmig aufzubauenden Feimens, Fig. 302 a. S. 371, einen Kreis von 20 Fuss Radius abgesteckt, wünscht aber, ehe er aufzubansen anfängt, zu wissen, wie hoch bei solcher Basis dieser Getreideschober werden würde, wenn er 90 Schock Garben à 200 Kubikfuss in sich aufnehmen soll?

Inhalt $= 90 \times 200 = 18000$ Kubikfuss $= V$; nach Formel (3) ist $h = \frac{2\,V}{G} = \frac{36000}{\text{Basis}}$; diese Basis aber, ein Kreis von 40 Fuss Durchmesser, ist, wenn wir sein Zehntel 4 in der K-Spalte aufsuchen und den zugehörigen Inhalt 12,6 verhundertfachen $= 1260$ □Fuss; so dass $h = \frac{36000}{1260} =$ 20,6 Fuss. — Etwas genauer wird das Resultat, wenn wir uns der S-Spalte bedienen, deren 40 auf 209,4 zeigt und die ganze Kreisfläche $= 209{,}4 \times 6 = 1256{,}4$ bis auf die letzte Ziffer richtig giebt.

§. 286. **Der parabolisch ausgebauchte Pyramidenstutz.**

Fig. 304.



Ist G die untere, g die ihr parallele obere und γ die Grundfläche der Mitte, sowie h die Höhe des Stumpfs, so ist, wie aus S. 369 bekannt, die mittlere Grundfläche auch gleich der geglichenen, d. h. $= \frac{1}{2}\,(G + g)$. Die fehlende und unbekannte Oberhöhe x (über g) lässt sich aber nach dem bekannten Bildungsgesetze dieser Form: $g : G = x : x + h$ (s. S. 368) leicht als $x = \frac{g}{G-g}\,h$ und dann auch die Vollhöhe $x + h = \frac{G}{G-g}\,h$ fin-

den. Kubirt man nun nach S. 370 sowohl die ergänzte als auch die Ergänzungs-Pyramide, so giebt deren Differenz das Volumen des Stutzes in der einfachen Formel:

(1) $V = \frac{1}{2}(G+g)\,h$ oder $= \frac{G+g}{2}h$ oder $= (G+g)\,\frac{h}{2}$,

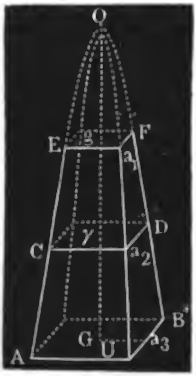
d. h. gleich dem arithmetischen Mittel beider Endflächen multiplicirt mit der Achsenlänge; oder

(2) $V = \gamma\,h$ = dem Produkte aus der mittleren Stärkenfläche und der Achsenlänge.

Die parabolisch ausgebauchten Pyramiden, gleichviel ob voll oder abgestutzt, sind sonach immer gleich einem gleichhohen Prisma der mittleren Grundfläche (die hier mit der geglichenen einerlei ist); während bei den gemeinen (geradseitigen) das aus der Mittelfläche γ berechnete Prisma stets kleiner als der pyramidalische Inhalt ist (für den Kegel bestimmt ausgedrückt in S. 364). Interessant ist es, dass aber dennoch beide Formen in der schon S. 365 angeführten Formel:

$$(3)\ V = \frac{G + 4\gamma + g}{6}\,h$$

Fig. 305.



eine gemeinschaftliche Kubirungsregel besitzen, wovon man sich leicht überzeugen kann, indem man für γ seinen hiesigen Werth $\frac{G+g}{2}$ einsetzt, wo dann $V = \frac{G+g}{2}\,h$ zum Vorschein kommt.

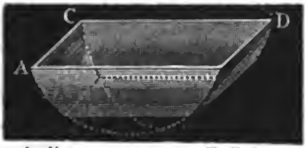
1. Beispiel. Ein parabolisch ausgebauchter Obelisk, Fig. 305, hat in der Mitte eine Querfläche $\gamma = 160$ Duodec □Zoll und eine Höhe von $h = 10$ Fuss; sonach einen Inhalt?

$$V = \gamma \,.\, h;$$

also, wenn man γ mittels der *Pr*-Spalte erst in □Fusse verwandelt: $V = 1{,}112 \times 10 = 11{,}12$ Kubikfuss.

2. Beispiel. Der Trog Fig. 306 habe die Form eines parabolisch ausgebauchten Pyramidenstumpfes mit rechteckigen Grundflächen, von denen die obere in österreichischem Maasse 18 Zoll lang und 9 Zoll breit und die untere 12 Zoll lang und 6 Zoll breit, die Tiefe 2 Fuss beträgt. Wieviel Wiener Maass fasst dies Gefäss?

Fig. 306.



$G = 18 \times 9 = 162$; $g = 12 \times 6 = 72$;

$\frac{G+g}{2} = \frac{162+72}{2} = 114$□″, welche nach der *Pr.*-Spalte in □Fuss verwandelt $= 0{,}795$ □Fuss geben, so dass

$V = 0{,}795 \times 2 = 1{,}59$ Kubikfuss à 22,3 Maass (s. *m*-Tabelle) $= 35{,}5$ Maass.

§. 287. **Der ausgebauchte Kegelstumpf.** (Das abgekürzte Paraboloid.)

Karakterisirt ist diese Form unter Anderem dadurch, dass die mittlere Stärkenfläche immer der halben Summe der beiden Endflächen (s. S. 369), oder auch die mittlere Stärke δ immer

$$\sqrt{\frac{D^2 + d^2}{2}}$$

gleich sein muss, wodurch man sich in der Regel hinlänglich genug überzeugen kann, ob ein vorliegender konoidischer Stumpf der para-

Fig. 307.

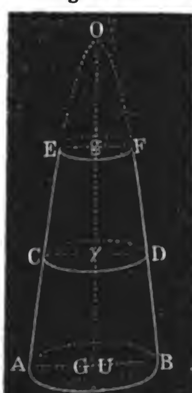


Fig. 308.



boloidischen Form angehört oder nicht. Kubirt wird dieselbe in Folge des im vorigen Paragraphen bereits schon Festgestellten, nach den Regeln:

(1) Suche mittels der *Kr*-. oder *K*-Spalte zur oberen und unteren Stärke die Grundflächen und multiplicire deren Summe mit der halben Höhe, oder deren halbe Summe (arithmetisches Mittel) mit der vollen Höhe oder Achsenlänge.

(2) Suche zur Mittenstärke mittels der *Kr*.- oder *K*-Spalte die Stärkenfläche und multiplicire sie mit der Achsenlänge oder Höhe.

(3) Dass sich V auch durch $\frac{G + 4\gamma + g}{6} h$ ausdrücken lässt, ist schon im Allgemeinen S. 375 bemerkt worden.

(4) Und wenn G^1 die Querfläche bei der Drittelshöhe bedeutet, ist interessanter Weise ebenfalls in Uebereinstimmung mit dem gradäcitigen Stumpfe (s. S. 365.)

$$V = \frac{3\,G^1 + g}{4} h.$$

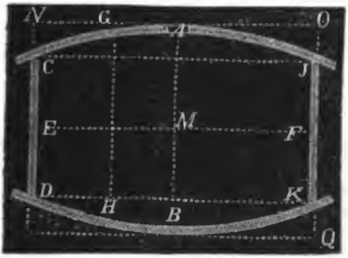
(5) Wenn für einen gegebenen Inhalt V irgend eine der Dimensionen gesucht würde, da $\frac{G + g}{2} \times h = \gamma \times h = V$ ist·
Zur Auffindung der mittleren Stärkenfläche oder dem arithmetischen Mittel beider Endflächen: $\gamma = \frac{G + g}{2}$ $= \frac{V}{h}$ oder: Dividire den Inhalt durch die Länge.
Und zur Auffindung der Länge h:
$h = \frac{V}{\gamma}$, d. h. dividire den Inhalt durch die mittlere Stärkenfläche oder das arithmetische Mittel beider Endflächen.

§. 288. Für zwei gleiche mit den Grundflächen zusammenstossende abgekürzte Paraboloide, wie die Fassräume Fig. 309 und 310 sie darstellen, folgt, wenn D die Spundtiefe, d die Bodenweite, l die ganze Fasslänge bedeutet, der Fassraum der einen Hälfte $=$
$\frac{\text{Kreisfläche } d + \text{Kreisfläche } D}{2} \times \frac{l}{2}$, also beide

Hälften oder der ganze Fassraum

$$= \frac{(\text{Kreisfläche } d + \text{Kreisfläche } D) \times l}{2} = \frac{g+G}{2}\, l$$

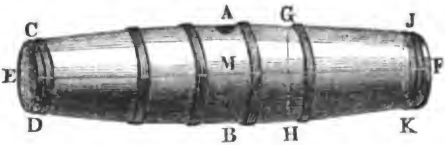
Fig. 309.



= dem arithmetischen Mittel der der Spund- u. Bodenweite entsprechenden Cylinder.

Bezeichnet δ die bei $\frac{1}{4}$ der Fasslänge gemessene Weite GH, so berechnet sich des Fasses Hälfte (nach 2)

Fig. 310.



auch als: $\left(\text{Kreis } \delta \times \frac{l}{2}\right)$; also der ganze Fassinhalt nach der

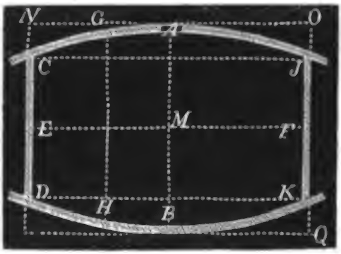
Regel: Kreisfläche bei $\frac{1}{4}$ der Fasslänge gemessen und mit der ganzen Fasslänge multiplicirt.

§. 289. Beispiele.

1. Beispiel. Die Berechnung älterer Fichten- und Tannen- und überhaupt aller Stämme, die seit längerer Zeit ohne Höhenwuchs waren, nach der Formel (2) der parabolisch ausgebauchten Kegel giebt im Durchschnitte die Inhalte nahe richtig; jedenfalls selten einen Fehler bis zu 2 Procent. Wenn nun ein 60 Fuss langer Stamm, der $\frac{1}{2}$ Fuss oberen und $1\frac{1}{2}$ Fuss unteren Durchmesser und parabolische Form hat, als Walze nach dem geglichenen Durchmesser berechnet würde, wie so oft geschieht, um wieviel Kubikfusse wäre die Rechnung falsch?

Es ist der wirkliche Inhalt:
da die *K.*-Spalte bei 0,5 auf 0,20 □Fuss
und » 1,5 » 1,77 □Fuss zeigt,
$= 1{,}97 \cdot \frac{60}{2} = 59{,}1$ Kubikfuss; während, wie Beispiel (4) S. 367 zeigt, als gemeiner Kegelstumpf berechnet, sich der Inhalt zu 51,0 Kubikfuss, und als geglichene Walze berechnet, gar nur zu 47,8 Kubikfuss ergiebt.

Fig. 311.



2. Beispiel. Wieviel Liter (oder Kubikdecimeter) enthält das Fass Fig. 311, dessen Spundtiefe $AB = 10{,}5$ Decimeter, Bodenweite $CD = 9{,}7$ Decimeter und Länge $EF = 22$ Decimeter ist?

Zu 10,5 Decim. giebt die *K*-Spalte 86,6 □Dec.
Zu 9,7 » » » » » 73,9
160,5 × 11 = 1765,5 Liter.

3. Beispiel. Aus achtelligen Brettern soll ein Jauchenfass in etwas ausgebauchter Form nach Fig. 310 a. v. Seite construirt werden, das im Lichten 15 Fuss Länge ($AB = l$) haben und 20 Eimer (à 60 Quart à $\frac{1}{27}$ Kubikfuss) fassen soll. Welche Spund- und Bodenweite muss das Fass erhalten?

Es ist $\frac{G+g}{2}\, l = V$, woraus $(G+g) = \frac{2\,V}{l}$
$= \frac{2 \cdot 20 \cdot 60 \cdot \frac{1}{27}}{15} = \frac{160}{27} = 5{,}92$ □Fuss.

Es sind also die fraglichen Durchmesser so zu wählen, dass die Summe der beiden Kreisflächen 5,92 □Fuss. Man hat nun beliebige Wahl in der Tabelle; nimmt man 3,1 □Fuss für den einen, also 2,82 □Fuss für den anderen, so ergeben sich die fraglichen Durchmesser, wie die *K*-Spalte zeigt, zu 2,0 Fuss und 1,9 Fuss;

nehmen wir aber 2,1 Fuss für die Spundtiefe (dem, wie die Tabelle zeigt, 3,5 □Fuss Fläche entsprechen), so bleiben für die Bodenweite (da für deren Kreis 5,92 — 3,5 = 2,42 □Fuss bleiben) 1,75 Fuss übrig.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die parabolisch eingebauchten pyramidalischen Vollkörper und Stutze.

---

§. 290. Im Allgemeinen.

Es ist schon früher (S. 314) angedeutet worden, dass es vortheilhaft sei, zur Grundkurve der Einbauchung nicht die gewöhnliche oder Appollonische Parabel, sondern deren Evolute oder die Neil'sche (semikubische) Parabel zu nehmen. Nach dem auf Seite 314 über diese Kurve Mitgetheilten kann man sich eine dergleichen Pyramide als Rückungskörper (s. S. 311) entstanden denken, wobei das von O aus fortrückende Embryo der Grundfläche G, mit Beibehaltung seiner der Basis G gleichen Gestalt, dergestalt an Grösse zunahm, dass diese immer den Würfeln oder dritten Potenzen ihrer Oberhöhen oder Entfernungen vom Scheitel proportional ist.

Wenn daher g die Querfläche bei $\frac{1}{3}$ und γ bei $\frac{2}{3}$ des ganzen Weges oder der ganzen Höhe bedeutet, so verhält sich $g : \gamma = 1^3 : 2^3 = 1 : 8$, d. h. γ ist 8mal grösser als g, und $g : G = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$, also G 27mal grösser als g.

Es ist interessant und nützlich, nochmals zu vergleichen, dass das Wachsen der Erzegungsflächen geschah:

a. bei der parabolisch ausgebauchten Form: proportional den einfachen Entfernungen vom Scheitel;
b. bei der gemeinen geradseitigen Form: proportional den zweiten Potenzen oder Quadraten der Scheitelentfernungen;
c. bei der parabolisch eingebauchten Form. proportional den dritten Potenzen oder Würfeln der Scheitelentfernungen.

Theilt man ein dergleichen eingebauchtes Pyramidoid vom Scheitel ab in gleich lange Sectionen, so verhalten sich deren Durchschnittsflächen oder die Quadrate ihrer

Fig. 313.

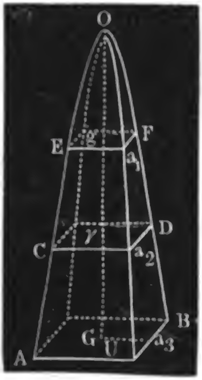


Fig. 314.

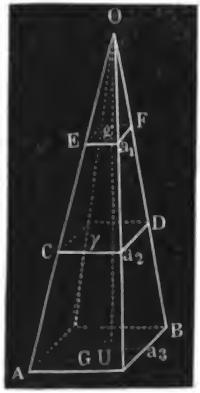


Fig 315.

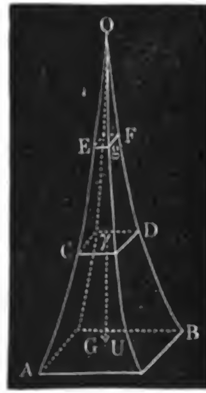


Fig. 316.

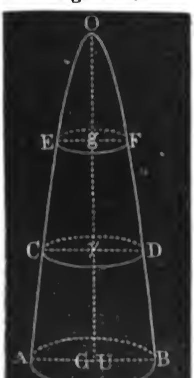


Fig. 317.

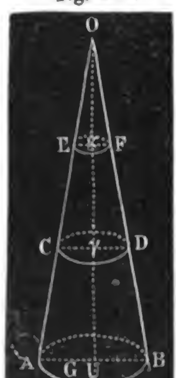
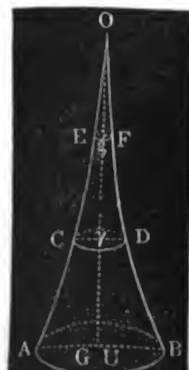


Fig. 318.



Stärken wie die Würfel der natürlichen Zahlen, d. h. wie 1, 8, 27, 64. 125, während sie bei der gemeinen Pyramide wie die Quadrate derselben· 1, 4, 9, 16, 25, und bei der

parabolisch ausgebauchten wie die natürlichen Zahlen selber, also wie 1, 2, 3, 4, 5 fortschreiten.

Auch erinnern wir hier noch wieder daran, dass eine proportionirte Vergrösserung oder Verkleinerung der Stärkendimensionen, z. B. der Durchmesser, immer wieder ein Neil'sches Pyramidoid giebt.

In Folge obiger Gesetze ist auch die mittlere Stärkenfläche γ bei jeder eingebauchten Vollpyramide immer $= \frac{1}{8} G$, oder 8mal kleiner als die Grundfläche; und irgend eine Stärkendimension α der Mitte $= A \sqrt{\frac{1}{8}} =$ 0,3535 A oder reichlich 35 Procent der gleichnamigen Dimension der Basis, oder halb so gross, als die der ausgebauchten Pyramide von derselben Basis und Höhe. Durch diese Eigenschaft lässt sich einigermaassen erkennen, ob ein vorliegender eingebauchter Körper genau oder nur annähernd als Neiloid zu rechnen.

Für die mittlere Stärkenfläche γ des Stutzes zwischen den beiden Grundflächen G und g findet sich hier der Ausdruck $\gamma = \left(\frac{\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g}}{2}\right)^3$; und es ist sonach immer auch $8\gamma = \left(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g}\right)^3$.

Fig. 312.



§. 291. Die eingebauchte Pyramide.

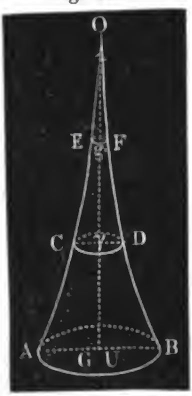
Ist G die Basis und h die Höhe OU und verfährt man ganz so, wie auf S 370 hinsichts der ausgebauchten Pyramide erwähnt wurde, so erhält man durch Addition aller Scheiben einen Ausdruck, der um so näher dem Produkte $\frac{G \times h}{4}$ kommt, je grösser die Anzahl oder je dünner die Dicke der Scheiben ist, so dass der wahre Werth dieses Inhaltes der Körperform in der That gegeben ist durch die einfache Formel:

(1) $V = \frac{1}{4}\, G h$ oder $= G \cdot \frac{h}{4}$, d. h. $\frac{1}{4}$ so gross als das Prisma und halb so gross als die ausgebauchte Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe; oder, da die Mittelstärkenfläche $\gamma = \frac{1}{8}\, G$ ist:

(2) $V = 2 \cdot \gamma \cdot h$ oder: doppelt so gross als das Prisma von der mittleren Grundfläche, und als Regel:

1) **Multiplicire die Grundfläche mit dem vierten Theile der Höhe oder den vierten Theil der Grundfläche mit der ganzen Höhe, oder**

Fig. 319.



2) **Multiplicire die Mittenstärkenfläche mit der doppelten Höhe.**

Die Formzahl der parabolisch eingebauchten pyramidalen Körper ist sonach immer = 0,25, oder im Procentsatze 25; die Formhöhe also stets = $\frac{1}{4}$ der Scheitelhöhe.

§. 292. **Der eingebauchte oder Neil'sche Parabelkegel (das Neiloid*).**

In specieller Anwendung der Sätze der beiden vorigen Paragraphen auf diesen besonderen Fall der eingebauchten Pyramide findet sich leicht als

1) **bemerkenswerthe Eigenschaften der Form:**

Bei $\frac{1}{4}$ der Höhe ist
d. Durchmes. = 0,65 d. unteren; d. Stärkenfl. $\frac{27}{64}$ d. Grundfl.
bei $\frac{1}{2}$ der Höhe:
d. Durchmes. = 0,353 » » ; » » $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ »
bei $\frac{3}{4}$ der Höhe:
d. Durchmes. = $\frac{1}{8}$ » » ; » » $\frac{1}{64}$ d. Grundfl.,

---

*) Ich folge hinsichts der Benennung dieser Kegelform dem Beispiele des Professors Riecke in Hohenheim, der das Konoid der Neil'schen Parabel in die praktische Geometrie unter obigem Namen eingeführt hat.

wonach sich z. B. leicht untersuchen lässt, in wie weit ein vorliegender eingebauchter (hohlschäftiger) Probestamm einem Neiloid nahe steht oder nicht. Ferner muss gelten als

2) Kubirungsregel (gemäss S. 382):

a. Suche in der *Kr.*- oder *K*-Spalte zum Grunddurchmesser die Kreisfläche und multiplicire sie mit dem Viertel der Höhe, oder:

b. Suche in derselben Spalte den mittleren Durchmesser und multiplicire die zugehörige Stärkenfläche mit der doppelten Länge.

Beispiel. Ein hohlschäftiger Stamm von 50 Fuss Länge und 20 Zoll Grundstärke müsste, wenn er neiloidisch wäre, zur Mittenstärke ein reichliches Drittel oder genauer 0,354 der Grundstärke, also 7,1 Zoll haben. Wenn er nun dieser Forderung entspräche, so kubirte sich sein Inhalt demgemäss?

1) Bei Duodecimalmaass:

20 Zoll der *Kr.*-Spalte deuten auf 2,182 □Fuss;

und $V = 2{,}182 \times \frac{50}{4} = 0{,}545 \times 50 = 27{,}25$ Kubikfuss.

2) Bei Decimalmaass:

20 Zoll der *K*-Spalte haben die Kreisfläche 3,142 □Fuss,

und $V = \frac{3{,}142}{4} \cdot 50 = 0{,}785 \times 50 = 39{,}25$ Kubikfuss.

3) Aus der Mitte berechnet, bei knapp 7,1 Decimalzoll Stärke und also, gemäss *K*-Spalte 0,393 □Fuss Stärkenfläche:

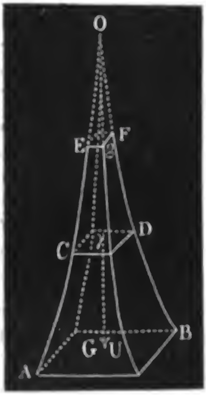
$V = 0{,}393 \times 50 \times 2 = 39{,}3$ Kubikfuss.

§. 293. Der eingebauchte Pyramidenstutz

kann zwar auch aus den beiden Endflächen G und g, Figur 320, und der Höhe h allein kubirt werden, wie dies bei den anderen Pyramidalkörpern der Fall war; allein diese Berechnungsregel ist ih-

rer Umständlichkeit wegen für die gewöhnliche Praxis der Mathematik unbrauchbar. Sie heisst nämlich:

Fig. 320.



$$V = \frac{G + g + \frac{1}{2}(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g})^3}{6} \times h.$$

Setzt man in diese dem Nicht-Algebraiker gewiss erschreckbare Formel statt $(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g})^3$ den Werth, der auf Seite 382 steht, nämlich $= 8\gamma$, so erhalten wir wieder unsere alte Bekannte:

$$V = \frac{G + g + 4\gamma}{6} h,$$

welche sonach als Familienformel aller bisher betrachteter pyramidalen Körper, der vollen (wo $g = 0$) wie ihrer Stutze, erscheint.

Uebersetzt, giebt sie die Kubirungsregel: Multiplicire die Höhe mit dem arithmetischen Mittel aus der unteren, oberen und vier Mitten-Stärkenflächen.

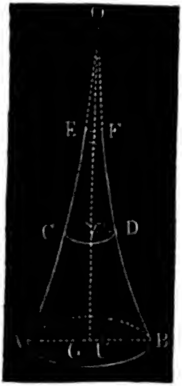
§. 294. Der eingebauchte Kegelstumpf. (Das abgekürzte Neiloid.)

a. Aus den beiden Endstärken.

Wenn man gewiss ist, dass die Einbauchung in Form der Parabelevolute stattfindet, was sich, wenn es darauf ankäme, danach erweisen liesse, dass der mittlere Durchmesser genau dem Werthe $\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{D^2} + \sqrt[3]{d^2}}{2}\right)^3}$ entspräche, so findet sich auch genau der Inhalt nach der Formel $V = \frac{\pi}{16}\left(D^2 + D \sqrt[3]{Dd^2} + d\sqrt[3]{D^2 d} + d^2\right)h$ welche man leicht erhält, wenn man in obige erste des §. 293 statt G und g ihre hiesigen Werthe $\frac{\pi}{4}D^2$ u. $\frac{\pi}{4}d^2$ einsetzt.

Mit dem Knechte wird man indess diese umständliche Formel noch am meisten erleichtern, wenn man gleich nach der allgemeinen

Fig. 321.



$$V = \frac{G + g + \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{g})^3}{6} h$$

rechnet.

Zum Beispiel. Ein unteres, durch Wurzelanlauf concav gewordenes Schaftstück von 1,8′ oberer, und 3,0′ unterer Stärke bei 6 Fuss Länge soll als Neiloid kubirt werden?

Nach der *K*-Spalte hat man

$$V = \left[7{,}1 + 2{,}5\,\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{7{,}1} + \sqrt[3]{2{,}5})^3\right]\frac{6}{6},$$

und weiter daraus

$$V = 9{,}6 + \tfrac{1}{2}\,(1{,}92 + 1{,}36)^3 = 9{,}6 + \tfrac{1}{2}\,.\,3{,}28^3$$
$$= 9{,}6 + 17{,}64 = 27{,}24 \text{ Kubikfuss.}$$

b. Aus den Endstärken d und D und der Mittelstärke δ.

In voriger Kubirungsformel (§. 293) $\frac{g + G + 4\gamma}{6} h$ bedeuten hier g, G und γ Kreisflächen, und 4γ bedeutet die 4fache Kreisfläche des mittleren Durchmessers δ oder, was dasselbe ist, die Kreisfläche des doppelten mittleren Durchmessers ($2\,\delta$) *). Dadurch verwandelt sich jene Formel in

$$V = \left(\frac{\text{Kreis von } d}{6} + \frac{\text{Kreis von } D}{6} + \frac{\text{Kreis von } 2\,\delta}{6}\right) h,$$

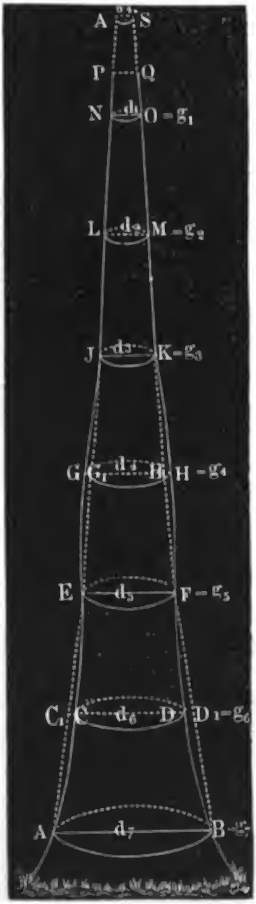
welche, in die Messknechtssprache übersetzt, also lautet:

---

*) Denn die doppelte Stärke entspricht der vierfachen Fläche.

Suche mittels der *Sx.*- oder *S*-Spalte (je nachdem du in Duodec.- oder Decimalmaass arbeitest) zu den beiden End- und zur doppelten Mittelstärke die Inhaltszahlen und multiplicire ihre Summe mit der Höhe des Stumpfes.

Fig. 322.



Beispiel. Ein unteres durch Wurzelanlauf concav gewordenes 8 Fuss langes Schaftstück *ABEF*, Fig. 322, von 18 Zoll oberer, 21 Zoll mittlerer und 30 Zoll unterer Stärke soll als Neiloid kubirt werden.

1. Auflösung für Decimalmaass.

Die Sextanten oder *S*-Spalte der Rückseite giebt zu

18″	d. Inhalt	0,424 □′
30″	»	»	1,178 »
2×21=42″	»	»	2,309 »
			3,911×8

= 31,29 Kubikfuss.

2. Auflösung für Duodecimalmaass. Aehnlichermaassen, wie vorstehend, hat man

$Sx_{18} = 0,294$
$Sx_{30} = 0,819$
$Sx_{42} = 1,603$

2,716×8=21,728 Kubikfuss.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Kugel und ihre Theile.

§. 295. Die Complanation der Vollkugel.

In jedem Lehrbuche der Stereometrie wird bewiesen, dass, wenn d der Durchmesser, dann die ganze Oberfläche der Kugel $= \pi d^2 = 4 \times$ Kreis von d, d. h. genau viermal so gross als ihr grösster Kreis oder die Kreisfläche ihres Durchmessers ist. Daraus folgert der Messknecht für seine Tafel,

um die Oberfläche der Kugel zu finden:

a. Suche zum doppelten Durchmesser mittels der *Kr.*- oder *K*-Spalte die zugehörige Kreisfläche; oder

b. Suche die Kreisfläche zum einfachen Durchmesser und nimm diese vierfach.

1. Beispiel. Ein kugelförmiger zu vergoldender Knopf von $1\frac{1}{2}$ Zoll = 18 Linien Durchmesser hat an Oberfläche?

Zu 18 sagt die *Kr.*-Spalte 1,767 □Zoll; also

$O = 1{,}767 \times 4 = 7{,}068$ □Zoll.

2. Beispiel. Welchen Durchmesser (d) müsste ein sphärischer Ballon erhalten, der 100 □Fuss Oberfläche (O) haben sollte?

$4 \times$ Kreis d = Oberfläche; Kreis $d = \frac{\text{Oberfläche}}{4}$

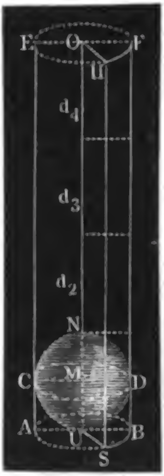
$= \frac{100}{4} = 25.$

Und zum Inhalte 25 □Fuss zeigt die Kreisspalte der Rückseite den Durchmesser 5,64 Fuss.

§. 296. Die Kubirung der Vollkugel.

Wenn man die bekannte Formel $V = \frac{\pi}{6} d^3$ umwandelt in $\frac{1}{6} \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 4\,d = \frac{\text{Kreis von } d}{6} \times 4\,d$, so liegt

Fig. 323.



in dieser Formel der Lehrsatz: Der Kugelinhalt *CD* ist gleich dem Sextanten (oder Sechstel) *USBOHF* einer Walze von demselben Durchmesser und 4mal so grosser Höhe; den der Messknecht in die leichte Regel fasst:

Suche in der *Sx.*- oder *S.*-Spalte zum Kugeldurchmesser die Fläche des Kreissextanten und multiplicire diese mit dem 4fachen Durchmesser (In Symbolen $S_d \times 4\,d$).

1. Beispiel. Wieviel Kubikzolle hält eine Eisenkugel von $6^1/_2$ Zoll Durchmesser? $d = 6^1/_2$; $4\,d = 26$; zu $6^1/_2$ der *S*-Spalte zeigt die Inhalts-Skala 5,5 □″; also $5{,}5 \times 26 = 143$ Kubikzolle.

2. Beispiel. Wieviel Kubiklinien Duodecimalmaass enthält eine Bleikugel, deren Kaliber genau $^1/_2$ Zoll ist?
Da $d = 6$ Linien und nach der *S*-Spalte der Sextant $= 4{,}7$ □Linien, so folgt: $V = 4{,}7 \times 24 = 112{,}8$ Kubiklinien. Wäre das Volumen in Kubikzollen verlangt, so hätte man: Zu 6 Linien zeigt die *Sx.*-Spalte des Duodecimalmaasses den Sextanten $= 0{,}033$ □″; also $V = 0{,}033 \times 2'' = 0{,}066$ Kubikzoll.

3. Beispiel. Welche Länge *l* muss man dem cylindrischen Mittelstücke eines $1^1/_2$ Meter weiten, an beiden Enden hemisphärisch abgerundeten Dampfkessels geben, wenn dessen Raumvermögen 10 Kubikmeter betragen soll?
Die beiden Halbkugeln sind = einer Vollkugel von $1^1/_2$ Meter Durchmesser = Inhaltszahl nach 1,5 der *S*-Spalte $\times\ 4\,d = 0{,}30 \times 6 = 1{,}8$ Kubikmeter; genauer wenn ich nicht 1,5, sondern 15 suche und die Inhaltszahl 29,4 um 2

Fig. 324.



Decimalen verkürze, also 0,294 $\times$ 6 = 1,764 Kubikmeter. Bleibt also für das Cylinderstück 10 — 1,76 = 8,24 Kubikmeter, dessen Länge l =

$$\frac{8{,}24}{\text{Kreisfl. v. } 1\tfrac{1}{2} \text{ Met.}} = \frac{8{,}24}{1{,}77} = 4{,}65 \text{ Meter.}$$

4. Beispiel. Man will in Form einer Halbkugel einen Kessel machen lassen, der netto einen sächs. Eimer oder 72 Kannen fasst. Welche Weite und Tiefe, d. h. welchen Durch- und Halbmesser muss dieser Kessel erhalten?

Nach Kubikfussen wäre gemäss der m-Tabelle sein $V = \frac{72}{23{,}9} = 3{,}007$ Kubikfuss. Dies Volumen muss sein = Sextant von $d \times 2\,d$; man muss also durch Versuche mittels S-Skala dasjenige d suchen, dessen zugehörige Inhaltszahl, mit $2\,d$ multiplicirt, die 3,007 hervorbringt.

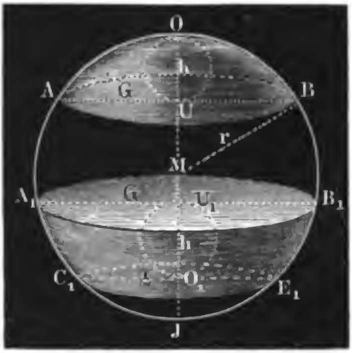
Nehmen wir des Knechts Rückseite, so finden wir bei $2\frac{1}{4}$ Fuss den Sext.-Inhalt 0,68, also den Halbkugel-Inhalt: 0,68 $\times$ $2\frac{1}{4} \cdot 2$ Fuss = 0,68 $\times$ $4\frac{1}{2}$ Fuss = 3,06 Kubikfuss; so dass $2\frac{1}{4}$ Fuss Durchmesser = 2,25 Fuss nahe richtig erschiene. — Genauer jedoch wird die Bestimmung, wenn wir die Ablesung des Sextanten beim 10fachen Durchmesser bewirken, indem $S_{22,5} = 66{,}3$, also $S_{2,25} = 0{,}663$, also $V = 0{,}663 \times 4\frac{1}{2} = 2{,}983$ Kubikfuss, d. h. noch zu klein ist. Dagegen $S_{2,26} = 0{,}669$; $V = 0{,}669 \times 4{,}52 = 3{,}024$ Kubikfuss; woraus dann folgt: Der gesuchte Durchmesser liegt zwischen 2,25 und 2,26 Fuss.

§. 297. Kugelhauben. (Sphärische Haufen und Berge.) Fig. 325 a. f. S.

In jedem Lehrbuche der Stereometrie ist zu finden, dass, wenn h die Höhe OU der Kugelhaube (AOB) und r der Radius der Kugel selber, dann der Körperinhalt dieses Kugelabschnittes $AOB = V = \pi\, h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$ ist. Diese

Formel lässt sich aber sehr bequem für den Messknecht umändern, wenn man ihr r ausdrückt durch den Halbmes-

Fig. 325.



ser UB der Grundfläche G des Segments, wo man dann nach einiger Reduktion erhält: $V = \frac{1}{2} \cdot G\, h + \frac{1}{6}\pi\, h^3 =$ $\frac{\text{Cylinder derselben Grundfl. u. Höhe}}{2} +$ Kugel um h, d. h. ihrem kubischen Inhalte nach ist jede Kugelhaube um die Kugel, die ihre Höhe zum Durchmesser hat, grösser als das Paraboloid von gleicher Grundfläche und Höhe mit ihr; woraus die einfache Regel für das Volumen folgt: Berechne das Kugelsegment erst als Paraboloid (s. S. 370) und dann dazu die Kugel seiner Höhe (S. 388).

Beispiel. Wäre der S. 273 berechnete Meiler oder Haufen, bei derselben Grundfläche und Höhe dermaassen

Fig. 326.



gewölbt, dass er einer Kugelhaube gleich zu achten

wäre, wie hoch würde sich diesen Falls sein Volumen stellen? Da der Grunddurchmesser $= 24, h = 11$ und das entsprechende Paraboloid $= \frac{gh}{2} = 2486$ Kubikfuss (s. S. 372), so kommt noch hinzu das Volumen einer Kugel von 11' Durchmesser $= S_{11} \times 44 = 15{,}8 \,.\, 44 =$ 695 Kubikfuss. Summa $= 2486 + 695 = 3181$ Kubikfuss.

Zusatz. Was die Oberfläche anlangt, so ist bekanntlich der sphärische Theil derselben ausgedrückt durch $2\pi r \,.\, h$, wo r den Kugelradius bedeutet. Mit Rücksicht auf die Verhältnisse des Knechtes und auf die oben und in der Figur eingeführten Bezeichnungen lässt sich dieselbe aber umformen, indem wir r durch die Halbmesser UB der Grundfläche G ersetzen, in $G + \frac{\pi}{4}(2h)^2$, was übersetzt, giebt: Grundfläche + Kreis von $2h$, oder die Regel für die sphärische Oberfläche: Suche mittels der Kreis-Spalte zum Grunddurchmesser und zur doppelten Höhe die zugehörigen Kreisinhalte und summire beide.

§. 298. Kugelscheiben.

Die (im vorigen Paragraphen erörterte) Kugelhaube AOB ist eigentlich nur ein specieller Fall der Kugelscheibe $A_1 B_1 C_1 E_1$, ein solcher nämlich, wo die kleinere Grundfläche G in Null übergegangen. In der That findet man auch, wenn man nach den einschlagenden Regeln der Geometrie die Ergänzungshöhe $O_1 J$ und dann den Inhalt der vollen Haube $A_1 B_1 J = G$ nach vorigem Paragraphen, sowie den der abgeschnittenen $C_1 E_1 J = g$ sucht und die Differenz beider Ausdrücke nach algebraischen Regeln transformirt, für die Kugelscheibe den analogen Ausdruck $V = \frac{(G+g)\,h}{2} + \frac{\pi}{6} h^3$ oder die Regel für das Volumen:

Berechne den Paraboloidenstutz, der den bei-

den Grundflächen G und g und der Höhe h entspricht, und vermehre ihn um die Kugel seiner Höhe.

Beispiel. Wieviel Quart à 64 Kubikzoll fasst das kugelförmige Gefäss Fig. 327, das $17\frac{1}{2}$ Zoll Bodenweite, 25,3 Zoll obere Weite und 10 Zoll Tiefe hat?

Fig. 327.



Das Paraboloid $= (K_{17\frac{1}{2}} + K_{25,3})\ 5$ Kubikzolle.

Kugel $= S_{10} \times 40$ Kubikzolle. — Es ist aber:

Kreis von 17,5″ = 240,5 □″, wie die K.-Spalte unmittelbar ergiebt.

Kreis von 25,3″ = 5,02, indem man 2,53 in der K-Spalte aufsucht und mit 100 multiplicirt.

742,5 × 5 = 3713 Kubikzoll.

$\frac{\text{Kreis}}{6}$ von 10″ = 13,1, wie die S-Spalte unmittelbar ergiebt; × 40 = 534 Kubikzoll.

Zusammen: 3713 + 534 = 4247 Kubikzoll = 66,4 Quart.

1. Zusatz. Wenn man in der K-Spalte mit Durchmessern arbeiten soll, die theilweise oder sämmtlich über sie hinausgehen, wie bei 25,3, so thut man oft besser, sich der viel weiter gehenden S-Spalte zu bedienen und das Resultat dann zu versechsfachen. Demgemäss erhielte man das obige Paraboloid 3713 Kubikzoll genauer also:

Die S-Spalte bei 17,5 sagt 40,1
» 25,3 » 83,8

123,9 × 5 × 6 = 3717 K.-Z.

2. Zusatz. Den sphärischen Theil der Oberfläche (den Mantel oder die Zone) nach der Regel des vorigen Paragraphen zu quadriren, müsste man die

Höhe der Ergänzungshaube berechnen oder schätzen und nun setzen: Zone = Oberfläche der ganzen Haube — Oberfläche der Ergänzungshaube. Ist aber der Radius der zugehörigen Kugel bekannt, dann ist einfach: Zone = grösster Kreisumfang $\times$ Scheibenhöhe h.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Die Sphäroiden oder Ellipsoiden.

§. 299. Wie der Kreis durch Umdrehung um seinen Durchmesser d den sphärischen oder Kugelraum von der Grösse $\frac{\pi}{6} d^3$ oder $\frac{\pi}{6} d^2 . d$ erzeugt, so bildet sich durch Umdrehung einer Ellipse, deren grosse Achse $AB = a$ und kleine Achse $DE = b$ sein mag,

1) durch Umdrehung um die grosse Achse, das eiförmige oder längliche Sphäroid, Fig. 328 a. f. S., in der Volumengrösse von $\frac{\pi}{6} b^2 \times a$, und
2) durch Umdrehung um die kleine Achse der linsenförmige oder gedrückte sphärische Raum, Fig. 329 a. f. S., von der Grösse $\frac{\pi}{6} a^2 \times b$,
3) während der umschriebene Cylinder $MNOP$ im ersteren Falle $= \frac{\pi}{4} b^2 \times a$, im anderen $\frac{\pi}{4} a^2 \times b$, in jedem Falle also in dem Verhältnisse von $^1/_6$ zu $^1/_4$, oder 2 zu 3 grösser, d. h. jedes Sphäroid an Volumen $= {}^2/_3$ des umschriebenen Cylinders ist; ganz wie bei der Kugel, deren Rauminhalt bekanntlich auch $^2/_3$ von dem des umschriebenen Cylinders ausmacht.

Da nun also jedes Sphäroid $= {}^2/_3$ oder $^4/_6$ der umschrieben gedachten Walze ist, die Sx.- oder S-Spalte aber

als Eingang zur Ablesung der Sechstelkreise und Sechstelwalzen von der Länge, dient, so folgt als

Fig. 328.

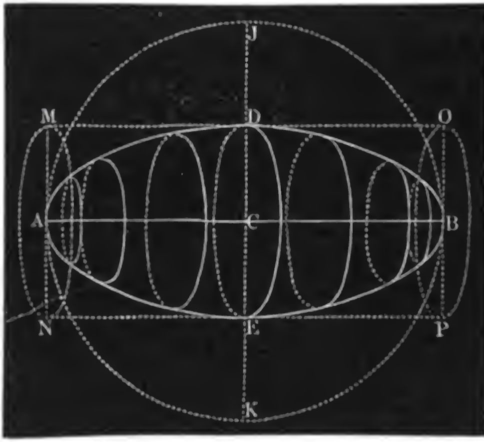
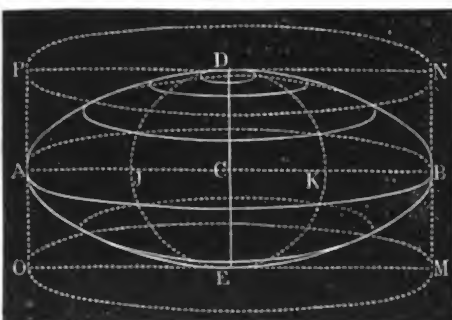


Fig. 329.



Kubirungsregel der Sphäroide: Suche in der Sextantenspalte den Durchmesser der umschriebenen Walze und multiplicire den zugehörigen

Flächeninhalt mit der 4fachen Länge oder Höhe dieser Walze: Oder

Multiplicire den zum doppelten Durchmesser des umschriebenen Cylinders gehörigen Sextanten mit der einfachen Länge des Cylinders.

NB. Zur Kubirung sowohl der vollen als der halben Kugeln, wie der Sphäroide ist es für's Gedächtniss am gedeihlichsten, sich die lakonische Regel zu merken: 4 mal die Sechstelwalze.

1. Beispiel. Die Erde ist ein gedrücktes Sphäroid von 1719 geographischen Meilen Aequatordurchmesser und 1713 geographischen Meilen Achsenlänge. Wie viel Kubikmeilen circa enthält dieselbe?

Der umschriebene Cylinder hat 1719 Meilen Durchmesser und 1713 Meilen Höhe; darum ist $V = S_{1719} \times 6852$; da aber die S-Spalte dazu nicht ausreicht, nehmen wir den 100mal kleineren Durchmesser 17,19 und finden $S_{17,19} = 38,7$ knapp, das aber mit 100×100 zu multipliciren die Sextantenfläche $= 387000$ □Meilen, und also den Inhalt $= 386000 \times 6852 = 2651724000$, also circa 2651 Mill. Kubikmeilen giebt.

Als Kugel aus dem mittleren Durchmesser $d = \frac{1713 + 1719}{2} = 1716$ Meilen berechnet, fände sich da $S_{17,16} = 38,5$, also $S_{1716} = 385000$, und $4\,d = 6864$ Meilen beträgt,

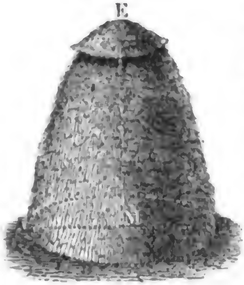
$V = 385000 \times 6864 = 2642640000$ oder fast 2643 Mill. Kubikmeilen.

Die genaue logarithmische Berechnung nach Formel $\frac{\pi}{6}\, a^2\, b$ endlich giebt:

da $lg.\ \pi =$	0,4971498
$2\ lg.\ 1719 =$	6,4705518
$lg.\ 1713 =$	3,2337574
	10,2014590
$lg.\ 6 =$	0,7781513
$num.\ lg. =$	9,4233077 = 2650400009,0 oder circa 2650½ Mill.

2. Beispiel. Hätte man, der Wölbung nach, Ursache, den Feimen AEB, Fig. 330, als ein halbes Ellipsoid zu betrachten, so fände sich bei Annahme der auf S. 371 gebrauchten Dimensionen von 9 Fuss Grunddurchmesser und 12 Fuss Höhe sein Inhalt = 4mal die Sechstelwalze = 48′ × Sextanten von 9′ = 48 × 10,6 = 508,8 Kubikfuss; sonach ein Drittel mehr als bei der Berechnung als Paraboloid (381,6).

Fig. 330.



NB. Das Paraboloid ist nämlich = $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{6}$, das Ellipsoid aber $\frac{4}{6}$ der Grundwalze oder des umschriebenen Cylinders.

§ 300. Der elliptische Kegel.

Fig. 331.

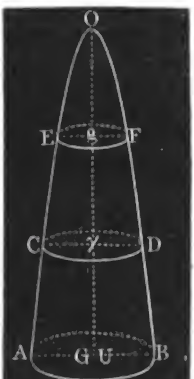


Fig. 332.



Denken wir uns ein längliches Ellipsoid mittels eines Schnittes durch seine kleine Achse in zwei Hälften zertheilt und diese Hälften auf ihre Schnittflächen gestellt, so erhalten wir einen Konus oder Kegel mit elliptischer Ausbauchung, dessen Inhalt nach vorigem Paragraphen also = $\frac{2}{3}$ oder 0,666... der Grundwalze Fig. 332 beträgt.

Während also das Neiloid die Formzahl (im Procentsatze) 25, der gemeine Kegel $33\frac{1}{3}$, der parabolische 50, hat der ellipsoidische $66\frac{2}{3}$ oder 67. Und wenn in Fig. 332

$UN = \frac{1}{4}$ der ganzen Scheitelhöhe,
$UK = \frac{1}{3}$ » » »
$UP = \frac{1}{2}$ » » »
$UE = \frac{2}{3}$ » » »

so repräsentiren diese Unterhöhen die Formhöhen resp. des neiloidischen, des gemeinen, des paraboloidischen und des ellipsoidischen Kegels oder Pyramids.

§. 301. Die grössere Vollförmigkeit des Ellipsen-, gegenüber der des Parabelkegels, zeigt sich auch am Stutze beider. Denn während der Stutz des letzteren sich vergleicht einer gleich hohen Walze, die das arithmetische Mittel der oberen und unteren Grundfläche zur Basis hat, so belehrt uns die höhere Geometrie, dass diese Basis gleich ist dem arithmetischen Mittel aus der oberen und 2 unteren Grundflächen, wenn es einem elliptisch ausgebauchten Kegelstutze gilt. So dass man hat $V = \frac{g + 2\,G}{3}\,h = \left(\frac{g}{6} + \frac{2G}{6}\right) 2\,h$ = Sextant des oberen Durchmessers, + 2mal Sextant des unteren, und multiplicirt mit der doppelten Höhe des Stutzes.

Fig. 333.



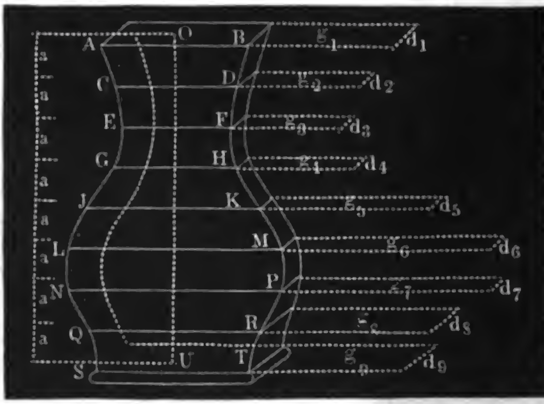
Zusatz. Die Mittenstärke dieses Konoids ist = 0,865 der Grundstärke.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Beliebig ein- und ausgebauchte Polyëder und Kreiskörper.

§ 302. Sind die parallelen Querschnitte eines sonst irgend wie geformten Körpers, Fig. 334, ähnliche Figuren,

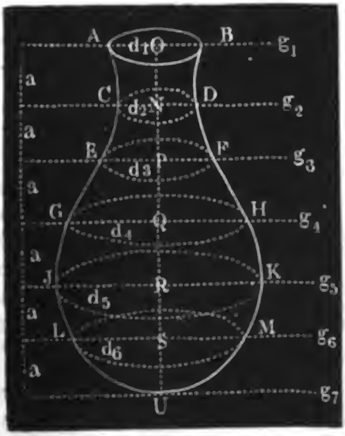
Fig. 334.



so ist derselbe auch als ein Rückungskörper (s. S. 311) zu betrachten; und er gehört der grossen Familie der Kreiskörper zu, sobald diese Querschnitte kreisförmig sind, Fig. 335. Stets kann man sich nun einen dergleichen Körper durch Schnitte parallel zur Grundfläche in eine solche gerade Anzahl von Scheiben zerlegt denken, dass je zwei davon (g_1 bis g_3; g_3 bis g_5; g_5 bis g_7) immer entweder einem gemeinen oder einem parabolisch aus- oder dergleichen eingebauchten pyramidischen Körper gleich zu achten sind, deren Inhalt, wie wir aus den vorigen Kapiteln ersehen (s. S. 360, 374, 385), durch die

gemeinsame Formel $\frac{G + 4\gamma + g}{6}\, h$ ausgedrückt werden kann, wo G die erste, γ die zweite oder mittlere und g die dritte Grundfläche und h des Körpertheiles Höhe oder die doppelte Dicke einer seiner beiden Sectionen, also hier $= 2\,a$, bedeute.

Fig. 335.



Bezeichnet man also mit a den gleichen Abstand sämmtlicher einzelner Querschnitte oder Grundflächen von einander, d. i. die Höhe jeder Section, und die einzelnen Grundflächen ihrer Folge nach mit $g_1, g_{II}, g_3, g_4 \dots g_u$, so muss, weil die Anzahl der Scheiben eine gerade sein muss, der Stellenzeiger u der letzten Grundfläche g_u immer ungerade (g_9 oder g_7 etc.) sein.

Durch Anwendung obiger Formel auf die Kubirung je zweier Sectionen und Vereinigung der erhaltenen Werthe erlangt man dann, wie Jeder, der ein wenig Buchstabenrechnung versteht, leicht finden kann, die interessante Berechnungsformel

$$V = [(g_1 + g_9) + 2(g_3 + g_5 + g_7) + 4(g_2 + g_4 + g_6 + g_8)]\frac{a}{3}$$

welche, wie man sieht, der S. 261 aufgeführten Simpson'schen Regel vollkommen ähnlich ist. Und indem wir jene die Simpson'sche Flächenregel, wollen wir diese die Simpson'sche Körperregel nennen, und folgendermaassen in Worte setzen:

Theile des Körpers Höhe oder Länge in eine gerade Anzahl gleicher Theile, ermittele für jeden Theilpunkt den der Grundfläche parallelen

Querschnitt; schreibe unter einander die erste und letzte Querfläche einfach; jede der anderen ungeradstelligen (3te, 5te, 7te etc.) doppelt, und jede der noch übrigen (oder geradstelligen, 2te, 4te, 6te) vierfach und multiplicire die Summe aller dieser Posten mit dem dritten Theile der Sectionslänge.

Zusatz. Werden der bequemeren Arbeit wegen die Sectionen von einer passenden bestimmten Länge gemacht, so wird es selten zutreffen, dass die Theilung netto aufgeht, noch seltener, dass die Sectionszahl zugleich noch eine gerade ist. In diesem Falle geht man mit vorstehender Regel zunächst nur bis zum letzten ungeradstelligen Theilpunkt und kubirt das jenseits liegende Endstück für sich und nach denselben Principien.

§. 303. Praktische Modification der Simpson-schen Körperregel für das Pyramidoid mit beliebig geformten Seitenkanten.

Da die vollständige Berechnung jedes Querschnittes unter Umständen, z. B. bei sehr schwierig zu berechnender Grundfläche, gar umständlich werden würde, so wollen wir diese Berechnung nur auf die erste Grundfläche g_1 reduciren. Sind nämlich d_1 und d_2 irgend zwei gleichliegende Dimensionen der Grundflächen g_1 und g_2, so erhält man die letztere sofort als $g_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 g_1$ nach dem bekannten Satze, dass ähnliche Flächen sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Dimensionen verhalten. Ebenso $g_3 = \left(\frac{d_3}{d_1}\right)^2 g_1$ u. s. w., wodurch man obige Formel verwandeln kann in

$$V = [(d_1{}^2 + d_9{}^2) + 2\,(d_3{}^2 + d_5{}^2 + d_7{}^2) + 4\,(d_2{}^2 + d_4{}^2 + d_6{}^2\; d_8{}^2)]\,\frac{g^1}{d_1{}^2} \times \frac{a}{3},$$

oder in Worten:

Theile das Pyramidoid parallel zur ersten Grundfläche in eine gleiche Anzahl gleich langer Sectionen; miss beim Anfangs- und End- oder jedem Sectionspunkte eine homo-

loge Stärken-Dimension (deren Anzahl sonach ungerade ist); schreibe hin (am besten mittels Ablesung aus einer Potenzentafel):

das Quadrat der ersten und der letzten Dimension einfach,
» » » übrigen ungeradstell. (3te, 5te, 7te) doppelt,
» » » anderen übrigen (geradstelligen) vierfach

und multiplicire die Summe mit irgend einer der Grund- oder Querflächen dividirt durch das Quadrat ihrer Dimension und dann noch das Produkt mit dem Drittel der Sectionslänge.

Im Falle aus Gründen des Zusatzes § 302 bei der Sectionsabtheilung ein Endstück übrig bleibt, so verfahre diesem Zusatze gemäss.

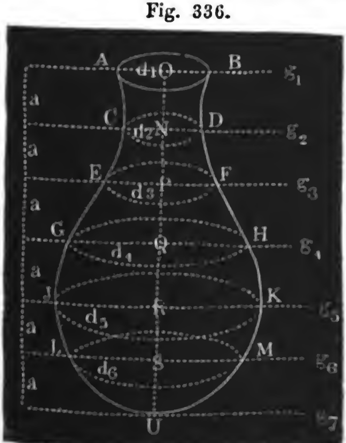
§. 304. Das Konoid mit beliebig geformter Seite.

Da sich die (für 8 Sectionen oder 9 Theilpunkte ausgedrückte) Formel des §. 302 einfach umändern lässt in

$$V = \left[\frac{(g_1 + g_9 + 2(g_3 + g_5 + g_7) + 4(g_2 + g_4 + g_6 + g_8)}{6}\right] 2\,a$$

und da ferner des Knechtes *S*- und *Sx*.-Spalte, jene für Duodecimal-, diese für Decimalmaass, ohne Weiteres die Kreisflächensechstel anzeigt, so leitet hieraus behufs der genauesten Kubirung jedweden unregelmässig (ungeometrisch s. S. 304) geformten Kreiskörpers, der Messknecht folgende in der Ausführung eben so einfache als bequeme Regel ab:

Fig. 336.



Theile die Länge (*OU*, Fig. 336) in eine solche **gerade** Anzahl **gleicher** Theile, dass immer je zwei die-

ser Sectionen ohne Nachtheil als ein gerad- oder parabolischseitiger Kegelstumpf angesehen werden können. Nimm die Durchmesserstärke an den Enden und allen anderen Theilpunkten ab, und schreibe dann unter einander die mittels der Sextanten-Spalte des Knechtes genommenen Inhaltszahlen:

zur ersten und letzten Stärke einfach,

zu den übrigen ungeradstelligen Stärken (zur 3ten, 5ten, 7ten etc.) zweifach,

zu allen anderen (oder geradstelligen, als 2te, 4te, 6te etc.) vierfach

und multiplicire die Summe aller mit der doppelten Sectionslänge.

Bezeichnen S_1, S_2, S_3 . . . S_u die mittels der Sextantenspalte zur 1ten 2ten, 3ten und letzten Stärke abgelesenen Inhaltszahlen und a die Länge einer Section, so stellt sich das ganze Geschäft sehr übersichtlich in folgender Formel dar:

S_1
S_u

$S_3 \times 2$
$S_5 \times 2$
$S_7 \times 2$
. . . .

$S_2 \times 4$
$S_4 \times 4$
$S_6 \times 4$
. . . .

Sa. Summar. $\times\, 2a$

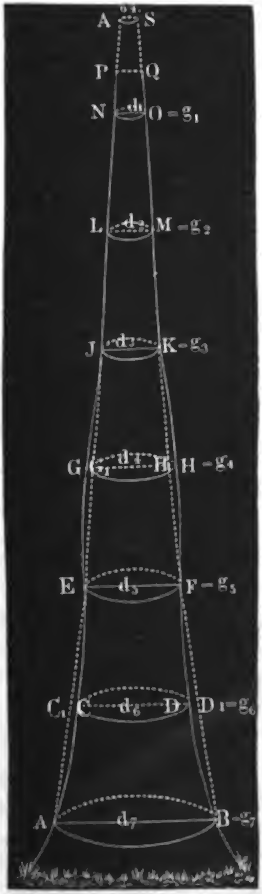
Zusatz. Bei Annahme einer bestimmten rundzahligen Sectionslänge a arbeitet man nach dieser Regel nur bis zum letzten ungeradstelligen Theilpunkte z. B. C, Fig. 337, und kubirt den jenseits liegenden Theil CE besonders (je nach Umständen als gemeinen oder als parabolischen Kegel oder auch durch Sectionen). Macht man $a = 5$, so hat man in der »Summa« statt der Multiplication einfach das Komma eine Stelle nach rechts zu rücken.

Fig. 337.



§. 305. Beispiele.

Fig. 338.



1. Beispiel. Der entwipfelte Stamm *ABNO*, Fig. 338, von 36 Fuss Länge sollte behufs der Controle über die in Sachsen gebräuchlichen Holzkubirungs-Tafeln auf seinen wahren Inhalt untersucht werden. Er ward deshalb in sechs Sectionen à 6 Fuss Länge zerlegt gedacht und ergab die sorgfältig gemessenen Stärken $d_1 = 8^1/_4$ Zoll; $d_2 = 10^3/_8$ Zoll; $d_3 = 12^1/_2$ Zoll; $d_4 = 15^1/_2$ Zoll; $d_5 = 17$ Zoll; $d_6 = 17^3/_4$ Zoll; $d_7 = 22^1/_2$ Zoll. Wie gross demnach sein genauer Inhalt?

Da die Zolle sächsische, also zwölftheilige sind, so hat man

1)	$Sx_{8^1/_4}$	einfach	$= 0{,}063$
7)	$Sx_{22^1/_2}$	»	$= 0{,}46$
3)	$Sx_{12^1/_2}$	doppelt	$= 0{,}284$
5)	Sx_{17}	»	$= 0{,}526$
2)	$Sx_{10^3/_8}$	vierfach	$= 0{,}384$
4)	$Sx_{15^1/_2}$	»	$= 0{,}872$
6)	$Sx_{17^3/_4}$	»	$= 1{,}144$
			$3{,}733$

$V = 3{,}733 \times 12' = 44{,}796 =$ 44,8 Kubikfuss.

1. Zusatz. Die Berechnung als Walze des mittleren Durchmessers $d_4 = 15^1/_2{}''$ würde ergeben, da $Kr._{15^1/_2} = 1{,}31$ ist, $V = 1{,}31\square' \times 36' = 47{,}16$ Kubikfuss, so dass demnach ein dergleichen etwas ungewöhnlich ge-

formter Stamm immer durch Sectionsberechnung zu kubiren wäre. Aber nur nach eben angewandter Regel; denn:

2. Zusatz. Die Kubirung jeder der drei 12fussigen Sektionen aus dem mittleren Durchmesser d_2, d_4, d_6 würde ergeben, da

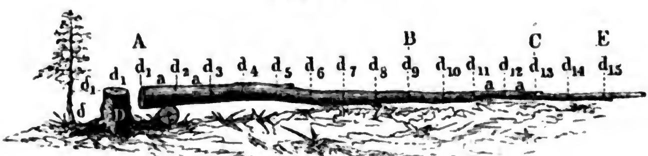
$$\begin{aligned} Kr.\ 10^3/_8 &= 0{,}588 \\ Kr.\ 15^1/_2 &= 1{,}310 \\ Kr.\ 17^3/_4 &= 1{,}718 \\ \text{zusammen} &= 3{,}616 \text{ ist:} \end{aligned}$$

$V = 3{,}616 \times 12 = 43{,}392 = 43{,}4$ Kubikfuss,
oder immer noch einen Fehler von 1,4 Kubikfuss.

2. Beispiel. Bei einer der Arbeiten des forstmathematischen Practicums hatten wir den Probestamm eines Fichtenbestandes noch auf dem Stocke mittels des Knechtes zu 63 Fuss Höhe, und die Stärke bei $^1/_{20}$ der Höhe oder reichlich 3 Fuss gemessen zu 9,5 Decimalzoll ermittelt, sodann die Schaftformzahl = 45 (Hundertel) und hiernach des Stammes Formhöhe auf $63 \times \frac{45}{100} = 28'$, oder was dasselbe ist, des Stammes Inhalt gleich dem einer Walze von $9^1/_2$ Decimalzoll Stärke und 28 Fuss Länge geschätzt, welchen dann die K-Spalte des Knechtes sofort als $0{,}71 \times 28 = 19{,}9$ Kubikfuss ergab.

Um diese Formzahlschätzung recht genau zu prüfen, ward der Baum gefällt, nach der Simpson'schen Regel ausgemessen, wobei sich die nachstehenden Stärken und Längen ergaben.

Fig. 339.



Stockhöhe $D = 1^1/_2$ Fuss; Sectionslänge 10 Fuss; Durchmesser am Wurzelhalse 10,1 und vom Stockabschnitte

an: 9,6; 8,7; 7,0; 6,1; 5,0; 3,0; 0,7; und darüber noch ein Wipfel von $1\frac{1}{2}$ Fuss Länge.

Und es berechnen sich demgemäss:

A. Die sechs Sectionen:

$S_{0,7}$	einfach	$= 0{,}0001$ □′
$S_{9,6}$	»	$= 0{,}121$
S_5	zweifach	$= 0{,}066$
S_7	»	$= 0{,}128$
S_3	vierfach	$= 0{,}048$
$S_{6,1}$	»	$= 0{,}192$
$S_{8,7}$	»	$= 0{,}396$

$$0{,}951 \times 20 = 19{,}02 \text{ Kubikfuss.}$$

B. Das Spitzenstück, als Paraboloid, = einer Walze von 0,7 Zoll Stärke und $\frac{3}{4}$ Fuss Länge, ist als Null zu achten.

C. Der $1\frac{1}{2}$ Fuss hohe Stock, als Kegelstumpf kubirt:

$$S_{9,6} = 0{,}121$$
$$S_{10,1} = 0{,}159$$
$$S_{1,7} = 0{,}508$$

$$0{,}788 \times \tfrac{3}{2}' = 1{,}13 \text{ Kubikfuss,}$$

so dass in Wahrheit der ganze Stamm an Masse besass:

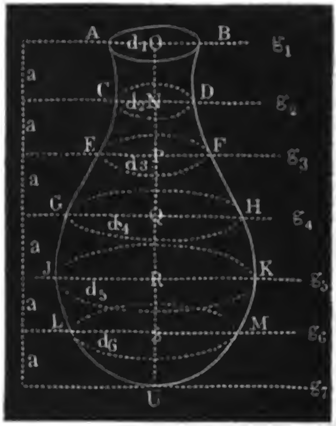
$$19{,}02 + 1{,}13 = 20{,}15 \text{ Kubikfuss,}$$

die Schätzung also um noch nicht einen Kubikfuss gefehlt hatte.

Zusatz. Will man nun den genauen Werth der Formzahl f dieses Schaftes haben, so hat man zu rechnen: des Stammes Grundwalze = Cylinder von 9,5″ Stärke und 63′ Höhe = 44,67 Kubikfuss und sonach $f = \frac{20{,}15}{44{,}67} = 45\frac{1}{4}$ (Procent).

3. Beispiel. Die Tiefe OU des Gefässes Fig. 340 a. f. S. sei 32 Zoll Duodecimalmaass ($= \frac{8}{3}$ Fuss). Bei zerlegung in sechs Sectionen (à $\frac{4}{9}$ Fuss Dicke) ergaben sich im Lichten die Weiten: $AB = 8''$; $CD = 9\frac{1}{2}$; $EF = 11$; $GH = 15\frac{3}{4}$; $JK = 17\frac{1}{2}$; $LM = 15\frac{1}{4}$; $U = 0$. Wie viel beträgt der Rauminhalt nach Kubikfussen?

Fig. 340.



Die *Sx.*-Spalte giebt zu

8	Zoll	den	Inhalt	einfach	= 0,058	□′
0	»	»	»	»	= 0	
11	»	»	»	zweifach	= 0,111	»
$17\frac{1}{2}$	»	»	»	»	= 0,278	»
$9\frac{1}{2}$	»	»	»	vierfach	= 0,336	»
$15\frac{3}{4}$	»	»	»	»	= 0,900	»
$15\frac{1}{4}$	»	»	»	»	= 0,848	»

$2{,}531 \times \frac{8}{9} = 2{,}25$ Kubikfuss.

§. 396. Die Fassräume.

Fassräume können wie alle Kreiskörper ebensowohl als Rückungs- wie als Rotationskörper, im letzteren Falle durch Rotation der Fasslinie *CAJ*, Fig. 341 u. Fig. 342, um die Fassachse *EF*, betrachtet werden. Dabei heisse die lichte Grösse des Enddurchmessers *CD* die Bodenweite, die des Mittendurchmessers *AB* die Mittenweite, und die, beiden Durchmessern entsprechenden, mit dem Fasse gleichlangen Cylinder *CDJK* und *NOPQ* die Boden- und die Mittenwalzen.

Wenn dergleichen **Fassräume** möglichst genau kubirt werden sollen, müssen sie ebenfalls nach Maassgabe des vorigen Paragraphen ausgemessen werden. Hat man jedoch Grund, die **Fasslinie als parabolisch**, das Fass also als aus zwei Parabelkegeln zusammengesetzt anzunehmen, so ist aus S. 376 leicht abzuleiten die

Fig. 341.

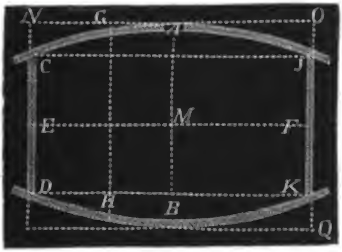
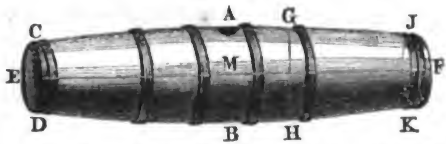


Fig. 342.



1. **Regel.** Suche mittels der *Kr.*- oder *K*-Spalte den Inhalt zur Boden- und zur Mittenweite und multiplicire deren Summe mit der halben Fasslänge; — Oder
2. **Regel.** Miss die Weite des Fasses in der Mitte zwischen Spund und Boden, d. h. bei $\frac{1}{4}$ seiner Länge und multiplicire die entsprechende Kreisfläche mit der Fasslänge.

Beispiel. Das bei *G'* u. *H*, Fig. 341, umgelegte Messband zeigte einen Durchmesser von 21 Zoll Duodecimalmaass. Wenn nun die äussere Länge $EF =$ 6 Fuss 2 Zoll, die Dauben und die Bodenbretter aber 1 Zoll Stärke haben, wie gross ist dann der parabolisch anzunehmende Fassraum? — Lichte Weite $= 21 - 2$ $= 19$ Zoll; Länge $= 6$ Fuss.

Nach der *Kr.*-Spalte ist die Kreisfläche zu $19'' = 1{,}97$ □Fuss, also der Fassraum $= 1{,}97 \times 6 = 11{,}82$ Ku-

bikfuss, welche die *m*-Tabelle schnell in Kannen, Maass u. s. w. verwandelt.

§. 307. Fassräume (Fortsetzung).

2. Ist die Fasslinie aber elliptisch (S. 397), ein wohl seltener vorkommender Fall, so lehrt die Geometrie: Der Fassraum ist gleich dem arithmetischen Mittel aus zwei Mitten- und einer Bodenwalze; woraus der Messknecht folgende Regel formirt:. Schreibe mittels der Sextantenspalte (*Sx.* oder *S*) zur Bodenweite *CD* den Inhalt einfach und zur Mittenweite *AB* zweifach heraus und multiplicire die Summe mit der doppelten Fasslänge *EF*.

Beispiel. Ein badensches Gebind mit augenscheinlich elliptischer Fasslinie hatte 2,2 Fuss Boden-, 2,8 Fuss Spundweite und 5 Fuss Länge. Also wieviel Maass Inhalt? — Die zehntheilige Skala giebt, wenn wir die Weiten in Zollen ausdrücken, $S_{22} = 0{,}633$, und $S_{28} = 1{,}026$, also $V = (S_{22} + 2\ S_{28})\ 10 = (0{,}633 + 2{,}052)\ 10 = 26.85$ Kubikfuss à 18 Maass (nach der *m*-Tab.) $= 483{,}3$ Maass.

§. 308. Fassräume (Fortsetzung).

3. Für die gewöhnlichen Fässer haben beim Zuschneiden der Fassdauben die Böttcher ziemlich übereinstimmende Regeln, so dass nach Stampfer's vielfachen Untersuchungen der Raum der gewöhnlichen im Verkehr vorkommenden Fässer durchschnittlich 0,907 der Spundwalze beträgt, daraus der Knecht die praktische Regel bildet:

Suche zur Mittenweite *AB* mittels der Sextantenspalte *Sx.* od. *S* die Inhaltszahl und multiplicire mit der Fasslänge *EF* und der Formzahl 5,44 oder $5^4/_9$ (da $0{,}907 \times 6 = 5{,}442$ ist).

Beispiel. Der Inhalt des obigen badenschen Gebindes, nach vorstehender Regel entwickelt, würde sich berechnen?

$S_{28} = 1{,}026\ \square'$; $V = 1{,}026 \times 5\ .\ 5{,}44 = 27{,}9$ Kubikfuss.

Viertes Buch.

Zeitmesskunst

oder

der Messknecht

als:

25) Sekundenuhr.

26) Sonnenuhr und Uhrensteller.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Der Messknecht als Sekundenuhr.

---

§. 309. Leicht möglich, dass irgend einem Fachmanne beim Lesen dieser Kapitelüberschrift ein ironisches Zucken der Mundwinkel anwandelt. Mag ein Solcher immerhin lächeln, wenn er nur nicht zankt! Und zanken wird und kann er nicht, denn er weiss ja, dass das Wesen einer Sekundenuhr nicht darin besteht, alles mögliche feine Triebwerk in goldenem Hause einzuschliessen, sondern eben nur den Zeitraum, den man Sekunde nennt und der der 86400ste Theil eines Tages ist, mit genügender Genauigkeit anzugeben. Da dies nun unser Knecht vermöge seines Pendels vermag, so ist er folgerecht eine Sekundenuhr, obgleich diese nur aus einem Pfennig und einem Seidenfaden besteht.

Fig. 343.



§. 310. Wie Jedermann weiss oder sofort beobachten kann, hängt die Dauer einer Pendelschwingung (eines Hin- oder eines Hergangs) von der Länge desselben, d. h. von der Entfernung seines **Schwingungspunktes** B von seinem **Aufhängepunkte** A ab. Besteht das Pendel aus einem dünnen, also auch ganz leichten Faden und das daran gehängte Loth aus einem Körper von gehöriger Kleinheit, Gleichförmigkeit

und Schwere, so ist des letzteren Mittelpunkt *B* auch der Schwingungspunkt. Bei dem Messknechtspfennig fällt dieser Mittelpunkt mitten in das erste *N* der Schriftseite, oder ein ganz klein wenig unter die Bauchmitte des muthigen Schimmels auf der anderen Seite.

§. 311. Weiter belehrt uns die Mechanik, dass wenn ein solches, gleichsam aus einer gewichtslosen Linie und einem gewichtigen Endpunkte bestehendes (»mathematisches«) Pendel zu einer Schwingung netto eine Sekunde brauchen soll, es in der geographischen Breitenlage von Deutschland 994 Millimeter lang sein müsse*), während es am Aequator, wo die Schwerkraft bekanntlich mit etwas geringerer Energie wirkt, nur 991, in Spitzbergen dagegen 996 Millimeter lang sein muss. Die Schwingungen dieses Pendels müssen, genau genommen, im luftleeren Raume stattfinden. Doch genügt es für die gewöhnliche Praxis der Sekundenmessung vollkommen, dass nur kein zu grosser Luftwiderstand vorhanden sei.

§. 312. Endlich haben wir auch noch der Mechanik den Satz zu entlehnen, dass die Schwingungszeiten zweier Pendel sich genau verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen; also, dass ein viermal so kurzes Pendel zweimal so kurz (oder doppelt so schnell), ein neunmal so kurzes dreimal so kurz (oder dreimal so schnell) schwingt.

Das Halbsekunden-Pendel hat sonach eine Länge von $\frac{994}{4} = 248\frac{1}{2}$ Millimeter,

das Drittelsekunden-Pendel eine Länge von $\frac{994}{9} = 110\frac{4}{9}$ Millimeter,

das Viertelsekunden-Pendel eine Länge von $\frac{994}{16} = 62\frac{1}{8}$ Millimeter.

§. 306. Mittels der *a*-Tabelle der Maasstafeln kann ein

*) An der südlichen Grenze Deutschlands $993\frac{1}{2}$, an der nördlichen $994\frac{1}{2}$.

Jeder das Maass des Sekundenpendels leicht in seine Landeszolle umwandeln und daraus durch Division mit 4, 9, 16 das Halbe-, Drittel- oder Viertel-Sekundenpendel ableiten.

Zum Beispiel der Preusse:

$$314 \text{ Millimeter} = 1 \text{ Fuss} = 12 \text{ Zoll};$$

$$\text{also} \quad 1 \text{ Millimeter} = \frac{12}{314} \text{ Zoll};$$

$$\text{also} \quad 994 \text{ Millimeter} = \frac{12 \times 994}{314} = 37{,}99 \text{ oder} = 38 \text{ Zoll}.$$

Oder der Oesterreicher:

indem die Maasstabelle in der Rubrik Oesterreich 316 statt 314 zeigt.

$$\frac{12 \times 994}{316} = 37{,}75 \text{ oder } 37^3/_4.$$

Oder der Schweizer, dessen Fuss = dem badischen = 10 Zoll:

$$\frac{10 \times 994}{300} = 33{,}13 \text{ Zoll}.$$

Der Metermaassstab der Vorderseite des Knechts gestattet aber auch die unmittelbare Abnahme der Deci- oder der Millimeter, etwa mittels eines Zirkels oder eines Papierstreifens. Und es ist auch für die gewöhnlichen Beobachtungen bemerkenswerth, dass die Messknechtstafel von einer Ecke bis zur andern sehr nahe $\frac{994}{4} = 248^1/_2$ Millimeter oder die Länge des Halbsekundenpendels spannt.

§. 313. Die Nutzanwendung, die wir für den Knecht von diesen physikalischen Lehren machen, ist nun folgende:

Auf einen Zollstab Fig. 344 (a. f. S.) trägt man vom oberen **nicht abgenutzten** Ende A' ab die genaue Länge des nach vorigem Paragraphen bestimmten Halbsekundenpendels $A' B' = 248^1/_2$ Millimeter und fügt daran noch den halben Durchmesser $B\,C$ unseres Pfennigs; worauf dann der Punkt C mit einem scharfen Strich markirt wird. Das Messknechtspendel wird vorläufig daran gehalten, und in

der Gegend von A ein Knoten geknüpft, wobei jedoch in

Fig. 344.



die Knotenschlinge vor dem Zuziehen eine Stecknadel eingesteckt werden muss, um mittels derselben den Knoten fortrücken oder justiren zu können. Der Knoten ist an seiner richtigen Stelle, wenn der untere Pfennigrand den Strich C berührt, sobald der Stab $A' C'$ lothrecht und die Nadel horizontal auf die Kante A gehalten wird. Sobald dies Ziel erreicht ist, wird die Nadel heraus und der bereits schon geschlossene Knoten zugezogen.

Auf diese Weise kann man sich auch die Knoten für die Drittel- oder Viertel-Sekundenpendel suchen. Begreiflicherweise müsste aber der tiefere, also der für die Viertelsekunden immer zuvor bestimmt sein. Da man aber am Halbsekundenpendel das Viertel einer Schwingung noch recht gut, also Achtelsekunden, schätzen kann, so ist es am zweckmässigsten, lieber nur jenen einen Knoten recht genau einzuknüpfen. Durchaus nothwendig ist's aber, dass dies beim freien Hange des Pendels, nicht aber etwa auf einem Tische und bei gespanntem Faden geschehe. (Dasselbe ist zu beachten, wenn man die Länge des Halbsekundenpendels = der Ecklinie des Messknechts macht.)

§. 314. Die Praxis dieses Halbsekundenpendels, das Derjenige, der das Handgreifliche liebt, auch noch kontroliren kann, indem er mit Hülfe einer guten Uhr die Zahl seiner Schwingungen während 3, 4 oder 5 auf einander folgender Minuten zählt, besteht in der Befolgung folgender drei Vorschriften:

a. Nimm die Knechtstafel zusammengeschlagen in die hohle Hand, und stecke eine feine Nadel in den bewussten

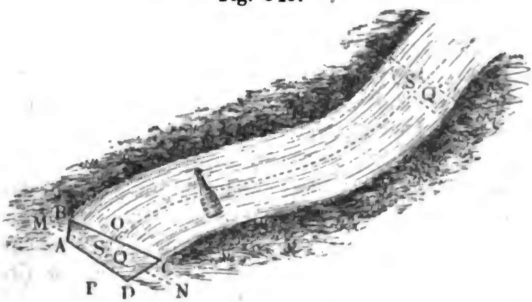
(den Aufhänge-) Knoten, oder halte mit den scharfen Nägeln zweier Finger das Pendel scharf über demselben fest.

b. Lasse es schwingen, dass der Pfennig nicht breit, sondern mit schmaler Seite die Luft durchschneidet und überhaupt vor Luftzug möglichst geschützt sei.

c. Zähle — lieber mit zu kleinem als zu grossem Schwingungsbogen — die Zahl der Schwingungen und dividire sie, um die Zeit in ganzen Sekunden auszudrücken, durch 2.

1. Beispiel. Es waren 60 Fuss Bachlänge abgemessen,

Fig. 345.



und während ein schwimmender Körper diese durchlief, zählte man am Pendel 30 Schwingungen. Welche Geschwindigkeit hat dies Wasser?

$$30 \text{ Schwingungen} = \frac{30}{2} = 15 \text{ Sekunden; also Weg}$$

$$\text{pro Sekunde} = \frac{60}{15} = 4 \text{ Fuss (Geschwindigkeit).}$$

2. Beispiel. Um die Geschwindigkeit eines Windes zu messen, stellten sich 2 Beobachter in der Richtung des Windes 200 Schritte à 3 Fuss = 600 Fuss entfernt von einander auf. Der obere liess eine Flaumfeder fliegen und zählte gleichzeitig nach Halbsekunden, bis der untere durch sein »Halt!« die Ankunft der Feder anzeigte. Wenn nun Jener bis 24 zählte, welche Geschwindigkeit hatte die Luft?

24 Halbsekunden $= \frac{24}{2} =$ 12 Sekunden; also pro Sekunde $\frac{600}{12}$ Fuss = 50 Fuss Geschwindigkeit.

§. 315. Distanzmessung durch den Schall.

Während die Geschwindigkeit der Lichtwellen für irdische Verhältnisse ganz unmessbar ist (42000 Meilen pro Sekunde), nehmen sich die Schallwellen etwas mehr Zeit, und legen in ruhiger Luft und bei 0 Grad Temperatur in jeder Sekunde einen Weg von 1028 pariser Fuss oder 332 Meter (Pogg. Annalen V, 351) oder circa 1060 rheinländische Fuss = 0,0444 oder $= \frac{4}{90}$ geographische Meilen zurück. Diese Geschwindigkeit wächst und fällt mit der Temperatur der Luft, jedoch nur circa 2 Fuss für jeden Grad Réaumur; und beträgt für die mittlere Temperatur = 340 Meter.

Jede Schwingung des durch obigen Sekundenknoten begrenzten Messknechtspendels entspricht demgemäss bei ruhiger Luft und mittlerer Temperatur einem Schallwege von reichlich 500 pariser oder grossen Fussen (österr. preuss.) oder 550 kleinen; oder genauer 170 Metern oder 0,0227 geographischen Meilen; worin dann die Anweissung liegt:

Miss die Zeit, die der Schall braucht, um bis an dein Ohr zu gelangen, nach Schwingungen des Halbsekundenpendels und multiplicire diese Zahl bei oberflächlicher Frage mit 500 Fussen oder $\frac{2}{90}$ Meilen; dagegen bei genauerer Forschung und bei $\pm$ t^0 *Cent. Temp.* mit $(166 \pm {}^1\!/_3\, t)$ Meter. — Ist aber Wind vorhanden, so ist dieser Faktor noch um diejenige Geschwindigkeit zu vermehren oder zu vermindern, welche der Wind in der Richtung des Schalles mit oder gegen ihn besitzt. (Siehe folgenden Paragraphen).

1. Beispiel. Den Knall eines Gewehrs vernahm das Ohr $3^1\!/_2$ Schwingungen später, als das Auge den Blitz

wahrnahm; demnach ist die Entfernung $500 \cdot 3\frac{1}{2} = 1750$ preussische Fusse circa.

2. Beispiel. Ein mehrstimmiges Echo in Oesterreich gab seine letzte Antwort, nachdem das Messknechtspendel 20 Schwingungen gemacht hatte. Welchen Weg haben sonach die Schallwellen vom Munde des Redners bis zurück zu dessen Ohr gemacht? $500 \cdot 20 = 10000$ Fuss.

§. 316. Die Entfernung und Annäherung eines Gewitters nach deutschen Meilen zu messen.

Die Schallgeschwindigkeit wird vermehrt oder vermindert um die Geschwindigkeit, welche der Wind in der Schallrichtung besitzt. Starker Wind hat die Geschwindigkeit 10 bis 20 Fuss, Sturm 20 bis 50 Fuss. — Statt des Decimalbruches 0,0227 Meilen setzen wir daher, wenn das Gewitter von uns wegzieht —, 0,022, und wenn es herzieht 0,023 Meilen, und geben die Regel:

Beobachte die Schwingungen des Messknechts-Halbsekundenpendels zwischen Blitz und Donner, multiplicire ihre Zahl mit 23 oder 22, je nachdem das Gewitter her- oder fortzieht, und schneide 3 Decimalen ab.

Beispiel. Zählt man zwischen Blitz und Donner bei einem anziehenden Gewitter 20 Pendelschwingungen, so ist die Distanz bis zur blitzenden Wolke $23 \times 20 = 0{,}460$ Meil, oder noch nicht eine halbe Meile

---

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Der Messknecht als Uhr und Uhrenregulator.

---

§. 317. Ausser in grossen Städten, wo vortrefflich und astronomisch regulirte Normaluhren die Zeit bestimmen, hat wohl Jedermann, namentlich aber der auf dem Lande Wohnende, ein Interesse daran, wenn sich ihm sein Messknecht als ein kunstgerechter Chronometer empfiehlt, der, sobald nur nicht Londoner Nebel jede Spur des Sonnenstandes am Himmel vertilgen, ihm durch die einfach-

ste Beobachtung von der Welt und bei Mithülfe einer entsprechenden Tabelle ohne alle Zwischenrechnung die Zeit, und zwar zunächst gleich die bürgerliche oder mittlere, bis auf ein Paar Minuten, bei vor- und nachmittägiger Messung aber bis auf die einzelne Minute, genau angiebt, und dadurch auch ein Werkzeug zur richtigen Stellung der Haus- und Ortsuhren wird.

§. 318. Wer, wie der Verfasser, in einem Orte wohnt, dessen Zeitgott der *Cantor loci* und dessen Normalchronometer eine miserable Kirchenuhr ist; wem, wie dem Verfasser, dann und wann die Menschlichkeit begegnet, das Aufziehen seiner Uhr vergessen zu haben, oder wer sonst in der Lage ist, sich in zeitweiliger Ermangelung einer richtigen Haus- und Sackuhr ein anderes Hülfsmittel zur Zeitkenntniss herbeizuwünschen; und wer ferner, nach einigen ausgeführten Zeitmessungen durch den Knecht, die Erfahrung gemacht hat, dass ein einziger kurzer Sonnenblick und sein Auffangen mit dem sogar in freier Hand gehaltenen Knechte genügt, um bis auf ein paar Minuten genau zu wissen, welche Zeit es ist: — der wird die Anwendung des Messknechts als Uhr gewiss nicht bloss als eine interessante Spielerei, sondern sicher auch als einen Gegenstand von praktischem Nutzen für's Geschäftsleben ansehen.

§. 319. Wie dem Knechte das möglich sei, ist Jedem einleuchtend, der daran denkt, dass das Instrumentchen auch ohne Stativ die Höhenwinkel, also auch die Sonnenhöhen bis zur Genauigkeit von mindestens $^1/_2$ Grad und, angesteckt an einen Stock, bis zu $^1/_4$ Grad angiebt (s. S. 187), und dass jedes Instrument, das Sonnenhöhen misst, gleich den bekannten Sextanten, auch Zeitmesser sein kann. Damit aber der Messknecht gegen den letzteren in der Genauigkeit nicht wesentlich zurückstehe, ist es nothwendig, den schattenwerfenden Stift recht genau senkrecht in die Tafel und zwar in den Mittelpunkt eines der zwischen den Buchstaben des Wortes »Verlag« eingezeichneten kleinen Ringe einzusetzen; wohl auch, zu noch grösserer Vorsicht,

zu untersuchen, ob die lithographirte Ziellinie des gewählten Einsetzpunktes noch genau rechtwinklig auf der Pendel-Nulllinie stehe. Beides ist nicht schwierig, und das Erstere gelingt am sichersten, wenn die früher schon erwähnten Visirzwecken recht fein und accurat und mit einem Mutterchen befestigt sind. Dann kann man gar wohl durch Beobachtung des Pendels, während der Schatten des Stiftes in seine Ziellinie fällt, etwa wie Fig. 346 zeigt, den Höhenwinkel bis auf $\frac{1}{5}$ Grad genau messen.

Fig. 346.



§. 320. Die Ableitung der Zeit aus dieser Messung

beruht aber, kurzgefasst, in folgenden Wahrheiten. In Folge ihrer täglichen (scheinbaren) Bewegung um die Erde hat die Sonne in jeder folgenden Minute Vormittags eine grössere, Nachmittags eine geringere Höhe. Jede **Minute** im Tage hat also ihre besondere Sonnenhöhe.

Jedermann weiss aber ferner, dass diese Höhen im Winter viel kleiner sind als im Sommer, weil die Sonne noch eine zweite (scheinbare) Bewegung am Himmel hat, welche, durch die Neigung der Achse gegen die Erdbahn hervorgebracht, ein Aufsteigen der Sonne nach dem Polarstern zu (von Ende December bis Ende Juni) und ein Wiederabwärtssinken (von Ende Juni bis Ende December) zur Folge hat. — Jedes **Datum**, jeder **Tag** hat also seine besonderen Sonnenhöhen.

Wir wissen aber auch, dass diese Höhen, von uns aus gerechnet, nach dem Nordpole zu immer kleiner werden, weil der Himmelsgürtel (Thierkreis), in welchem die Sonnenbahn (Ekliptik) liegt, um so mehr unter unseren Horizont sinken muss, je weiter wir nach Norden gehen und je mehr in Folge dessen der Polarstern über unser Haupt emporsteigt. Jeder **Ort**, jede geographische Breite (Polhöhe) hat ihre besonderen Sonnenhöhen.

Jene ersterwähnte Minute, also die Zeit, ist sonach abhängig: a) von der Sonnenhöhe, b) von der Jahreszeit oder vielmehr dem Beobachtungstage*), und c) von der

*) Streng genommen: b) von der (projektirten) Entfernung der Sonne vom Frühlingsnachtgleichepunkte, der sogenannten Rectascension, die am 28 Februar eines Schaltjahres allerdings um $^3/_4$ Tag von der am 28. des folgenden Jahres abweicht. Macht man aber die Rechnung für diejenigen mittleren Rectascensionen, welche die Sonne an den einzelnen Tagen aller, der gemeinen, wie der Schalt-Jahre durchschnittlich hat, so kann die grösste Abweichung (kurz vor oder nach dem Schalttage) die eines halben Tages nicht übersteigen, und ist daher beim Gebrauche der hier gegebenen, auf das erwähnte mittlere Jahr bezogenen Tabellen für die gewöhnlichen Fälle ausser Acht zu lassen In Fällen jedoch, wo man recht genau arbeiten, sowie wenn man die Tafeln etwa auch in Amerika gebrauchen wollte, wo die Sonne einen halben Tag später hinkommt, würde man beim

geographischen Breite des Beobachtungsortes. Aus diesen drei Elementen die Entfernung der Sonne vom Mittagskreise (Meridiane) des letzteren zu berechnen (welche Entfernung, in Stunden und Minuten ausgedrückt, die astronomische oder wahre Sonnenzeit giebt), ist ein Geschäft der sphärischen Trigonometrie, jener schönen, mit eben soviel Erhabenheit als Erfolg dem grossen Mechaniker des Himmels nachkonstruirenden Wissenschaft.

§. 321. Mühsame Mathematiker der Vergangenheit haben nicht ermangelt, uns hierin tüchtig vorzuarbeiten und Tafeln der Sonnenhöhen, bezogen auf wahre Sonnenzeit, aufzustellen. Der Messknecht giebt in den folgenden 12 Tafeln eine auf mittlere, bürgerliche, Zeit umgerechnete Probe davon für jeden ersten Tag des Monats und alle Breitengrade Deutschlands. Durch sie ist jeder Deutsche, er mag im fernsten Süden oder Norden wohnen, in den Stand gesetzt (freilich nur an jedem ersten Monatstage), den Gang seiner Uhren zu kontroliren.

Eine Tabelle für alle Tage des Jahres würde offenbar dies Büchlein aus allem Gleichgewicht gebracht haben. Denen, die Geschmack und Nutzen an und in dieser Zeitmessung finden, dürfte es aber nicht unwillkommen sein, zu vernehmen, dass der Verfasser die Bearbeitung einer dergleichen vollständigen Tabelle bereits begonnen hat; indem das in dieser Hinsicht Vorhandene, wie z. B. die Müller'sche Tafel, nicht ganz ohne Fehler, auch nicht auf mittlere Zeit berechnet und betreffs der Construction nicht bequem und zweckmässig ist.

Ablesen der Zeit und der Tafel darauf Rücksicht nehmen müssen, dass der wahre Himmels-Kalender um $^1/_4$ und $^1/_2$ Tag vor und zurück sein kann gegen den gedruckten Kalender Deutschlands. Diese Differenzen heben sich aber, und die obenerwähnte Correction kann sonach umgangen werden, wenn man an einem Tage zwei Zeitmessungen, eine Vor- und eine Nachmittags, bewirkt. Siehe S. 423.

Die eigentliche Praxis der Messknechts-Chronometrie

§. 322. ist nun ganz einfach, und für Jeden, der die S. 295, den vorstehenden §. 319 und dazu die Beispiele unter den Tabellen (S. 432 etc.) angesehen hat, wohl selbstverständlich. Wir wollen sie dessenungeachtet in eine gedrängte Regel zusammenfassen, müssen aber vorher noch in Bezug auf den oberen Eingang der nachfolgenden Tabellen bemerken, dass $^{47}/_{48}$ soviel bedeutet, als: für den Beobachtungsort, der mitten zwischen dem 47. und 48. Parallelkreis oder zwischen 47 und 48 Grad geographischer Breite liegt. Für Orte, die in der Mitte des 48. Breitengrades liegen oder $47\frac{1}{2}{}^0$ Polhöhe haben, wie Basel, Bregenz, Pesth, giebt sonach die erste Spalte die Zeit vollkommen genau; wer aber an der Grenze zweier Grade, z. B. des 48. und 49. wohnt (wer, wie die Orte am Wurmsee und Chiemsee, 48^0 geographische Breite hat), misst die Zeit richtiger, wenn er sich die Zahlen denkt, die an der Grenze, d. h. zwischen der ersten Spalte (des 48. Grades) und der folgenden (des 49.) einzuschalten wären. So z. B. würde jeder in der Mitte des 48. Grades ($^{47}/_{48}$) oder unter $47\frac{1}{2}$ Grad Breite Wohnende, wenn er am 1. Januar Vormittags 6 Grad Sonnenhöhe beobachtete, aus der Tabelle lesen: 8 Uhr 41 Minuten; dagegen, wenn er an der Grenze des 48. Grades, unter 48^0 Breite, wohnt: das Mittel zwischen 8 Uhr 41 und 8 Uhr 47 = 8 Uhr 44 Minuten; und wenn er unter $47\frac{3}{4}{}^0$, also gleichsam $\frac{1}{4}{}^0$ rechts von der ersten Tabellenspalte wohnt und also auch $\frac{1}{4}$ der Differenz $47-41 = \frac{6 \text{ Minuten}}{4} = 1\frac{1}{2}'$ zuzusetzen hat: 8 Uhr $42\frac{1}{2}$ Minute.

Hat das Gradmaass der beobachteten Sonnenhöhe Bruchtheile, und will man nicht warten, bis sie ein voller Grad wird, so schaltet man in ähnlicher Weise in Gedanken die zugehörige Minutenzahl zwischen die betreffenden Horizontalzeilen ein.

Z. B. Wenn der Messknecht in Leipzig (beinahe $51\frac{1}{2}$, also $^{51}/_{52}$ geographische Breite) am ersten Januar Nachmittags $5\frac{1}{4}$ Grad Sonnenhöhe zeigt, hat man abzulesen:

3 Uhr 11 Minuten weniger $\frac{1}{4}$ Differenz von 3 Uhr 11 und 3 Uhr 1 Minute, d. h. 3 Uhr 11 Minuten weniger $\frac{10}{4}$ oder $2\frac{1}{2}$ Minute, d. h. 3 Uhr $8\frac{1}{2}$ Minute.

§. 323. Die praktische Vorschrift kann nunmehr so lauten:

a. Ermittle, etwa durch Nachsehen auf der Landkarte, oder auf dem Schema S. 456 die geographische Breite deines Beobachtungsortes und zeichne dir durch irgend ein deutliches Zeichen diejenige Spalte der Tabellen an, die nach Anleitung des vorigen Paragraphen diesem Orte entspricht*).

b. Schlage von den Tafeln der Sonnenhöhen das Datum auf, das dem Beobachtungstage zugehört.

c. Stecke einen Visirstift *n* genau senkrecht nach S. 163 in den Knecht und halte letzteren oder stelle ihn so vor dir hin, dass der Stift einen deutlichen und hinlänglich langen Schatten genau in seine zugehörige Linie wirft, und lies dabei in der Winkelskala den Pendelstand ab, der die Sonnenhöhe giebt; und

d. suche zu derselben in der aufgeschlagenen Tabelle und entsprechenden Rubrik die Zeit.

Beispiele verschiedener Art finden sich unter den Tafeln beigesetzt.

§. 324. Geschah die Messung behufs der Uhrenregulirung, so stelle man die Uhr unverzüglich auf die abgelesene Zeit, oder notire sich deren Abweichung, vielleicht, um noch einige Male zu beobachten und aus den notirten Abweichungen das Mittel zu nehmen. Macht man eine gute Beobachtung am Vor- und eine dergleichen am Nachmittage, und stellt die Uhr nach dem arithmetischen Mittel

---

*) Als Beispiel hat der Verfasser den Ablesungsort für Tharand (an der oberen Grenze des 51. Grades, d. h. gerade in dem 51. Parallelkreise liegend) auf der ersten Tafel markirt.

beider Ergebnisse, so wird dadurch die Seite 420 Anmerkung erwähnte Correction bewirkt und dadurch auch für jedes Jahr und jedes Land der Erde volle Richtigkeit erlangt. Durch letzteres Verfahren und mit Berücksichtigung der a. S. 422 angegebenen verfeinerten Ablesung hat man es in der That in der Gewalt, die Zeit bis auf die einzelne Minute genau festzustellen (namentlich wenn, wie im Sommer, die Differenz für 1° Sonnenhöhe 6 Minuten beträgt).

§. 325. Für genauere Messungen bis auf die einzelne Minute ist es auch nothwendig, eben so wenig die ersten, als die letzten Zeilen jeder Tabelle zu nehmen. Die letzten entsprechen jener grösseren Sonnenhöhe oder jener höheren Tageszeit, wo die Höhenveränderung der Sonne weniger energisch, daher die Bestimmung weniger empfindlich ist; weshalb denn auch die nächsten Stunden um Mittag herum gar nicht berechnet und aufgeführt sind. Die Benutzung der ersten Zeilen dagegen oder die Beobachtung der Sonne in der Nähe des Horizontes wird beeinträchtigt durch die Strahlenbrechung, indem der Dunstkreis die Strahlen krümmt, dergestalt, dass je nach dem Grade der Temperatur eine Verkleinerung der beobachteten Sonnenhöhe (α) nöthig wird, die man berechnet nach der Formel $V = \frac{1}{56 \text{ bis } 64 \times tg\alpha}$ Grade, wo 56 für — 20° Temperatur und 64 für + 20° Temperatur, also für 0° der Faktor 60 gilt. Da der Messknecht auch eine Tangentenskala ist, kann er diese Reduction ebenfalls mit eigener Kraft und ohne andere Hülfe bewirken.

Beispiel. Bei ziemlich Null Grad Temperatur ward beobachtet die Sonnenhöhe 5 Grad; wie hoch war dieselbe eigentlich, und wie geht die Uhr, wenn die Messung in Tharand (51° Breite) am 1. März geschah, und die Uhr im Momente der Ablesung 7 Uhr 15 Minuten zeigte? — Die *tang.* 5° giebt der Knecht = 0,09; 60 *tg.* 5° = 60 × 0,09 = 5,4; also die nöthige Verminderung $V = \frac{1}{5,4}$ oder knapp $1/5$ Grad, und dem-

gemäss die Sonnenhöhe $\alpha = 4^4/_5{}^{\circ}$. — Die Tabelle des 1. März giebt aber für die Grenze des 51. und 52. Breitegrades zu 4° Sonnenhöhe 7 Uhr 17 und zu 5° Sonnenhöhe 7 Uhr 24, also zu $4^4/_5{}^{\circ}$ der Höhe 7 Uhr $17 + {}^4/_5 \times 7$ Minuten = 7 Uhr $22^1/_2$ Minute. — Die Uhr geht also $22^1/_2 - 15 = 7^1/_2$ Minute zu spät und ist um so viel vorzurücken.

Bestimmung der wahren Sonnenzeit.

§. 326. Dass die Sonne, in Folge des Laufes der Erde um sie, jährlich durch den ganzen Thierkreis, und also täglich von einem Sterne zum anderen wandert, ist Jedem bekannt; wohl auch, dass die Geschwindigkeit, mit welcher die Erde die Sonne umkreist, und folglich auch der letzteren scheinbare Wanderung am Himmel, nicht gleichförmig ist. Haben wir z. B. irgendwo eine Mittagslinie gezogen (s. S. 428) und beobachten damit am 1. September den Moment, in welchem die Sonne in den Meridian tritt (kulminirt), und stellen unsere gleichförmig nach bürgerlicher Zeit gehende Uhr sofort auf 12 Uhr, so können wir gewahren, wie im Laufe des Septembers die Sonne durchschnittlich um $^1/_3$ Minute jeden Tag früher in den Mittagskreis tritt als am vorhergehenden, so dass am Ende dieses Monats die Uhr $^1/_3 \times 30 = 10$ Minuten nachgeht, und die Sonne schon im Mittag steht, wenn es nach der Uhr erst 11 Uhr 50 Minuten ist. Diese Differenz wächst Ende Oktober bis zu 16 Minuten, nimmt von Mitte November an wieder ab und ist um Weihnachten wieder = Null, d. h. der »wahre Mittag« trifft nun mit dem der Uhr wieder zusammen.

§. 327. Sollten unsere Uhren also die »wahre Sonnenzeit« angeben, so wäre des Stellens kein Ende, und noch dazu würde der bürgerliche Tag ungleich lang sein. Aus diesem Grunde sind unsere richtig gehenden Uhren so regulirt, dass sie von allen den verschiedenen Sonnentagen eines Jahres den durchschnittlichen oder mittleren, in 24 Stunden getheilt, angeben. Für jeden Tag des Jahres ist

die Differenz zwischen der wahren und mittleren Zeit (die sogenannte Zeitgleichung) bekannt, so dass man leicht durch Zu- oder Abrechnung von so und so viel Minuten die eine aus der anderen ableiten kann, wie auch an der Basis der weiter unten folgenden Tafeln der Sonnenhöhen zu ersehen ist.

Beispiel. Man will die Tafel des 1. Mai benutzen, um eine Uhr auf wahre Zeit zu stellen, und hat deshalb den Vormittag benutzt, mittels mehrerer Beobachtungen des Messknechts die Uhr genau auf mittlere Zeit zu stellen. Da nun, nach der letzten Zeile dieser Tafel (S. 440) die wahre Zeit 3 Minuten grösser ist, als die mittlere, so hat man einfach den Zeiger um 3 Minuten vorwärts zu rücken.

Zusatz. Richtiger wird das Resultat, wenn man Beobachtungen des Vor- und Nachmittags anwendet, um daraus die Stellung der Uhr nach mittlerer Zeit möglichst genau zu finden.

§. 328. Tafel der Zeitgleichung oder Aufstellung der Minuten, um welche die mittlere Zeit verschieden ist von der wahren.

(Es bedeutet »1. Januar + 4 und 1. Mai — 3« die mittlere Zeit ist am 1. Januar 4 Minuten grösser und am 1. Mai 3 Minuten kleiner als die wahre.)

Zum Beispiel. Eine gewöhnliche Sonnenuhr, beobachtet am 11. Februar, zeige auf $10^1/_4$ Uhr. Welche Zeit ist es nach bürgerlicher Uhr?

Da die Correction am 11. Februar von der Tabelle der Zeitgleichung = 15 angegeben ist, folgt die mittlere Zeit = 10 Uhr 15 Minuten + 15 Minuten = 10 Uhr 30 Minuten.

Am	Januar.	Februar.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	September.	Oktober.	November.	December.
1	+4	+14	+13	+4	-3	-3	+3	+6	-0	-10	-16	-10
2	+5	+14	+12	+4	-3	-2	+4	+6	-1	-11	-16	-10
3	+5	+14	+12	+3	-3	-2	+4	+6	-1	-11	-16	-9
4	+6	+14	+12	+3	-4	-2	+4	+6	-2	-12	-16	-9
5	+6	+14	+12	+3	-4	-2	+4	+6	-2	-12	-16	-9
6	+6	+15	+11	+2	-4	-2	+4	+5	-2	-12	-16	-8
7	+7	+15	+11	+2	-4	-2	+4	+5	-2	-12	-16	-8
8	+7	+15	+11	+2	-4	-1	+4	+5	-3	-12	-16	-8
9	+8	+15	+11	+1	-4	-1	+5	+5	-3	-13	-16	-7
10	+8	+15	+10	+1	-4	-1	+5	+5	-3	-13	-16	-7
11	+9	+15	+10	+1	-4	-1	+5	+5	-4	-13	-16	-7
12	+9	+15	+10	+1	-4	-1	+5	+5	-4	-13	-16	-6
13	+9	+15	+10	+1	-4	-1	+5	+5	-4	-14	-16	-6
14	+10	+15	+9	+0	-4	-0	+5	+4	-5	-14	-15	-5
15	+10	+15	+9	+0	-4	-0	+5	+4	-5	-14	-15	-5
16	+10	+14	+9	-1	-4	+0	+6	+4	-5	-15	-15	-4
17	+11	+14	+8	-1	-4	+1	+6	+4	-6	-15	-15	-3
18	+11	+14	+8	-1	-4	+1	+6	+3	-6	-15	-14	-3
19	+11	+14	+8	-1	-4	+1	+6	+3	-6	-15	-14	-2
20	+12	+14	+8	-1	-4	+1	+6	+3	-7	-15	-14	-2
21	+12	+14	+7	-1	-4	+1	+6	+3	-7	-15	-14	-1
22	+12	+14	+7	-2	-4	+2	+6	+3	-7	-15	-13	-1
23	+12	+14	+7	-2	-4	+2	+6	+2	-8	-16	-13	-0
24	+13	+14	+6	-2	-4	+2	+6	+2	-8	-16	-13	+0
25	+13	+13	+6	-2	-3	+2	+6	+2	-8	-16	-13	+1
26	+13	+13	+6	-2	-3	+2	+6	+2	-9	-16	-12	+1
27	+13	+13	+5	-3	-3	+3	+6	+2	-9	-16	-12	+2
28	+13	+13	+5	-3	-3	+3	+6	+1	-9	-16	-11	+2
29	+14	+13	+5	-3	-3	+3	+6	+1	-10	-16	-11	+3
30	+14		+5	-3	-3	+3	+6	+0	-10	-16	-10	+3
31	+14		+4		-3		+6	+0		-16		+4

§. 329. **Bestimmung der Mittagslinie und des wahren Mittags.**

Um eine Meridianlinie, etwa auf einem Fensterbrette, zur Beobachtung des (wahren) Mittags etc., oder auf einem Messtische behufs der Orientirung zu ziehen, ist es das Einfachste, den Schatten einer **vertikalen** Kante im Momente des wahren Mittags zu beobachten. Diese Schattenlinie giebt bekanntlich die gesuchte Richtung des Meridians.

Diese einfachste Methode ist aber nur ausführbar, wenn man eine nach wahrer Zeit gestellte Uhr hat. Die Regel ihrer Ausführung lautet demnach: Stelle deine Uhr mittels des Knechtes nach vorigem Paragraphen (etwa Tags vorher) auf wahre Sonnenzeit, und bezeichne, sobald sie 12 Uhr zeigt, die Schattengrenze einer lothrechten Kante. (Während diese Kante möglichst genau im Lothe stehen muss, kann die Ebene (das Fensterbrett), auf welcher die Fixirung der Mittagslinie statt hat, jede beliebige Neigung haben).

Soll dieser Mittagsstrich benutzt werden, um den Moment des **mittleren** Mittags zu bestimmen, so stellt man im Momente, wo der Schatten in den Strich tritt, eine Uhr auf 12 Uhr *plus* oder *minus* so viel Minuten, wie die Tafel der Zeitgleichung für den betreffenden Tag fordert. Geschähe die Beobachtung z. B. am 1. December, so würde im Momente des Schatteneinschlages die Uhr auf 12 Uhr — 10 Minuten = 11 Uhr 50 Minuten zu stellen sein.

Es gewährt also eine solche Mittagslinie auch ein Mittel, die Uhren auf bürgerliche Zeit zu stellen.

§. 330. **Den Gang einer Uhr zu reguliren, dass der Tag genau dem mittleren Sonnentage entspricht.**

Bekanntlich sind alle Uhren so eingerichtet, dass auch der Laie ihren Gang beschleunigen und verzögern kann; bei den Pendeluhren durch Auf- oder Abwärtsschrauben der Linse, bei den Taschenuhren durch Verkürzung oder Verlängerung der Spiralfeder mittels Verschiebung des Stiftes auf der kleinen, gewöhnlich mit *Avance* und *Retard* bezeichneten Stellscheibe. Um diese Regulirungen richtig bewirken zu können, muss man beobachten, ob die Uhr

während des Zeitraumes eines mittleren Tages genau 24 Stunden zurücklegt. Man kann dies auf folgende Weise.

§. 331. 1. **Methode.** Stelle mittels des Messknechts nach Zusatz a. S. 426 die Uhr genau auf mittlere Zeit und beobachte von Tag zu Tag oder Woche zu Woche, ob die fernere Zeitmessung des Knechtes mit der der Uhr übereinstimmt. Im Verneinungsfalle ist die Schnelligkeit der letzteren angemessen zu korrigiren.

§. 332. 2. **Methode.** Beobachte mittels einer Mittagslinie (§. 329) den Eintritt des wahren Mittags und gleichzeitig, ob die Abweichung der Uhr immer genau der der Zeitgleichung (§. 328) entspricht.

Beispiel. Am 7. September ward beim Eintritte des wahren Mittags die Uhr auf 11 Uhr 58 Minuten gestellt, wie es die Tabelle a. S. 427 verlangt; und als man am anderen Tage den Eintritt des Schattens in die Mittagslinie beobachtete, zeigte die Uhr 11 Uhr 59 Minuten. In wie fern ist ihr Gang unrichtig?

Nach der Zeitgleichung des 8. September sollte die Uhr zeigen 11 Uhr 57 Minuten; sie läuft also täglich 2 Minuten vor.

§. 333. 3. **Methode.** Die Erde braucht $365\frac{1}{4}$ Tag zur Umkreisung der Sonne; oder die Sonne $365\frac{1}{4}$ Tag um in ihrer Wanderung von rechts nach links unter den Sternen des Thierkreises ihren scheinbaren Umlauf zu vollenden. Die eingebildete gleichförmige oder mittlere Sonne steht also jeden Tag um circa $\frac{1}{365}$ des vollen Thierkreises weiter links als am vorhergehenden, oder, wenn wir diesen Kreis in 24 Theile (Stunden) theilen, um $\frac{24}{365\frac{1}{4}}$ Stunden $= \frac{24 \cdot 60}{365\frac{1}{4}}$ Minuten $=$ 3 Minuten 56 Sekunden. Sie kulminirt also im Vergleich zu dem Sterne, bei dem sie vorher stand, um 3 Minuten 56 Sekunden später; d. h. sie braucht von Mittag zu Mittag 3 Minuten 56 Sekunden mehr als jeder Fixstern zu seiner scheinbaren Umwälzung; oder: der **Sterntag** ist gegen den mittleren Sonnentag nur 23

Stunden 56 Minuten 4 Sekunden lang. Darin liegt für die Aufgabe dieses Paragraphen die Anweisung:

Richte ein irgendwie befestigtes Fernrohr nach irgend einem leicht kenntlichen Sterne des südlichen Himmels und notire den Stand der Uhr, sobald dieser Stern genau in der Mitte des Gesichtsfeldes des Rohres steht. Lass das letztere unberührt und beobachte am anderen Abend den Durchgang des Sternes auf dieselbe Weise, so muss die Uhr genau 3 Minuten 56 Sekunden oder $3 \frac{14}{15}$ Minuten weniger zeigen, als am vorigen Tage.

Fig. 347.



T a f e l n

d e r

bürgerlichen Zeit zu der mit dem Knechte beobachteten Sonnenhöhe für jeden ersten Tag des Monats, zunächst für ganz Deutschland, brauchbar aber auch für alle Länder der Erde (s. S. 420), die mit diesem in gleicher geographischer Breite liegen.

Am 1. Januar.

V o r m i t t a g s.

Grade der Sonnen-Höhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	7 . 55	7 . 59	8 . 4	8 . 8 *	8 . 13	8 . 19	8 . 24
1	8 . 2	8 . 6	8 . 11	8 . 16	8 . 22	8 . 27	8 . 33
2	8 . 9	8 . 14	8 . 19	8 . 24	8 . 30	8 . 36	8 . 43
3	8 . 17	8 . 22	8 . 28	8 . 33	8 . 39	8 . 45	8 . 52
4	8 . 25	8 . 30	8 . 36	8 . 42	8 . 48	8 . 55	9 . 2
5	8 . 33	8 . 39	8 . 45	8 . 51	8 . 57	9 . 5	9 . 13
6	8 . 41	8 . 47	8 . 54	9 . 0	9 . 7	9 . 16	9 . 24
7	8 . 49	8 . 56	9 . 3	9 . 10	9 . 17	9 . 26	9 . 36
8	8 . 58	9 . 5	9 . 12	9 . 20	9 . 28	9 . 37	9 . 48
9	9 . 7	9 . 14	9 . 22	9 . 31	9 . 39	9 . 50	10 . 2
10	9 . 16	9 . 24	9 . 32	9 . 42	9 . 52	10 . 3	
11	9 . 26	9 . 35	9 . 43	9 . 54	10 . 5		
12	9 . 36	9 . 45	9 . 55	10 . 6			
13	9 . 47	9 . 57	10 . 8				
14	9 . 58	10 . 9					
15	10 . 10						
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 4 Minuten.)						

Z u m B e i s p i e l.

1. Beispiel. In Leipzig (das nahe in 51½° Breite, d. h in der Mitte zwischen den Parallelkreisen 51 und 52 liegt) zeigte am Neujahrsmorgen das Pendel des Messknechts (s S. 295) den Höhenwinkel der Sonne 7 Grad. Welche Zei mussten in diesem Augenblicke die Uhren in Leipzig zeigen? — Für die Mitte des 51. Grades giebt die Spalte $^{51}/_{52}$ be 7° sofort 9 Uhr 17 Minuten.

2. Beispiel. Wenn am Nachmittage des 1. Januars in Tha-

Am 1. Januar.

Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4 . 13	4 . 9	4 . 4	4 . 0 *	3 . 55	3 . 49	3 . 44
1	4 . 6	4 . 2	3 . 57	3 . 52	3 . 46	3 . 41	3 . 35
2	3 . 59	3 . 54	3 . 49	3 . 44	3 . 38	3 . 32	3 . 25
3	3 . 51	3 . 46	3 . 40	3 . 35	3 . 29	3 . 23	3 . 16
4	3 . 43	3 . 38	3 . 32	3 . 26	3 . 20	3 . 13	3 . 6
5	3 . 35	3 . 28	3 . 23	3 . 17	3 . 11	3 . 3	2 . 55
6	3 . 27	3 . 21	3 . 14	3 . 8	3 . 1	2 . 53	2 . 44
7	3 . 19	3 . 12	3 . 5	2 . 58	2 . 51	2 . 42	2 . 32
8	3 . 10	3 . 3	2 . 56	2 . 48	2 . 40	2 . 31	2 . 20
9	3 . 1	2 . 54	2 . 46	2 . 37	2 . 29	2 . 18	2 . 6
10	2 . 52	2 . 44	2 . 36	2 . 26	2 . 16	2 . 5	
11	2 . 42	2 . 33	2 . 25	2 . 14	2 . 3		
12	2 . 32	2 . 23	2 . 13	2 . 2			
13	2 . 21	3 . 11	2 . 0				
14	2 . 10	1 . 59					
15	1 . 58						
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 4 Minuten.)						

rand (51° Breite) der Knecht die Sonnenhöhe zu 7° angiebt, so ist die mittlere Zeit in diesem Momente? Für das **Ende** des 51. Grades giebt die Nachmittagstafel bei 7° die Zeit zwischen 2 Uhr 58 und 2 Uhr 51; d. h. die richtige Uhr müsste 2 Uhr 54½ Minuten zeigen.

3. **Beispiel.** In **Pesth** (47½°) wurde, um die Uhr zu stellen, die Sonnenhöhe am 1. Januar ziemlich früh beobachtet und gleich 6½° gefunden; also war im Augenblicke der Beobachtung nach Spalte 47/48 die Zeit 8 Uhr 45 Minuten.

Am 1. Februar.

V o r m i t t a g s.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	7.33	7.36	7.39	7.42	7.45	7.49	7.53
1	7.39	7.42	7.46	7.49	7.53	7.56	8. 0
2	7.46	7.49	7.53	7.56	8. 0	8. 4	8. 8
3	7.53	7.56	8. 0	8. 3	8. 8	8.12	8.16
4	8. 0	8. 3	8. 7	8.11	8.16	8.20	8.25
5	8. 7	8.10	8.14	8.18	8.23	8.28	8.33
6	8.14	8.18	8.22	8.26	8.31	8.36	8.42
7	8.21	8.25	8.29	8.33	8.39	8.45	8.51
8	8.28	8.33	8.37	8.42	8.48	8.54	9. 0
9	8.36	8.40	8.45	8.50	8.56	9. 3	9. 9
10	8.43	8.48	8.54	8.59	9. 5	9.12	9.19
11	8.51	8.56	9. 2	9. 8	9.14	9.22	9.29
12	8.59	9. 4	9.11	9.17	9.24	9.32	9.40
13	9. 7	9.13	9.20	9.26	9.34	9.43	9.52
14	9.15	9.22	9.29	9.36	9.44	9.54	10. 4
15	9.24	9.31	9.39	9.47	9.56	10. 6	10.17
16	9.33	9.41	9.49	9.58	10. 7	10.19	
17	9.43	9.51	10. 0	10.10	10.20		
18	9.53	10. 1	10.11	10.22			
19	10. 3	10.13	10.21				
20	10.14						
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 14 Minuten.)						

4. **Beispiel.** In der Nähe von **Hamburg** ($53\frac{1}{2}^\circ$) ward die Sonnenhöhe am Nachmittage des 1. Febr. = 11 Grad gefunden; die mittlere Zeit war also in diesem Augenblicke nach vorstehender Tafel und Spalte $^{53}/_{54}$ = 2 Uhr 59 Minuten.

5. **Beispiel.** Wenn in **Nord-England** oder **Insel Rügen** oder **Königsberg** oder **Smolensk** (sämmtlich circa $54\frac{1}{2}^\circ$) der Knecht am 1. Febr. Vormittags 12° Sonnenhöhe zeigte, so war allda die mittlere Zeit? Spalte $^{54}/_{55}$ ist zwar in der Tabelle nicht vorhanden, aber hinlänglich genau zu finden.

Am 1. Februar.

Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4.55	4.52	4.49	4.46	4.43	4.39	4.35
1	4.49	4.46	4.42	4.39	4.35	4.32	4.28
2	4.42	4.39	4.35	4.32	4.28	4.24	4.20
3	4.35	4.32	4.28	4.25	4.20	4.16	4.12
4	4.28	4.25	4.21	4.17	4.12	4. 8	4. 3
5	4.21	4.18	4.14	4.10	4. 5	4. 0	3.55
6	4.14	4.10	4. 6	4. 2	3.57	3.52	3.46
7	4. 7	4. 3	3 59	3.55	3.49	3.43	3.37
8	4. 0	3.55	3.51	3.46	3.40	3.34	3.28
9	3.52	3.48	3.43	3.38	3.32	3.25	3.19
10	3.45	3.40	3.34	3.29	3.23	3.16	3. 9
11	3.37	3.32	3 26	3.20	3.14	3. 6	2.59
12	3.29	3.24	3.17	3.11	3. 4	2.56	2.48
13	3.21	3.15	3. 8	3. 2	2.54	2.45	2.36
14	3.13	3. 6	2.59	2.52	2 44	2.34	2.24
15	3. 4	2.57	2.49	2 41	2.32	2.22	2.10
16	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2. 9	
17	2.45	2.37	2.28	2.18	2. 8		
18	2.35	2.27	2.17	2. 6			
19	2.25	2.15	2. 7				
20	2.14						
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 14 Minuten.)						

Bei 12° ist die Differenz zwischen den beiden letzten Spalten 40 — 32 = 8 Minuten; also würde es für den 55. Grad heissen: 9 Uhr 40 + 8 = 9 Uhr 48 Minuten.

6. Beispiel. In Lausanne oder auf dem Splügen oder in Szegedin (sämmtlich nahe 46½° Breite) zeigte die Beobachtung der Sonnenhöhe 9 Grad; welche Zeit war es? — Bei 9° zeigt die Spalte des Grades 48 und 49 die Minutenzahl 36 und 40 (4 Minuten Differenz); also würde hier für den Grad 46 nahe 32′, mithin die Zeit 8 Uhr 32′ gewesen sein.

Am 1. März.

Vormittags. | Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54	Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	6.46	6 48	6.49	6.50	6 51	6.53	6.54	0	5.40	5 38	5.37	5 36	5.35	5.33	5.32
1	6 52	6.54	6.55	6.56	6.58	6.59	7 . 1	1	5.34	5.32	5.31	5.30	5·28	5.27	5.25
2	6.58	7 . 0	7 . 1	7 . 3	7 . 5	7 . 6	7 . 8	2	5.28	5.26	5.25	5.23	5.21	5.20	5.18
3	7 . 4	7 . 6	7 . 7	7 . 9	7.11	7.13	7·15	3	5.22	5.20	5.19	5.17	5.15	5.13	5.11
4	7.11	7.12	7.14	7.16	7.18	7.20	7.22	4	5.15	5.14	5.12	5.10	5 . 8	5 . 6	5 . 4
5	7.17	7.18	7.20	7.23	7.25	7.27	7.29	5	5 . 9	5 . 8	5 . 6	5 . 3	5 . 1	4.59	4.57
6	7.23	7.25	7.27	7.30	7.32	7.34	7.37	6	5 . 3	5 . 1	4.59	4.56	4.54	4.52	4.49
7	7.29	7.31	7.33	7.36	7.39	7.41	7.44	7	4.57	4.55	4.53	4.50	4.47	4.45	4.42
8	7.36	7.38	7.40	7.43	7.45	7.48	7.51	8	4.50	4.48	4.46	4 43	4 41	4.38	4.35
9	7.42	7.44	7.47	7.50	7.53	7.55	7.58	9	4.44	4.42	4.39	4.36	4.33	4.31	4.28
10	7.48	7.51	7.54	7.57	8 . 0	8 . 3	8 . 6	10	4.38	4.35	4 32	4·29	4.26	4 23	4 20
11	7.54	7.57	8 . 0	8 . 4	8 . 7	8.10	8.14	11	4.32	4.29	4.26	4.22	4.19	4.16	4·12
12	8 . 1	8 . 4	8 . 7	8.11	8.14	8.18	8.22	12	4.25	4.22	4 19	4.15	4.12	4 . 8	4 . 4
13	8 . 8	8.11	8.14	8.18	8.21	8.25	8.30	13	4.18	4.15	4.12	4 . 8	4 . 5	4 . 1	3.56
14	8.15	8.18	8.21	8.25	8.29	8.33	8.38	14	4.11	4 . 8	4 · 5	4 . 1	3 57	3.53	3 48

15	8.21	8.25	8.29	8.32	8.37	8.41	8.46	15	4 . 5	4 . 1	3 57	3 54	3.49	3.45	3.40
16	8.28	8.32	8.36	8.40	8.44	8.49	8 54	16	3.58	3.54	3.50	3.46	3.42	3.37	3.32
17	8.35	8.39	8.43	8 48	8.52	8.57	9 . 3	17	3.51	3.47	3.43	3.38	3.34	3.29	3.23
18	8.42	8.46	8.51	8.56	9 . 1	9 . 6	9.12	18	3 44	3.40	3.35	3.30	3.25	3.20	3.14
19	8 49	8·54	8.59	9 . 4	9 . 9	9.15	9.21	19	3.37	3.32	3.27	3.22	3.17	3 11	3 . 5
20	8.57	9 . 2	9 . 7	9.12	9.18	9.24	9.31	20	3.29	3.24	3.19	3.14	3 . 8	3 . 2	2.55
21	9 . 4	9 . 9	9.15	9.20	9.27	9.34	9.41	21	3.22	3.17	3.11	3 . 6	2.59	2.53	2.44
22	9.12	9.17	9 23	9.29	9.36	9.44	9.52	22	3.14	3 . 9	3 . 3	2.57	2.50	2 43	2.35
23	9.20	9.25	9.32	9.38	9.46	9.54	10 . 3	23	3 . 6	3 . 1	2 54	2.48	2.41	2.32	2.23
24	9.28	9.34	9.41	9.48	9.56	10 . 5	10.15	24	2 58	2.52	2.45	2 38	2.30	2.21	2.11
25	9 36	9.44	9.50	9.58	10 . 7	10.17		25	2.50	2.42	2.36	2.28	2.19	2 . 9	
26	9.45	9·52	10 . 0	10 . 9	10.18			26	2.41	2.34	2 26	2.17	2 . 8		
27	9.54	10 2	10 11	10.21				27	2.32	2 24	2.15	2 . 5			
28	10 4	10.12	10.22					28	2.22	2.14	2 . 4				
29	10 15							29	2.11						
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 13 Minuten)								(Wahre Zeit = Mittlere minus 13 Minuten.)						

7. **Beispiel.** Für Memel, Kopenhagen, Kolding und alle Orte des 56. Breitengrades, z. B. Südschottland, kann man auch noch die Spalte $^{55}/_{56}$ mittels der doppelten Differenz der beiden letzten Tafelspalten finden. Zeigte z. B. der Messknecht am 1. März 10 Grad Sonnenhöhe in Kopenhagen, so war die Zeit, wenn es Vormittags geschah (da in Zeile 10 die Differenz der beiden letzten Spalten = 3 Minuten) 8 Uhr 6 + 6 Min. = 8 Uhr 12 Min.; und wenn es Nachmittags war, 4 Uhr 20 Min. − 6 Min. = 4 Uhr 14 Min.

Zusatz. Je weiter man auf solche Weise über die Tafeln hinausgeht, desto unsicherer wird natürlich die Bestimmung.

Am 1. April.

	Vormittags.								Nachmittags.						
Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.							Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.								Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54		47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	5.44	5.43	5.43	5.42	5.41	5.40	5 39	0	6.24	6.25	6.25	6.26	6.27	6.28	6,29
3	6 . 2	6 . 1	6 . 1	6 . 1	6 . 0	6 . 0	5.59	3	6 . 6	6 . 7	6 . 7	6 8	6 . 8	6 . 8	6 . 9
4	6 . 8	6 . 8	6 . 7	6 . 7	6 . 7	6 . 7	6 . 6	4	6 . 0	6 . 0	6 . 1	6 . 1	6 . 1	6 . 1	6 . 2
5	6.14	6.14	6.13	6.13	6.13	6.13	6.13	5	5.54	5.54	5.55	5.55	5.55	5.55	5.55
6	6.20	6,20	6.20	6.20	6,20	6,20	6.20	6	5.48	5.48	5.48	5.48	5.48	5.48	5.48
7	6.26	6.26	6 26	6.26	6.26	6.26	6.26	7	5.42	5.42	5.42	5.42	5.42	5.42	5.42
8	6.32	6.32	6.32	6.32	6.32	6.32	6.32	8	5.36	5.36	5.36	5.36	5,36	5.36	5.36
9	6.38	6.38	6.38	6.38	6.39	6.39	6.40	9	5.30	5.30	5.30	5.30	5.29	5.29	5.28
10	6.44	6.44	6.44	6.45	6.45	6.46	6.47	10	5.24	5.24	5 24	5.23	5.23	5.22	5.21
11	6.49	6.50	6,50	6.51	6.52	6.52	6.53	11	5.19	5.18	5 18	5.17	5.16	5.16	5,15
12	6.55	6.56	6.57	6.58	6.58	6.59	7 . 0	12	5.13	5.12	5.11	5.10	5 . 9	5 . 9	5 . 8
13	7 . 1	7 . 2	7 . 3	7 . 4	7 . 5	7 . 6	7 . 7	13	5 . 7	5 . 6	5 . 5	5 . 4	5 . 3	5 . 2	5 . 1
14	7 . 7	7 . 8	7 . 9	7.10	7.11	7.13	7.14	14	5 . 1	5 . 0	4.59	4.58	4.58	4.55	4.54
15	7.13	7.14	7.15	7.16	7.18	7.19	7.21	15	4.55	4.54	4 53	4.52	4.51	4.49	4.47
16	7.19	7.20	7.22	7.23	7.25	7.26	7.28	16	4.49	4.48	4.46	4.45	4.43	4.42	4.40

17	7.25	7.26	7.28	7.29	7.31	7.33	7.35
18	7.31	7.33	7.34	7.36	7.38	7.40	7.42
19	7 37	7.39	7.40	7.42	7.45	7.47	7.49
20	7.44	7.45	7.47	7.49	7.51	7.54	7.56
21	7.50	7.51	7.53	7.56	7.58	8 . 1	8 . 3
22	7.56	7.58	8 0	8 . 3	8 . 6	8 . 8	8.10
23	8 . 2	8 . 4	8 . 6	8 . 9	8.12	8.15	8.17
24	8 . 9	8.11	8.13	8.16	8.19	8.22	8.25
25	8.15	8.17	8.21	8.23	8.26	8.29	8.33
26	8.21	8.24	8.27	8 30	8.33	8.37	8.41
27	8.27	8.30	8.34	8 37	8.41	8.44	8.49
28	8.34	8.37	8.41	8.44	8.48	8.52	8.57
29	8.41	8.44	8.48	8.51	8.56	8.59	9 . 5
30	8.48	8.51	8.55	8 59	9 . 4	9 . 8	9.13
31	8.55	8.58	9 . 2	9 . 6	9.12	9.16	9 22
32	9 . 2	9 . 6	9.10	9.15	9.20	9 25	9.31
33	9 . 9	9.13	9.18	9.23	9.28	9.34	9.41
34	9.16	9.21	9.26	9.31	9 37	9.43	9.51
35	9.23	9.28	9.34	9 40	9.46	9.53	10 . 1
36	9.31	9.36	9.42	9.49	9.56	10 . 3	10.12
37	9 39	9.45	9.51	9.58	10 . 6		
38	9.47	9 54	10 . 0	10 . 7			
39	9.56	10 . 3	10.10				
40	10 . 5	10.12					
41	10.13						

(Wahre Zeit = Mittlere minus 4 Minuten.)

17	4.43	4 42	4.40	4.39	4.37	4.35	4.33
18	4.37	4.35	4.34	4.32	4.30	4.28	4.26
19	4.31	4.29	4.28	4.26	4.23	4.21	4.19
20	4.24	4.23	4.21	4.19	4.17	4.14	4.12
21	4.18	4.17	4.15	4.12	4.10	4 . 7	4 . 5
22	4.12	4 10	4 . 8	4 . 5	4 . 2	4 . 0	3 58
23	4 . 6	4 . 4	4 . 2	3.59	3.56	3.53	3.51
24	3.59	3 57	3 55	3.52	3.49	3.46	3.43
25	3.53	3.51	3.47	3.45	3.42	3 39	3.35
26	3.47	3.44	3.41	3.38	3.35	3.31	3.27
27	3.41	3.38	3.34	3.31	3.27	3.24	3.19
28	3.34	3.31	3.27	3.24	3.20	3.16	3.11
29	3.27	3.24	3.20	3.17	3.12	3 . 9	3 . 3
30	3.20	3.17	3.13	3 . 9	3 . 4	3 . 0	2.55
31	3.13	3.10	3 . 6	3 . 2	2.56	2.52	2.46
32	3 . 6	3 . 2	2.58	2.53	2.48	2.43	2.37
33	2 59	2.55	2.50	2.45	2.40	2.33	2.27
34	2 52	2.47	2.42	2.37	2.31	2 25	2.17
35	2.45	2.40	2.34	2.28	2.22	2.15	2 . 7
36	2.37	2.32	2.26	2.19	2.12	2 . 5	1.56
37	2.29	2.23	2.17	2.10	2 . 2		
38	2.21	2.14	2 . 8	2 . 1			
39	2.12	2 . 5	1.58				
40	2 . 3	1.56					
41	1.55						

(Wahre Zeit = Mittlere minus 4 Minuten.)

Am 1. Mai.

Vormittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4.49	4.46	4.43	4.41	4.38	4.35	4.32
Diff. 1°	+ 6,2	+ 6,3	+ 6,5	+ 6,6	+ 6,8	+ 6,9	+ 7,1
10	5.51	5.49	5.48	5.47	5.46	5.44	5.43
Diff. 1°	+ 6,0	+ 6,1	+ 6,2	+ 6,2	+ 6,4	+ 6,6	+ 6,8
15	6.21	6.20	6.19	6.18	6.18	6.17	6.17
16	6.27	6.26	6.25	6.25	6.25	6.24	6.24
17	6.32	6.32	6.31	6.31	6.31	6.30	6.30
18	6.38	6.38	6.38	6.38	6.37	6.37	6.37
19	6.44	6.44	6.44	6.44	6.44	6.43	6.43
20	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50
21	6.56	6.56	6.56	6.56	6.56	6.56	6.57
22	7 . 2	7 . 2	7 . 2	7 . 3	7 . 3	7 . 3	7 . 4
23	7 . 8	7 . 8	7 . 8	7 . 9	7 . 9	7.10	7.11
24	7.14	7.14	7.15	7.15	7.16	7.17	7.18
25	7.20	7.20	7.21	7.21	7.22	7.23	7.24

Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	7 . 5	7 . 8	7.11	7.13	7.16	7.19	7.22
Diff. 1°	— 6,2	— 6,3	— 6,5	— 6,6	— 6,8	— 6,9	— 7,1
10	6 . 3	6 . 5	6 . 6	6 . 7	6 . 8	6.10	6.11
Diff. 1°	— 6,0	— 6,2	— 6,2	— 6,2	— 6,4	— 6,6	— 6,8
15	5.33	5.34	5.35	5.36	5.36	5.37	5.37
16	5.27	5.28	5.29	5.29	5.29	5.30	5.30
17	5.22	5.22	5.23	5.23	5.23	5.24	5.24
18	5.16	5.16	5.16	5.16	5.17	5.17	5.17
19	5.10	5.10	5.10	5.10	5.10	5.11	5.11
20	5 . 4	5 . 4	5 . 4	5 . 4	5 . 4	5 . 4	5 . 4
21	4.58	4.58	4.58	4.58	4.58	4.58	4.57
22	4.52	4.52	4.52	4.51	4.51	4.51	4.50
23	4.46	4.46	4.46	4.45	4.45	4.44	4.43
24	4.40	4.40	4.39	4.39	4.38	4.37	4.36
25	4.34	4.34	4.33	4.33	4.32	4.31	4.30

26	7.26	7.26	7.27	7.28	7.29	7.30	7,31
27	7.32	7.32	7.33	7.34	7.35	7.36	7.38
28	7,38	7.39	7.40	7.41	7.42	7.43	7.45
29	7.44	7.45	7.46	7,47	7.49	7.50	7.52
30	7.50	7.51	7.52	7.54	7.55	7.57	7.59
31	7.56	7.57	7.58	8 . 0	8 . 2	8 . 4	8 . 6
32	8 . 2	8 . 3	8 . 5	8 . 7	8 . 9	8.11	8.13
33	8 . 8	8 . 9	8.11	8.13	8.15	8.18	8.20
34	8.14	8.16	8.18	8.20	8.22	8.25	8.27
35	8.20	8.22	8.24	8.26	8.29	8.32	8.34
36	8.26	8 29	8.31	8.33	8.36	8.39	8.42
37	8.32	8.35	8 37	8.40	8.43	8.46	8.49
38	8.39	8.41	8.44	8.47	8.50	8.53	8.57
39	8.45	8.48	8.51	8.54	8.57	9 . 1	9 . 5
40	8.52	8.55	8.58	9 . 1	9 . 5	9 . 9	9.13
41	8.58	9 . 1	9 . 5	9 . 8	9.12	9.17	9.21
42	9 . 5	9 . 8	9.12	9.16	9.20	9.25	9.30
43	9.12	9.15	9.19	9.23	9.28	9.33	9.39
44	9.19	9.22	9.27	9.31	9.36	9.42	9.48
45	9.26	9.29	9.34	9.39	9.45	9.51	9.58
46	9.33	9.37	9 42	9.47	9.54	10 . 0	
47	9.41	9.45	9.50	9.56	10 . 3		
48	9,48	9.53	9.59	10 . 5			
49	9.56	10 . 1					
50	10 . 4						

(Wahre Zeit = Mittlere plus 3 Minuten.)

26	4.28	4.28	4.27	4.26	4.25	4.24	4.23
27	4.22	4.22	4.21	4.20	4.19	4.18	4.16
28	4.16	4.15	4.14	4.13	4.12	4.11	4 . 9
29	4.10	4 . 9	4 . 8	4 . 7	4 . 5	4 . 4	4 . 2
30	4 . 4	4 . 3	4 . 2	4 . 0	3.59	3.57	3.55
31	3.58	3.57	3.56	3.54	3.52	3.50	3.48
32	3,52	3.51	3.49	3.47	3.45	3 43	3.41
33	3.46	3.45	3.43	3.41	3.39	3.36	3.34
34	3.40	3.38	3.36	3.34	3.32	3.29	3.27
35	3.34	3.32	3.30	3.28	3.25	3.22	3.20
36	3.28	3.25	3.23	5.21	3.18	3.15	3.12
37	3.22	3 19	3.17	3.14	3.11	3 . 8	3 . 5
38	3.15	3.13	3.10	3 . 7	3 . 4	3 . 1	2.57
39	3 . 9	3 . 6	3 . 3	3 . 0	2.57	2.53	2.49
40	3 . 2	2.59	2.56	2.53	2.49	2 45	2.41
41	2.56	2.53	2.49	2.46	2.42	2 37	2.33
42	2.49	2.46	2.42	2.38	2.34	2.29	2.24
43	2.42	2.39	2.35	2.31	2,26	2.21	2.15
44	2.35	2.32	2.27	2.23	2.18	2.12	2 . 6
45	2 28	2.25	2.20	2 15	2 . 9	2 . 3	1.56
46	2.21	2.17	2.12	2 . 7	2 . 0	1.54	
47	2.13	2 . 9	2 . 4	1.58	1.51		
48	2 . 6	2 . 1	1.55	1.49			
49	1.58	1.53					
50	1.50						

(Wahre Zeit = Mittlere plus 3 Minuten.)

Am 1. Juni.

Vormittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4.12	4 . 8	4 . 4	3.59	3 54	3.49	3.44
Diff. 1°	+ 6,7	+ 6,9	+ 7	+ 7,2	+ 7,5	+ 7,7	+ 7,9
10	5.19	5.17	5.14	5.11	5 . 9	5 . 6	5 . 3
Diff. 1°	+ 6,2	+ 6,3	+ 6,4	+ 6,6	+ 6,7	+ 6,9	+ 7,1
20	6 21	6.20	6.18	6.17	6.16	6.15	6.14
21	6 27	6.26	6.24	6 23	6.23	6 21	6 20
22	6.33	6.32	6.31	6 30	6.29	6.28	6.27
23	6.39	6.38	6.37	6 36	6.36	6.34	6.34
24	6.45	6 44	6 43	6.43	6.42	6.41	6.41
25	6.51	6.50	6.49	6.49	6.49	6.47	6 47
26	6 57	6.56	6.56	6.55	6.55	6.54	6.54
27	7 . 3	7 . 2	7 . 2	7 . 1	7 . 1	7 . 1	7 . 1
28	7 . 9	7 . 8	7 . 8	7 . 8	7 . 8	7 . 8	7 . 8
29	7.14	7.14	7 14	7.14	7.14	7.14	7.14
30	7.20	7.20	7.20	7.21	7.21	7.21	7.21

Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	7.42	7.46	7.50	7.55	8 . 0	8 . 5	8.10
Diff. 1°	— 6,7	— 6,9	— 7	— 7,2	— 7,5	— 7,7	— 7,9
10	6.35	6 37	6.40	6.43	6.45	6.48	6 51
Diff. 1°	— 6,2	— 6,3	— 6,4	— 6,6	— 6,7	— 6,9	— 7,1
20	5.33	5.34	5.36	5.37	5.38	5.39	5.40
21	5.27	5.28	5.30	5.31	5.31	5.33	5 34
22	5.21	5 22	5.23	5.24	5.25	5 26	5.27
23	5.15	5.16	5.17	5 18	5 18	5.20	5.20
24	5 . 9	5.10	5.11	5.11	5.12	5.13	5.13
25	5 . 2	5 . 3	5 . 5	5 . 5	5 . 6	5 . 7	5 . 7
26	4 57	4.58	4.58	4.59	4 59	5 . 0	5 . 0
27	4.51	4.52	4.52	4 53	4.53	4.53	4 53
28	4.45	4.46	4.46	4.46	4.46	4 46	4.46
29	4 40	4.40	4.40	4 40	4.40	4.40	4 40
30	4.34	4.34	4.34	4.33	4.33	4 33	4.33

31	7.26	7.26	7.26	7 27	7.27	7.27	7.28	31	4 28	4.28	4 28	4 27	4.27	4.27	4 26
32	7.32	7.33	7.33	7 33	7.34	7.34	7.35	32	4.22	4 21	4.21	4.21	4 20	4.20	4.19
33	7.38	7.39	7.39	7.39	7.40	7.40	7.41	33	4.16	4 15	4.15	4.15	4.14	4 14	4.13
34	7.44	7.45	7.45	7.46	7.46	7.47	7.48	34	4.10	4 . 9	4 . 9	4 . 8	4 . 8	4 . 7	4 . 6
35	7.50	7.51	7.51	7.52	7.53	7.54	7.55	35	4 . 4	4 . 3	4 , 3	4 . 2	4 . 1	4 . 0	3.59
36	7.57	7.57	7.58	7.58	7 59	8 . 1	8 . 2	36	3.57	3.57	3 56	3.56	3.55	3 53	3 52
37	8 . 2	8 . 3	8 . 4	8 . 4	8 . 6	8 . 7	8 . 9	37	3.52	3.51	3 50	3.50	3.48	3.47	3 45
38	8 . 8	8 . 9	8.10	8.11	8.13	8.14	8.16	38	3 46	3.45	3.44	3.43	3.41	3 40	3.38
39	8.14	8.15	8,16	8 17	8 19	8.21	8 23	39	3.40	3.39	3 38	3.37	3.35	3 33	3.31
40	8.20	8 21	8.23	8,24	8.26	8.28	8.30	40	3.34	3 33	3.31	3 30	3 28	3 26	3 24
41	8.26	8.27	8 29	8.30	8.32	8 35	8 37	41	3.28	3,27	3.25	3 24	3.22	3.19	3.17
42	8.32	8 34	8.35	8.37	8 39	8.42	8 44	42	3 22	3 20	3.19	3 17	3.15	3 12	3.10
43	8 38	8.40	8 41	8.43	8.46	8.49	8 51	43	3.16	3.14	3.13	3 11	3 . 8	3 . 5	3 . 3
44	8.44	8.46	8.48	8.50	8.53	8 56	8.59	44	3.10	3 . 8	3 . 6	3 . 4	3 . 1	2 58	2 55
45	8 50	8.52	8.54	8 57	9 . 0	9 . 2	9 . 6	45	3 . 4	3 . 2	3 . 0	2.57	2.54	2 52	2 48
46	8.57	8.59	9 . 1	9 . 4	9 . 7	9.10	9 14	46	2 57	2.55	2.53	2 50	2 47	2 44	2 40
47	9 . 3	9 . 5	9 . 8	9.11	9 14	9 17	9 22	47	2.51	2.49	2.46	2.43	2.40	2.37	2.32
48	9 . 9	9.12	9.15	9.18	9.22	9.25	9.30	48	2 45	2.42	2.39	2.36	2.32	2.29	2 24
49	9 15	9 18	9.22	9 25	9.29	9.33	9.38	49	2 39	2 36	2.32	2.29	2.25	2.21	2.16
50	9.22	9.25	9 29	9.33	9.37	9.41	9.46	50	2.32	2.29	2,25	2,21	2.17	2 13	2 . 8
51	9.29	9.32	9.36	9.40	9.44	9 49	9.55	51	2.25	2.22	2.18	2 14	2.10	2 . 5	1.59
52	9.36	9.39	9.43	9.48	9.53	9 58		52	2.18	2 15	2 11	2 . 6	2 . 1	1.56	
53	9.43	9.46	9 51	9.56	10 . 1			53	2.11	2 . 8	2 . 3	1.58	1 53		
54	9.50	9.54	9.59					54	2 . 4	2 0	1 55				
55	9.57	10 . 2						55	1.57	1.52					
	(Wahre Zeit = Mittlere plus 3 Minuten.)								(Wahre Zeit = Mittlere plus 3 Minuten.)						

Am 1. Juli.

Grade der Sonnenhöhe.	Vormittags. Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54	Grade der Sonnenhöhe.	Nachmittags. Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4 12	4 . 7	4 . 3	3.58	3.53	3 48	3.42	0	7.54	7.59	8 . 3	8 . 8	8.13	8.18	8.24
Diff. 1°	+ 6,8	+ 7	+ 7,2	+ 7,4	+ 7,6	+ 7,8	+ 8,1	Diff. 1°	— 6,8	— 7	— 7,2	— 7,4	— 7,6	— 7,8	— 8,1
10	5.20	5.17	5.15	5.12	5 . 9	5 6	5 . 3	10	6.46	6.49	6.51	6.54	6.57	7 . 0	7 . 3
Diff. 1°	+ 6,2	+ 6,4	+ 6,5	+ 6,6	+ 6,8	+ 6,9	+ 7,1	Diff. 1°	— 6,2	— 6,4	— 6,5	— 6,6	— 6,8	— 6,9	— 7,1
20	6.22	6.21	6.20	6.18	6.17	6.15	6.14	20	5.44	5.45	5.46	5.48	5.49	5.51	5.52
21	6 28	6.27	6.26	6.24	6.23	6 22	6.21	21	5.38	5 39	5.40	5.42	5.43	5.44	5.45
22	6.34	6.33	6.32	6 31	6.30	6 29	6 28	22	5.32	5.33	5.34	5.35	5.36	5.37	5.38
23	6.40	6.39	6.38	6.37	6.36	6 35	6.34	23	5 26	5.27	5 28	5.29	5.30	5.31	5.32
24	6.46	6.45	6.45	6 44	6.43	6.42	6.41	24	5.20	5 21	5.21	5 22	5.23	5.24	5.25
25	6.52	6.51	6 51	6.50	6.49	6.48	6.48	25	5.14	5.15	5.15	5.16	5.17	5.18	5.18
26	6.58	6.58	6.57	6.56	6.56	6.55	6.55	26	5 . 8	5 . 8	5 . 9	5.10	5.10	5.11	5.11
27	7 . 4	7 . 4	7 . 3	7 . 2	7 . 2	7 . 1	7 . 1	27	5 2	5 . 2	5 . 3	5 . 4	5 . 4	5 . 5	5 . 5
28	7.10	7.10	7 . 9	7 . 9	7 . 9	7 . 8	7 . 8	28	4 56	4.56	4 57	4.57	4 57	4.58	4.58
29	7 16	7.16	7.16	7.15	7.15	7.15	7.15	29	4.50	4.50	4.50	4 51	4 51	4 51	4.51
30	7.22	7.22	7.22	7.22	7.22	7.22	7.22	30	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44

31	7.28	7.28	7.28	7.28	7.28	7.28	7.28
32	7.34	7.34	7.34	7.34	7.34	7.35	7.35
33	7.40	7.40	7.40	7.40	7.41	7.41	7.42
34	7.46	7.46	7.46	7.47	7.47	7.48	7.49
35	7.52	7 52	7.52	7.53	7.54	7.54	7.55
36	7.58	7.58	7.59	7.59	8 . 1	8 . 1	8 . 2
37	8 . 4	8 . 4	8 . 5	8 . 5	8 . 7	8 . 7	8 . 9
38	8.10	8.10	8.11	8.12	8 13	8.14	8.16
39	8.15	8.16	8.17	8.18	8.20	8.21	8.23
40	8.21	8.22	8.24	8.25	8.26	8.28	8.30
41	8 27	8 28	8.30	8.31	8.33	8.35	8.36
42	8.34	8 35	8.36	8.38	8.40	8.42	8.44
43	8.40	8.41	8 42	8.44	8.46	8.49	8.51
44	8.46	8.47	8.49	8.51	8.53	8.56	8.58
45	8.52	8.53	8.55	8.57	9 . 0	9 . 3	9 . 5
46	8.58	9 . 0	9 . 2	9 . 4	9 . 7	9.10	9.13
47	9 . 4	9 . 6	9 . 8	9.11	9.14	9.17	9.20
48	9.10	9.13	9.15	9.18	9 21	9.25	9.28
49	9.16	9.19	9.22	9.25	9.29	9 32	9 36
50	9.23	9.26	9.29	9.32	9.36	9.40	9.44
51	9.29	9 32	9.36	9.39	9 43	9.48	9.53
52	9.36	9.39	9.43	9.47	9.51	9.56	
53	9.43	9.46	9 50	9.54	9.59		
54	9.50	9.54	9.58				
55	9.57	10 . 1					
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 3 Minuten.)						

31	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38
32	4.32	4.32	4 32	4.32	4.32	4.31	4.31
33	4.26	4.26	4.26	4.26	4 25	4.25	4.24
34	4.20	4.20	4.20	4 19	4.19	4 18	4.17
35	4.14	4.14	4.14	4.13	4.12	4.12	4.11
36	4 . 8	4 . 8	4 . 7	4 . 7	4 . 5	4 . 5	4 . 4
37	4 . 2	4 . 2	4 . 1	4 . 1	3.59	3.59	3.57
38	3 56	3.56	3.55	3.54	3.53	3.52	3.50
39	3.51	3.50	3.49	3.48	3.46	3.45	3.43
40	3.45	3.44	3.42	3.41	3.40	3.38	3.36
41	3.39	3.38	3.36	3.35	3.33	3 31	3.29
42	3.32	3.31	3 30	3.28	3.26	3.24	3.22
43	3.26	3.25	3.24	3.22	3.20	3.17	3.15
44	3.20	3.19	3.17	3.15	3 13	3.10	3 . 8
45	3.14	3.13	3.11	3 . 9	3 . 6	3 . 3	3 . 1
46	3 . 8	3 . 6	3 . 4	3 . 2	2 59	2.56	2.53
47	3 . 2	3 . 0	2 58	2.55	2 52	2.49	2.46
48	2.56	2.53	2.51	2.48	2.45	2.41	2.38
49	2.50	2 47	2 44	2 41	2.37	2 34	2.30
50	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30	2 26	2 22
51	2.37	2.34	2 30	2.27	2 23	2.18	2.13
52	2.30	2.27	2.23	2.19	2.15	2.10	
53	2.23	2.20	2.16	2 12	2 . 7		
54	2.16	2 12	2 . 8				
55	2 . 9	2 . 5					
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 3 Minuten.)						

Am 1. August.

Vormittags.								Nachmittags.							
Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.							Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.								Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54		47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4.43	4.39	4.36	4.33	4.29	4.25	4.21	0	7.29	7.33	7.36	7.39	7.43	7.47	7.51
Diff. 1°	+ 6,4	+ 6,6	+ 6,7	+ 6,8	+ 7,0	+ 7,2	+ 7,4	Diff. 1°	— 6,4	— 6,6	— 6,7	— 6,8	— 7,0	— 7,2	— 7,4
10	5.47	5.45	5.43	5.41	5.39	5.37	5.35	10	6.25	6.27	6.29	6.31	6.33	6.35	6.37
Diff. 1°	+ 6,0	+ 6,1	+ 6,2	+ 6,4	+ 6,6	+ 6,8	+ 7,0	Diff. 1°	— 6,0	— 6,1	— 6,2	— 6,4	— 6,6	— 6,8	— 7,0
15	6.17	6.16	6.14	6.13	6.12	6.11	6.10	15	5.55	5.56	5.58	5.59	6 . 0	6 . 1	6 . 2
16	6.23	6.22	6.21	6.20	6.19	6.18	6.17	16	5.49	5.50	5.51	5.52	5.53	5.54	5.55
17	6.29	6.28	6.27	6.26	6.25	6.24	6.23	17	5.43	5.44	5.45	5.46	5.47	5.48	5.49
18	6.35	6.34	6.33	6.32	6.32	6.31	6.30	18	5.37	5.38	5.39	5.40	5.40	5.41	5.42
19	6.41	6.40	6.39	6.38	6.38	6.37	6.37	19	5.31	5.32	5.33	5.34	5.34	5.35	5.35
20	6.47	6.46	6.46	6.45	6.45	6.44	6.44	20	5.25	5.26	5.26	5.27	5.27	5.28	5.28
21	6.53	6.52	6.52	6.51	6.51	6.50	6.50	21	5.19	5.20	5.20	5.21	5.21	5.22	5.22
22	6.59	6.58	6.58	6.58	6.58	6.57	6.57	22	5.13	5.14	5.14	5.14	5.14	5.15	5.15
23	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	23	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8
24	7.10	7.10	7.10	7.10	7.10	7.10	7.11	24	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 1
25	7.16	7.16	7.16	7.16	7.17	7.17	7.17	25	4.56	4.56	4.56	4.56	4.55	4.55	4.55

26	7.22	7.22	7.23	7.23	7.23	7.24	7.24
27	7.28	7.28	7.29	7.29	7.30	7.30	7,31
28	7,34	7.34	7.35	7.35	7.36	7.37	7.38
29	7.40	7.40	7.41	7.41	7.43	7.43	7.45
30	7.46	7.47	7.47	7,48	7.49	7.50	7.52
31	7.52	7.53	7.53	7.54	7.56	7 56	7.58
32	7.58	7.59	8 . 0	8 . 1	8 . 2	8 . 3	8 . 5
33	8 . 4	8 . 5	8 . 6	8 . 7	8 . 9	8.10	8.12
34	8.10	8.11	8.12	8.14	8.15	8.17	8.19
35	8.16	8.17	8.18	8.20	8.22	8.24	8.26
36	8.22	8 23	8.24	8.27	8.29	8.31	8.33
37	8.28	8.29	8 31	8.33	8.35	8.38	8.40
38	8.34	8.36	8.38	8.40	8.42	8.45	8.48
39	8.40	8.42	8.44	8.46	8.49	8.52	8 55
40	8.47	8.49	8.51	8.53	8.56	8.59	9 . 2
41	8.53	8.55	8.57	9 . 0	9 . 3	9 . 6	9.10
42	8.59	9 . 2	9 . 4	9 . 7	9.10	9.14	9.18
43	9 . 5	9 . 8	9.11	9.14	9.18	9.21	9.26
44	9.12	9.15	9.18	9.21	9.25	9.29	9.34
45	9.18	9.22	9.25	9.28	9.33	9.37	9.42
46	9 25	9.29	9.32	9.36	9.41	9.46	9.51
47	9.32	9.36	9.39	9.44	9.49	9.54	10 . 0
48	9 39	9.43	9.47	9.52	9.57	10 . 3	10 . 9
49	9.46	9.50	9.54	10 . 0	10 . 6		
50	9 53	9.58	10 . 3	10 . 9			
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 6 Minuten.)						

26	4.50	4.40	4.49	4.49	4.49	4.48	4.48
27	4.44	4.44	4.43	4.43	4.42	4.42	4.41
28	4.38	4.38	4.37	4.37	4.36	4.35	4.34
29	4.32	4.32	4.31	4.31	4.29	4.29	4.27
30	4.26	4.25	4.25	4.24	1.23	4.22	4.20
31	4.20	4.19	4.19	4.18	4.16	4.16	4.14
32	4.14	4.13	4.12	4.11	4.10	4 . 9	4 . 7
33	4 . 8	4 . 7	4 . 6	4 . 5	4 . 3	4 . 2	4 . 0
34	4 . 2	4 . 1	4 . 0	3.58	3.57	3.55	3.53
35	3.56	3.55	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46
36	3.50	3.49	3.48	3.45	3.43	3.41	3.39
37	3.44	3 43	3.41	3.39	3.37	3.34	3.32
38	3.38	3.36	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24
39	3.32	3 30	3.28	3.26	3.23	3.20	3,17
40	3.25	3.23	3.21	3.19	3.16	3.13	3.10
41	3.19	3.17	3.15	3.12	3 . 9	3 . 6	3 . 2
42	3.13	3.10	3 . 8	3 . 5	3 . 2	2.58	2.54
43	3 . 7	3 . 4	3 . 1	2.58	2,54	2.50	2.46
44	3 . 0	2 57	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38
45	2.54	2.50	2.47	2.44	2.39	2.35	2.30
46	2.47	2.43	2.40	2.36	2.31	2.26	2.21
47	2.40	2.36	2.32	2.28	2.23	2.18	2.12
48	2.33	2 29	2.25	2.20	2.15	2 . 9	2 . 3
49	2.26	2.22	2.17	2.12	2 . 6		
50	2.19	2.14	2 . 9	2 . 3			
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 6 Minuten.)						

Am 1. September.

Vormittags. Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54	Grade der Sonnenhöhe	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	5.23	5.22	5.20	5.19	5.18	5.16	5.14	0	6.37	6.38	6.40	6.41	6.42	6.44	6.46
Diff. 1°	+ 6,0	+ 6,1	+ 6,3	+ 6,4	+ 6,5	+ 6,6	+ 6,8	Diff. 1°	— 6,0	— 6,1	— 6,3	— 6,4	— 6,5	— 6,6	— 6,8
10	6,23	6.23	6.23	6.23	6.23	6.22	6.22	10	5.37	5 37	5.37	5.37	5.37	5.38	5 38
11	6.29	6.29	6,29	6 29	6.29	6.28	6.28	11	5.31	5.31	5.31	5.31	5.31	5.32	5.32
12	6.35	6.35	6.35	6.35	6.35	6,35	6 35	12	5.25	5.25	5.25	5.25	5.25	5 25	5.25
13	6.41	6.41	6.41	6.41	6.41	6.41	6.42	13	5.19	5 19	5.19	5 19	5.19	5.19	5.18
14	6.47	6.47	6.47	6.48	6.48	6.48	6 49	14	5.13	5.13	5.13	5.12	5.12	5.12	5.11
15	6.53	6.53	6 53	6.54	6.55	6.55	6.55	15	5 . 7	5 . 7	5 . 7	5 . 6	5 . 5	5 . 5	5 . 5
16	6.59	6.59	7 . 0	7 . 0	7 . 1	7 . 2	7 . 2	16	5 . 1	5 . 1	5 . 0	5 . 0	4 59	4.58	4.58
17	7 . 4	7 . 5	7 . 6	7 . 6	7 . 8	7 . 8	7 . 9	17	4.56	4.55	4.54	4.54	4.52	4 52	4 51
18	7.10	7.11	7.12	7.13	7.14	7.15	7.16	18	4.50	4.49	4.48	4.47	4.46	4.45	4.44
19	7.16	7.17	7.18	7.19	7.21	7.22	7.23	19	4.44	4.43	4.42	4.41	4.39	4 39	4 37
20	7.22	7.24	7.25	7.26	6.27	7.28	7.30	20	4.38	4.36	4.35	4.34	4.33	4.32	4.30
21	7.28	7.30	7.31	7.32	6.34	7.35	7.36	21	4.32	4.30	4.29	4.28	4.26	4 25	4.24

22	7.34	7.36	7.37	7.39	7.40	7.42	7.43	22	4.25	4.24	4.23	4.21	4.20	4.18	4.17
23	7.41	7.42	7.43	7.45	7.47	7.49	7.50	23	4.19	4.18	4.17	4.15	4.13	4.11	4.10
24	7.47	7.48	7.50	7.52	7.54	7.56	7.58	24	4.13	4.12	4.10	4 . 8	4 . 6	4 . 4	4 . 2
25	7.53	7.54	7.56	7.58	8 . 0	8 . 2	8 . 5	25	4 . 7	4 . 6	4 . 4	4 . 2	4 . 0	3.58	3.55
26	7.59	8 . 1	8 . 3	8 . 5	8 . 7	8 . 9	8.12	26	4 . 1	3.59	3.57	3.55	3.53	3.51	3.48
27	8 . 5	8 . 7	8 . 9	8.12	8.14	8.16	8.19	27	3.55	3.53	3.51	3.48	3.46	3.44	3.41
28	8.11	8.14	8.16	8.19	8.21	8.24	8.27	28	3.49	3.46	3.44	3.41	3.39	3.36	3.33
29	8.17	8.20	8.22	8.25	8.28	8.31	8.34	29	3.43	3.40	3.38	3.35	3.32	3.29	3.26
30	8.24	8.26	8.29	8.32	8.35	8.38	8.42	30	3.36	3.34	3.31	3.28	3.25	3.22	3.18
31	8.30	8.33	8.36	8.39	8.43	8.46	8.50	31	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.14	3.10
32	8.37	8.40	8.43	8.47	8.50	8.54	8.58	32	3.23	3.20	3.17	3.13	3.10	3 . 6	3 . 2
33	8.43	8.47	8.50	8.54	8.58	9 . 2	9 . 6	33	3.17	3.13	3.10	3 . 6	3 . 2	2.58	2.54
34	8.50	8.54	8.57	9 . 1	9 . 6	9 . 0	9.14	34	3.10	3 . 6	3 . 3	2.59	2.54	2.50	2.46
35	8.57	9 . 1	9 . 4	9 . 9	9.14	9.18	9.23	35	3 . 3	2.59	2.56	2.51	2.46	2.42	2.37
36	9 . 4	9 . 8	9.12	9.17	9.22	9.26	9.32	36	2.56	2.52	2.48	2.43	2.38	2 34	2.28
37	9.11	9.15	9.20	9 25	9.29	9.35	9.41	37	2.49	2.45	2.40	2.35	2.31	2.25	2.19
38	9 18	9.23	9.28	9.33	9.39	9.44	9.51	38	2.42	2.37	2.32	2.27	2.21	2.16	2 . 9
39	9.25	9.30	9.36	9.41	9.48	9.54	10 . 1	39	2 35	2.30	2.24	2 19	2.12	2 . 6	1.59
40	9.33	9.38	9.44	9.50	9.57	10 . 4		40	2.27	2.22	2.16	2.10	2 . 3	1.56	
41	9.41	9 46	9.53	9.59				41	2.19	2 14	2 . 7	2 . 1			
42	9.49	9.55	10 . 2					42	2.11	2 . 5	1.58				
43	9.57	10 . 4						43	2 . 3	1.56					
44	10 . 6							44	1.54						
	(Wahre Zeit = Mittlere Zeit.)								(Wahre Zeit = Mittlere Zeit.)						

Am 1. Juli.

Grade der Sonnenhöhe.	Vormittags. Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54	Grade der Sonnenhöhe.	Nachmittags. Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4.12	4 . 7	4 . 3	3.58	3.53	3.48	3.42	0	7.54	7.59	8 . 3	8 . 8	8.13	8.18	8.24
Diff. 1°	+ 6,8	+ 7	+ 7,2	+ 7,4	+ 7,6	+ 7,8	+ 8,1	Diff. 1°	— 6,8	— 7	— 7,2	— 7,4	— 7,6	— 7,8	— 8,1
10	5.20	5.17	5.15	5.12	5 . 9	5 . 6	5 . 3	10	6.46	6.49	6.51	6.54	6.57	7 . 0	7 . 3
Diff. 1°	+ 6,2	+ 6,4	+ 6,5	+ 6,6	+ 6,8	+ 6,9	+ 7,1	Diff. 1°	— 6,2	— 6,4	— 6,5	— 6,6	— 6,8	— 6,9	— 7,1
20	6.22	6.21	6.20	6.18	6.17	6.15	6.14	20	5.44	5.45	5.46	5.48	5.49	5.51	5.52
21	6.28	6.27	6.26	6.24	6.23	6.22	6.21	21	5.38	5.39	5.40	5.42	5.43	5.44	5.45
22	6.34	6.33	6.32	6.31	6.30	6.29	6.28	22	5.32	5.33	5.34	5.35	5.36	5.37	5.38
23	6.40	6.39	6.38	6.37	6.36	6.35	6.34	23	5.26	5.27	5.28	5.29	5.30	5.31	5.32
24	6.46	6.45	6.45	6.44	6.43	6.42	6.41	24	5.20	5.21	5.21	5.22	5.23	5.24	5.25
25	6.52	6.51	6.51	6.50	6.49	6.48	6.48	25	5.14	5.15	5.15	5.16	5.17	5.18	5.18
26	6.58	6.58	6.57	6.56	6.56	6.55	6.55	26	5 . 8	5 . 8	5 . 9	5.10	5.10	5.11	5.11
27	7 . 4	7 . 4	7 . 3	7 . 2	7 . 2	7 . 1	7 . 1	27	5 . 2	5 . 2	5 . 3	5 . 4	5 . 4	5 . 5	5 . 5
28	7.10	7.10	7 . 9	7 . 9	7 . 9	7 . 8	7 . 8	28	4.56	4.56	4.57	4.57	4.57	4.58	4.58
29	7.16	7.16	7.16	7.15	7.15	7.15	7.15	29	4.50	4.50	4.50	4.51	4.51	4.51	4.51
30	7.22	7.22	7.22	7.22	7.22	7.22	7.22	30	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44

31	7.28	7.28	7.28	7.28	7.28	7.28	7.28
32	7.34	7.34	7.34	7.34	7.34	7.35	7.35
33	7.40	7.40	7.40	7.40	7.41	7.41	7.42
34	7.46	7.46	7.46	7.47	7.47	7.48	7.49
35	7.52	7.52	7.52	7.53	7.54	7.54	7.55
36	7.58	7.58	7.59	7.59	8 . 1	8 . 1	8 . 2
37	8 . 4	8 . 4	8 . 5	8 . 5	8 . 7	8 . 7	8 . 9
38	8.10	8.10	8.11	8.12	8.13	8.14	8.16
39	8.15	8.16	8.17	8.18	8.20	8.21	8.23
40	8.21	8.22	8.24	8.25	8.26	8.28	8.30
41	8.27	8.28	8.30	8.31	8.33	8.35	8.36
42	8.34	8.35	8.36	8.38	8.40	8.42	8.44
43	8.40	8.41	8.42	8.44	8.46	8.49	8.51
44	8.46	8.47	8.49	8.51	8.53	8.56	8.58
45	8.52	8.53	8.55	8.57	9 . 0	9 . 3	9 . 5
46	8.58	9 . 0	9 . 2	9 . 4	9 . 7	9.10	9.13
47	9 . 4	9 . 6	9 . 8	9.11	9.14	9.17	9.20
48	9.10	9.13	9.15	9.18	9.21	9.25	9.28
49	9.16	9.19	9.22	9.25	9.29	9.32	9.36
50	9.23	9.26	9.29	9.32	9.36	9.40	9.44
51	9.29	9.32	9.36	9.39	9.43	9.48	9.53
52	9.36	9.39	9.43	9.47	9.51	9.56	
53	9.43	9.46	9.50	9.54	9.59		
54	9.50	9.54	9.58				
55	9.57	10 . 1					

(Wahre Zeit = Mittlere minus 3 Minuten.)

31	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38
32	4.32	4.32	4.32	4.32	4.32	4.31	4.31
33	4.26	4.26	4.26	4.26	4.25	4.25	4.24
34	4.20	4.20	4.20	4.19	4.19	4.18	4.17
35	4.14	4.14	4.14	4.13	4.12	4.12	4.11
36	4 . 8	4 . 8	4 . 7	4 . 7	4 . 5	4 . 5	4 . 4
37	4 . 2	4 . 2	4 . 1	4 . 1	3.59	3.59	3.57
38	3.56	3.56	3.55	3.54	3.53	3.52	3.50
39	3.51	3.50	3.49	3.48	3.46	3.45	3.43
40	3.45	3.44	3.42	3.41	3.40	3.38	3.36
41	3.39	3.38	3.36	3.35	3.33	3.31	3.29
42	3.32	3.31	3.30	3.28	3.26	3.24	3.22
43	3.26	3.25	3.24	3.22	3.20	3.17	3.15
44	3.20	3.19	3.17	3.15	3.13	3.10	3 . 8
45	3.14	3.13	3.11	3 . 9	3 . 6	3 . 3	3 . 1
46	3 . 8	3 . 6	3 . 4	3 . 2	2.59	2.56	2.53
47	3 . 2	3 . 0	2.58	2.55	2.52	2.49	2.46
48	2.56	2.53	2.51	2.48	2.45	2.41	2.38
49	2.50	2.47	2.44	2.41	2.37	2.34	2.30
50	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30	2.26	2.22
51	2.37	2.34	2.30	2.27	2.23	2.18	2.13
52	2.30	2.27	2.23	2.19	2.15	2.10	
53	2.23	2.20	2.16	2.12	2 . 7		
54	2.16	2.12	2 . 8				
55	2 . 9	2 . 5					

(Wahre Zeit = Mittlere minus 3 Minuten.)

Am 1. August.

Vormittags. — **Nachmittags.**

Grade der Sonnenhöhe.	Vormittags: Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54	Grade der Sonnenhöhe.	Nachmittags: Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4.43	4.39	4.36	4.33	4.29	4.25	4.21	0	7.29	7.33	7.36	7.39	7.43	7.47	7.51
Diff. 1°	+ 6,4	+ 6,6	+ 6,7	+ 6,8	+ 7,0	+ 7,2	+ 7,4	Diff. 1°	— 6,4	— 6,6	— 6,7	— 6,8	— 7,0	— 7,2	— 7,4
10	5.47	5.45	5.43	5.41	5.39	5.37	5.35	10	6.25	6.27	6.29	6.31	6.33	6.35	6.37
Diff. 1°	+ 6,0	+ 6,1	+ 6,2	+ 6,4	+ 6,6	+ 6,8	+ 7,0	Diff. 1°	— 6,0	— 6,1	— 6,2	— 6,4	— 6,6	— 6,8	— 7,0
15	6.17	6.16	6.14	6.13	6.12	6.11	6.10	15	5.55	5.56	5.58	5.59	6 . 0	6 . 1	6 . 2
16	6.23	6.22	6.21	6.20	6.19	6.18	6.17	16	5.49	5.50	5 51	5,52	5.53	5.54	5.55
17	6.29	6.28	6.27	6.26	6.25	6.24	6.23	17	5.43	5.44	5.45	5.46	5.47	5.48	5.49
18	6.35	6.34	6.33	6.32	6.32	6.31	6.30	18	5.37	5.38	5.39	5.40	5.40	5.41	5.42
19	6.41	6.40	6.39	6.38	6.38	6.37	6.37	19	5.31	5.32	5.33	5.34	5,34	5.35	5.35
20	6.47	6.46	6.46	6.45	6.45	6.44	6.44	20	5,25	5.26	5·26	5.27	5.27	5 28	5.28
21	6.53	6.52	6.52	6.51	6.51	6.50	6.50	21	5.19	5.20	5.20	5.21	5.21	5.22	5.22
22	6.59	6.58	6.58	6.58	6.58	6.57	6.57	22	5.13	5 14	5 14	5.14	5 14	5.15	5.15
23	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	7 . 4	23	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8	5 . 8
24	7.10	7.10	7.10	7.10	7.10	7.10	7.11	24	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 2	5 . 1
25	7.16	7.16	7.16	7.16	7.17	7.17	7.17	25	4.56	4.56	4.56	4.56	4.55	4.55	4.55

26	7.22	7.22	7.23	7.23	7.23	7.24	7.24	26	4.50	4.40	4.49	4.49	4.49	4.48	4.48
27	7.28	7.28	7.29	7.29	7.30	7.30	7,31	27	4.44	4.44	4.43	4.43	4.42	4.42	4.41
28	7,34	7.34	7.35	7.35	7.36	7.37	7.38	28	4.38	4.38	4.37	4.37	4.36	4.35	4.34
29	7.40	7.40	7.41	7.41	7.43	7.43	7.45	29	4.32	4.32	4.31	4.31	4.29	4.29	4.27
30	7.46	7.47	7.47	7,48	7.49	7.50	7.52	30	4.26	4.25	4.25	4.24	1.23	4.22	4.20
31	7.52	7.53	7.53	7.54	7.56	7.56	7.58	31	4.20	4.19	4.19	4.18	4.16	4.16	4.14
32	7.58	7.59	8 . 0	8 . 1	8 . 2	8 . 3	8 . 5	32	4.14	4.13	4.12	4.11	4.10	4 . 9	4 . 7
33	8 . 4	8 . 5	8 . 6	8 . 7	8 . 9	8.10	8.12	33	4 . 8	4 . 7	4 . 6	4 . 5	4 . 3	4 . 2	4 . 0
34	8.10	8.11	8.12	8.14	8.15	8.17	8.19	34	4 . 2	4 . 1	4 . 0	3.58	3.57	3.55	3.53
35	8.16	8.17	8.18	8.20	8.22	8.24	8.26	35	3.56	3.55	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46
36	8.22	8 23	8.24	8.27	8.29	8.31	8.33	36	3.50	3.49	3.48	3.45	3.43	3.41	3.39
37	8.28	8.29	8 31	8.33	8.35	8.38	8.40	37	3.44	3 43	3.41	3.39	3.37	3.34	3.32
38	8.34	8.36	8.38	8.40	8.42	8.45	8.48	38	3.38	3.36	3.34	3,32	3.30	3.27	3.24
39	8.40	8.42	8.44	8.46	8.49	8.52	8 55	39	3.32	3 30	3.28	3.26	3.23	3.20	3.17
40	8.47	8.49	8.51	8.53	8.56	8.59	9 . 2	40	3.25	3.23	3.21	3.19	3 16	3.13	3.10
41	8.53	8.55	8.57	9 . 0	9 . 3	9 . 6	9.10	41	3.19	3.17	3.15	3.12	3 . 9	3 . 6	3 . 2
42	8.59	9 . 2	9 . 4	9 . 7	9.10	9.14	9.18	42	3.13	3.10	3 . 8	3 . 5	3 . 2	2.58	2.54
43	9 . 5	9 . 8	9.11	9.14	9.18	9.21	9.26	43	3 . 7	3 . 4	3 . 1	2.58	2.54	2.50	2.46
44	9.12	9.15	9.18	9.21	9.25	9.29	9.34	44	3 . 0	2 57	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38
45	9.18	9.22	9.25	9.28	9.33	9.37	9.42	45	2.54	2.50	2.47	2.44	2.39	2.35	2.30
46	9 25	9.29	9.32	9.36	9.41	9.46	9.51	46	2.47	2.43	2.40	2.36	2.31	2.26	2.21
47	9.32	9.36	9.39	9.44	9.49	9.54	10 . 0	47	2.40	2.36	2.32	2.28	2.23	2.18	2.12
48	9 39	9.43	9.47	9.52	9.57	10 . 3	10 . 9	48	2.33	2 29	2.25	2.20	2.15	2 . 9	2 . 3
49	9.46	9.50	9.54	10 . 0	10 . 6			49	2.26	2.22	2.17	2.12	2 . 6		
50	9 53	9.58	10 . 3	10 . 9				50	2.19	2.14	2 . 9	2 . 3			
	(Wahre Zeit = Mittlere minus 6 Minuten.)								(Wahre Zeit = Mittlere minus 6 Minuten.)						

Am 1. September.

Vormittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	5.23	5.22	5.20	5.19	5.18	5.16	5.14
Diff. 1°	+ 6,0	+ 6,1	+ 6,3	+ 6,4	+ 6,5	+ 6,6	+ 6,8
10	6.23	6.23	6.23	6.23	6.23	6.22	6.22
11	6.29	6.29	6.29	6.29	6.29	6.28	6.28
12	6.35	6.35	6.35	6.35	6.35	6.35	6.35
13	6.41	6.41	6.41	6.41	6.41	6.41	6.42
14	6.47	6.47	6.47	6.48	6.48	6.48	6.49
15	6.53	6.53	6.53	6.54	6.55	6.55	6.55
16	6.59	6.59	7 . 0	7 . 0	7 . 1	7 . 2	7 . 2
17	7 . 4	7 . 5	7 . 6	7 . 6	7 . 8	7 . 8	7 . 9
18	7.10	7.11	7.12	7.13	7.14	7.15	7.16
19	7.16	7.17	7.18	7.19	7.21	7.22	7.23
20	7.22	7.24	7.25	7.26	6.27	7.28	7.30
21	7.28	7.30	7.31	7.32	6.34	7.35	7.36

Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	6.37	6.38	6.40	6.41	6.42	6.44	6.46
Diff. 1°	— 6,0	— 6,1	— 6,3	— 6,4	— 6,5	— 6,6	— 6,8
10	5.37	5 37	5.37	5.37	5.37	5.38	5 38
11	5.31	5.31	5.31	5.31	5.31	5.32	5.32
12	5.25	5.25	5.25	5.25	5.25	5 25	5.25
13	5.19	5 19	5.19	5 19	5.19	5.19	5.18
14	5.13	5.13	5.13	5.12	5.12	5.12	5.11
15	5 . 7	5 . 7	5 . 7	5 . 6	5 . 5	5 . 5	5 . 5
16	5 . 1	5 . 1	5 . 0	5 . 0	4 59	4.58	4.58
17	4.56	4.55	4.54	4.54	4.52	4 52	4 51
18	4.50	4.49	4.48	4.47	4.46	4.45	4.44
19	4.44	4.43	4.42	4.41	4.39	4.39	4 37
20	4 38	4.36	4.35	4.34	4.33	4.32	4.30
21	4.32	4.30	4.29	4.28	4.26	4 25	4.24

22	7.34	7.36	7.37	7.39	7.40	7.42	7.43	22	4.25	4.24	4.23	4.21	4.20	4.18	4.17
23	7.41	7.42	7.43	7.45	7.47	7.49	7.50	23	4.19	4.18	4.17	4.15	4.13	4.11	4.10
24	7.47	7.48	7.50	7.52	7.54	7.56	7.58	24	4.13	4.12	4.10	4 . 8	4 . 6	4 . 4	4 . 2
25	7.53	7.54	7.56	7.58	8 . 0	8 . 2	8 . 5	25	4 . 7	4 . 6	4 . 4	4 . 2	4 . 0	3.58	3.55
26	7.59	8 . 1	8 . 3	8 . 5	8 . 7	8 . 9	8.12	26	4 . 1	3.59	3.57	3.55	3.53	3.51	3.48
27	8 . 5	8 . 7	8 . 9	8.12	8.14	8.16	8.19	27	3.55	3.53	3.51	3.48	3.46	3.44	3.41
28	8.11	8.14	8.16	8.19	8.21	8.24	8.27	28	3.49	3.46	3.44	3.41	3.39	3.36	3.33
29	8.17	8.20	8.22	8.25	8.28	8.31	8.34	29	3.43	3.40	3.38	3.35	3.32	3.29	3.26
30	8.24	8.26	8.29	8.32	8.35	8.38	8.42	30	3.36	3.34	3.31	3.28	3.25	3.22	3.18
31	8.30	8.33	8.36	8.39	8.43	8.46	8.50	31	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.14	3.10
32	8.37	8.40	8.43	8.47	8.50	8.54	8.58	32	3.23	3.20	3.17	3.13	3.10	3 . 6	3 . 2
33	8.43	8.47	8.50	8.54	8.58	9 . 2	9 . 6	33	3.17	3.13	3.10	3 . 6	3 . 2	2.58	2.54
34	8.50	8.54	8.57	9 . 1	9 . 6	9 . 0	9.14	34	3.10	3 . 6	3 . 3	2.59	2.54	2.50	2.46
35	8.57	9 . 1	9 . 4	9 . 9	9.14	9.18	9.23	35	3 . 3	2.59	2.56	2.51	2.46	2.42	2.37
36	9 . 4	9 . 8	9.12	9.17	9.22	9.26	9.32	36	2.56	2.52	2.48	2.43	2.38	2.34	2.28
37	9.11	9.15	9.20	9.25	9.29	9.35	9.41	37	2.49	2.45	2.40	2.35	2.31	2.25	2.19
38	9.18	9.23	9.28	9.33	9.39	9.44	9.51	38	2.42	2.37	2.32	2.27	2.21	2.16	2 . 9
39	9.25	9.30	9.36	9.41	9.48	9.54	10 . 1	39	2.35	2.30	2.24	2.19	2.12	2 . 6	1.59
40	9.33	9.38	9.44	9.50	9.57	10 . 4		40	2.27	2.22	2.16	2.10	2 . 3	1.56	
41	9.41	9.46	9.53	9.59				41	2.19	2.14	2 . 7	2 . 1			
42	9.49	9.55	10 . 2					42	2.11	2 . 5	1.58				
43	9.57	10 . 4						43	2 . 3	1.56					
44	10 . 6							44	1.54						
	(Wahre Zeit = Mittlere Zeit.)								(Wahre Zeit = Mittlere Zeit.)						

Am 1. October.

Vormittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	6 . 4	6 . 4	6 . 5	6 . 5	6 . 6	6 . 6	6 . 7
1	6 . 10	6 . 10	6 . 11	6 . 11	6 . 13	6 . 13	6 . 14
2	6 . 16	6 . 17	6 . 17	6 . 18	6 . 19	6 . 20	6 . 21
3	6 . 22	6 . 23	6 . 23	6 . 25	6 . 25	6 . 26	6 . 27
4	6 . 28	6 . 29	6 . 29	6 . 31	6 . 32	6 . 33	6 . 34
5	6 . 34	6 . 35	6 . 35	6 . 37	6 . 39	6 . 40	6 . 41
6	6 . 40	6 . 41	6 . 42	6 . 44	6 . 45	6 . 47	6 . 48
7	6 . 46	6 . 47	6 . 48	6 . 50	6 . 52	6 . 53	6 . 55
8	6 . 52	6 . 53	6 . 55	6 . 57	6 . 58	7 . 0	7 . 2
9	6 . 58	6 . 59	7 . 1	7 . 3	7 . 5	7 . 7	7 . 9
10	7 . 4	7 . 6	7 . 8	7 . 10	7 . 12	7 . 14	7 . 16
11	7 . 10	7 . 12	7 . 14	7 . 16	7 . 19	7 . 21	7 . 23
12	7 . 17	7 . 19	7 . 21	7 . 23	7 . 25	7 . 28	7 . 31
13	7 . 23	7 . 24	7 . 27	7 . 30	7 . 32	7 . 35	7 . 38
14	7 . 29	7 . 31	7 . 34	7 . 37	7 . 39	7 . 42	7 . 45
15	7 . 35	7 . 38	7 . 40	7 . 43	7 . 46	7 . 49	7 . 53
16	7 . 42	7 . 45	7 . 47	7 . 50	7 . 54	7 . 57	8 . 1
17	7 . 48	7 . 51	7 . 54	7 . 57	8 . 1	8 . 4	8 . 8
18	7 . 55	7 . 58	8 . 1	8 . 5	8 . 8	8 . 12	8 . 16
19	8 . 1	8 . 5	8 . 8	8 . 12	8 . 16	8 . 20	8 . 24
20	8 . 8	8 . 12	8 . 15	8 . 19	8 . 23	8 . 28	8 . 32
21	8 . 15	8 . 19	8 . 22	8 . 26	8 . 31	8 . 36	8 . 41
22	8 . 22	8 . 26	8 . 30	8 . 34	8 . 39	8 . 44	8 . 50
23	8 . 29	8 . 33	8 . 37	8 . 42	8 . 47	8 . 52	8 . 59
24	8 . 36	8 . 41	8 . 45	8 . 50	8 . 56	9 . 1	9 . 9
25	8 . 43	8 . 48	8 . 53	8 . 58	9 . 4	9 . 10	9 . 18
26	8 . 51	8 . 56	9 . 1	9 . 7	9 . 13	9 . 20	9 . 28
27	8 . 59	9 . 4	9 . 10	9 . 17	9 . 23	9 . 30	9 . 38
28	9 . 7	9 . 12	9 . 19	9 . 25	9 . 32	9 . 41	9 . 49
29	9 . 15	9 . 21	9 . 28	9 . 35	9 . 43	9 . 52	
30	9 . 23	9 . 30	9 . 37	9 . 45	9 . 54		
31	9 . 31	9 . 39	9 . 47				
32	9 . 40	9 . 49	9 . 58				
33	9 . 50						

(Wahre Zeit = Mittlere plus 10 Minuten.)

Am 1. October.

Nachmittags.

Grade der Sonnen-höhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	5.36	5.36	5.35	5.35	5.34	5.34	5.33
1	5.30	5.30	5.29	5.29	5.27	5.27	5.26
2	5.24	5.23	5.12	5.22	5.21	5.20	5.19
3	5.18	5.17	5.17	5.15	5.15	5.14	5.13
4	5.12	5.11	5.11	5. 9	5. 8	5. 7	5. 6
5	5. 6	5. 5	5. 5	5. 3	5. 1	5. 0	4.59
6	5. 0	4.59	4.58	4.56	4.55	4.53	4.52
7	4.54	4.53	4.52	4.50	4.48	4.47	4.45
8	4.48	4.47	4.45	4.43	4.42	4.40	4.38
9	4.42	4.41	4.39	4.37	4.35	4.33	4.31
10	4.36	4.34	4.32	4.30	4.28	4.26	4.24
11	4.30	4.28	4.26	4.24	4.21	4.19	4.17
12	4.23	4.21	4.19	4.17	4.15	4.12	4. 9
13	4.17	4.15	4.13	4.10	4. 8	4. 5	4. 2
14	4.11	4. 9	4. 6	4. 3	4. 1	3.58	3.55
15	4. 5	4. 2	4. 0	3.57	3.54	3.51	3.47
16	3.58	3.55	3.53	3.50	3.46	3.43	3.39
17	3.52	3.49	3.46	3.43	3.39	3.36	3.32
18	3.45	3.42	3.39	3.35	3.32	3.28	3.24
19	3.39	3.35	3.32	3.28	3.24	3.20	3.16
20	3.32	3.28	3.25	3.21	3.17	3.12	3. 8
21	3.25	3.21	3.18	3.14	3. 9	3. 4	2.59
22	3.18	3.14	3.10	3. 6	3. 1	2.56	2.50
23	3.11	3. 7	3. 3	2.58	2.53	2.48	2.41
24	3. 4	2.59	2.55	2.50	2.44	2.39	2.32
25	2.57	2.52	2.47	2.42	2.36	2.30	2.22
26	2.49	2.44	2.39	2.33	2.27	2.20	2.12
27	2.41	2.36	2.30	2.23	2.17	2.10	2. 2
28	2.33	2.28	2.21	2.15	2. 8	1.59	1.51
29	2.25	2.19	2.12	2. 5	1.57	1.48	
30	2.17	2.10	2. 3	1.55	1.46		
31	2. 9	2. 1	1.53				
32	2. 0	1.51	1.42				
33	1.50						
	(Wahre Zeit = Mittlere plus 10 Minuten.)						

Am 1. November.

Vormittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	6 . 49	6 . 52	6 . 54	6 . 57	7 . 0	7 . 3	7 . 6
1	6 . 55	6 . 58	7 . 1	7 . 4	7 . 7	7 . 10	7 . 13
2	7 . 2	7 . 5	7 . 8	7 . 11	7 . 14	7 . 17	7 . 20
3	7 . 9	7 . 11	7 . 14	7 . 18	7 . 21	7 . 24	7 . 28
4	7 . 15	7 . 18	7 . 22	7 . 25	7 . 29	7 . 32	7 . 36
5	7 . 22	7 . 25	7 . 29	7 . 32	7 . 36	7 . 40	7 . 44
6	7 29	7 . 32	7 . 36	7 . 39	7 . 43	7 . 48	7 . 52
7	7 . 35	7 . 39	7 . 43	7 . 46	7 . 51	7 . 56	8 . 0
8	7 . 42	7 . 46	7 . 50	7 . 54	7 . 59	8 . 4	8 . 9
9	7 . 49	7 . 53	7 . 57	8 . 2	8 . 7	8 . 12	8 . 17
10	7 . 57	8 . 1	8 . 5	8 . 10	8 . 15	8 . 20	8 . 26
11	8 . 4	8 . 8	8 . 13	8 . 18	8 . 23	8 . 29	8 . 35
12	8 . 11	8 . 16	8 . 21	8 . 26	8 . 32	8 . 38	8 . 45
13	8 . 19	8 . 24	8 . 29	8 . 35	8 . 41	8 . 48	8 . 55
14	8 . 27	8 . 32	8 . 38	8 . 44	8 . 50	8 . 57	9 . 5
15	8 . 35	8 . 40	8 . 46	8 . 53	9 . 0	9 . 7	9 . 16
16	8 . 43	8 . 49	8 . 55	9 . 2	9 . 10	9 . 18	9 . 27
17	8 . 51	8 . 58	9 . 4	9 . 12	9 . 20	9 . 30	9 . 40
18	9 . 0	9 . 7	9 . 14	9 . 22	9 . 31	9 . 42	
19	9 . 9	9 . 16	9 . 24	9 . 33	9 . 43		
20	9 . 18	9 . 26	9 . 35	9 . 45			
21	9 . 28	9 . 37	9 . 46				
22	9 . 39	9 . 48					
23	9 . 50						
	(Wahre Zeit = Mittlere plus 16 Minuten.)						

Am 1. November.

Nachmittags.

Grade der Sonnenhöhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit.						
	Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4 . 39	4 . 36	4 . 34	4 . 31	4 . 28	4 . 25	4 . 22
1	4 . 33	4 . 30	4 . 27	4 . 24	4 . 21	4 . 18	4 . 15
2	4 . 26	4 . 23	4 . 20	4 . 17	4 . 14	4 . 11	4 . 8
3	4 . 19	4 . 17	4 . 14	4 . 10	4 . 7	4 . 4	4 . 0
4	4 . 13	4 . 10	4 . 6	4 . 3	3 . 59	3 . 56	3 . 52
5	4 . 6	4 . 3	3 . 59	3 . 56	3 . 52	3 . 48	3 . 44
6	3 . 59	3 . 56	3 . 52	3 . 49	3 . 45	3 . 40	3 . 36
7	3 . 53	3 . 49	3 . 45	3 . 42	3 . 37	3 . 32	3 . 28
8	3 . 46	3 . 42	3 . 38	3 . 34	3 . 29	3 . 24	3 . 19
9	3 . 39	3 . 35	3 . 31	3 . 26	3 . 21	3 . 16	3 . 11
10	3 . 31	3 . 27	3 . 23	3 . 18	3 . 13	3 . 8	3 . 2
11	3 . 24	3 . 20	3 . 15	3 . 10	3 . 5	2 . 59	2 . 53
12	3 . 17	3 . 12	3 . 7	3 . 2	2 . 56	2 . 50	2 . 43
13	3 . 9	3 . 4	2 . 59	2 . 53	2 . 47	2 . 40	2 . 33
14	3 . 1	2 . 56	2 . 50	2 . 44	2 . 38	2 . 31	2 . 23
15	2 . 53	2 . 48	2 . 42	2 . 35	2 . 28	2 . 21	2 . 12
16	2 . 45	2 . 39	2 . 33	2 . 26	2 . 18	2 . 10	2 . 1
17	2 . 37	2 . 30	2 . 24	2 . 16	2 . 8	1 . 58	1 . 48
18	2 . 28	2 . 21	2 . 14	2 . 6	1 . 57	1 . 46	
19	2 . 19	2 . 12	2 . 3	1 . 55	1 . 46		
20	2 . 10	2 . 2	1 . 53	1 . 44			
21	2 . 0	1 . 51	1 . 42				
22	1 . 49	1 . 40					
23	1 . 38						
	(Wahre Zeit = Mittlere plus 16 Minuten.)						

Am 1. December.

Vormittags.

Grade der Sonnen-Höhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes. 47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	7 . 34	7 . 38	7 . 42	7 . 46	7 . 51	7 . 56	8 . 1
1	7 . 41	7 . 45	7 . 50	7 . 54	7 . 59	8 . 4	8 . 10
2	7 . 48	7 . 53	7 . 57	8 . 2	8 . 7	8 . 13	8 . 19
3	7 . 55	8 . 0	8 . 5	8 . 10	8 . 16	8 . 22	8 . 28
4	8 . 3	8 . 8	8 . 13	8 . 19	8 . 25	8 . 31	8 . 38
5	8 . 11	8 . 16	8 . 23	8 . 28	8 . 34	8 . 40	8 . 48
6	8 . 19	8 . 24	8 . 30	8 . 37	8 . 43	8 . 50	8 . 58
7	8 . 27	8 . 32	8 . 40	8 . 46	8 . 53	9 . 0	9 . 9
8	8 . 35	8 41	8 . 48	8 . 55	9 . 3	9 . 11	9 . 20
9	8 . 43	8 . 50	8 . 57	9 . 5	9 . 13	9 . 22	9 . 33
10	8 . 52	8 . 59	9 . 7	9 . 15	9 . 24	9 . 34	9 . 46
11	9 . 2	9 . 9	9 17	9 . 26	9 . 36	9 . 48	
12	9 . 11	9 . 19	9 . 28	9 . 38	9 . 49		
13	9 . 21	9 . 30	9 . 40	6 . 51			
14	9 . 32	9 . 42	9 . 52				
15	9 . 43	9 . 54					
16	9 . 55						
	(Wahre Zeit = Mittlere plus 10 Minuten)						

8. Beispiel. An einem Orte, der innerhalb der 47. und 48. Breitengradlinie liegt, zeigte am frühen Morgen des 1. Juni der Knecht 7 Grad Sonnenhöhe. Welche Zeit ist es?
Die Diff. + 6,7 (für 1 Grad, S. 443) 7fach genommen giebt 46,9 Minuten und diese 47 Minuten zur Zeit bei 0 Grad addirt, macht 4 Uhr 12 Min. + 47 Min. = 4 Uhr 59 Min.

9. Beispiel. Für das äusserste Norddeutschland oder den

Am 1. December.

Nachmittags.

Grade der Sonnen-höhe.	Mittlere oder bürgerliche Zeit. Geographische Breite des Ortes.						
	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54
0	4 . 6	4 . 2	3 . 58	3 . 54	3 . 49	3 . 44	3 . 39
1	3 . 59	3 . 55	3 . 50	3 . 46	3 . 41	3 . 36	3 . 30
2	3 . 52	3 . 47	3 . 43	3 . 38	3 . 33	3 . 27	3 . 21
3	3 . 45	3 . 40	3 . 35	3 . 30	3 . 24	3 . 18	3 . 12
4	3 . 37	3 . 32	3 . 27	3 . 21	3 . 15	3 . 9	3 . 2
5	3 . 29	3 . 24	3 . 17	3 . 12	3 . 6	3 . 0	2 . 52
6	3 . 21	3 . 16	3 . 10	3 . 3	2 . 57	2 . 50	2 . 42
7	3 . 13	3 . 7	3 . 0	2 . 54	2 . 47	2 . 40	2 . 31
8	3 . 5	2 . 59	2 . 52	2 . 45	2 . 37	2 . 29	2 . 20
9	2 . 57	2 . 50	2 . 43	2 . 35	2 . 27	2 . 18	2 . 8
10	2 . 48	2 . 41	2 . 33	2 . 25	2 . 16	2 . 6	1 . 54
11	2 . 38	2 . 31	2 . 23	2 . 14	2 . 4	1 . 52	
12	2 . 29	2 . 21	2 . 12	2 . 2	1 . 51		
13	2 . 19	2 . 10	2 . 0	1 . 49			
14	2 . 8	1 . 58	1 . 48				
15	1 . 57	1 . 46					
16	1 . 45						
	(Wahre Zeit = Mittlere plus 10 Minuten.)						

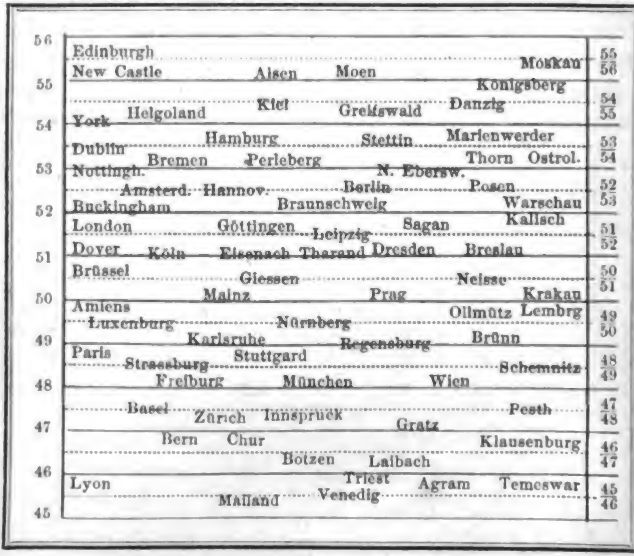
54. Breitengrad die Zeit des Sonnen-Auf- und Unterganges nach mittlerer Uhr für den 1. Januar, 1. April und 1. Juli anzugeben. —

Die Sonne hat 0 Grad Höhe oder

	geht auf		geht unter
am 1. Jan.	um 8 Uhr 24 Min.		3 Uhr 44 Min.
am 1. April	» 5 » 39 »	. . .	6 » 29 »
am 1. Juli	» 3 » 42 »	. . .	8 » 24 »

(Vergl. Zeile 0 auf Seite 432 u. 433; 438; 444).

Geographische Breitenlage oder Polhöhe.



Fünftes Buch.

Messende Physik und Mechanik

oder

der Messknecht als Maassrath in Bezug

auf:

27) Dichtigkeit.

Dichtigkeitszahlen. Volumenwägung. Geometrische Gewichtsmessung. Dichtigkeitsmessung.

28) Wärmetechnik.

Ausdehnung. Capacität. Brennstoffe.

29) Bewegungskräfte.

Geschwindigkeiten. Kraft der thierischen und Elementar-Motoren. Leistung oder Arbeit derselben.

30) Wasser- und Wasserkraftsmessung.

Geschwindigkeit. Zuflussmenge. Gefälle. Rohe Kraft. Effective Leistung.

31) Reibungstechnik.

Gleitende Reibung. Zapfenreibung. Fuhrwerksförderung und Wege-Anlage.

32) Festigkeit

des Zerreissens; Zerbrechens; Zerdrückens.

Vorbemerkung.

Ein Blick auf die beiden Messknechtstafeln, einer rückwärts in das bereits abgehandelte Material und einer vorwärts in das weite fruchtbare Gebiet der technischen Physik und Mechanik, werden dem Sachverständigen kaum einen Zweifel übrig lassen, in wie fern der Knecht seinem Herrn auch auf diesem Felde als zu vielerlei nützlichen Diensten brauchbar sich empfiehlt.

Um aber sein Handbüchlein nicht übermässig anzuschwellen, konnte nur einigen derselben — welche den Lebensverhältnissen, für die der Messknecht vorzugsweise berechnet ist, am nächsten liegen — ein Platz eingeräumt, und muss seine anderweite physikalisch - mechanische Benutzung dem technischen Bedürfnisse und Bildungsstande des Einzelnen überlassen werden.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

Dichtigkeitseigenschaften der Körper (Specifische Gewichtslehre).

§. 334. Die Kenntniss der Dichtigkeits- und specifischen Gewichtszahlen der Körper, welche der Knecht, in der linken und rechten Oberecke, verbunden mit der *n*-Tabelle im Mittelfelde der Vorderseite anbietet, ermöglicht gar viele nützliche Messungen und Rechnungen. In jener *n*-Tabelle lesen wir z. B., dass der preussische Kubikfuss ganz reines (destillirtes) Wasser bei mittlerer Temperatur (14—15° R. oder 18—19 C.) 66 preussische Pfund wiegt, sowie in der linken Oberecke, dass das gegossene Eisen 7,2mal so dicht und also auch so schwer ist als (destillirtes) Wasser, woraus der Preusse sofort ableitet: 1 Kubikfuss Gusseisen wiegt $66 \times 7{,}2 = 475$ Pfund preussisch; eben so der Oesterreicher für seine Maasse: $56{,}3 \times 7{,}2 = 405$ Pfund österreichisch. Jene Zahlen nun, welche, wie hier die $7^2/_{10}$ in Bezug aufs Gusseisen, angeben, wie viele Male so schwer und also auch so dicht die verschiedenen Körperstoffe im Vergleiche zum Wasser sind, werden specifische (eigenthümliche) Gewichte genannt; obwohl sie gar keine Gewichts-, sondern nur reine und unbenannte Verhältnisszahlen sind, welche viel zweckmässiger mit dem Worte »Dichtigkeiten der Körper« bezeichnet worden

wären. Da aber durch die alte Physik und Mechanik jene Benennung einmal eingebürgert war, wählte die neuere den eben vorgeschlagenen Ausdruck »**Dichtigkeit**«, um damit das Gewicht von einem Kubikfusse des betreffenden Stoffes zu bezeichnen.

Man sieht, dass es gerade umgekehrt sein und dies Gewicht den Namen specifisches Gewicht führen sollte. Es ist nothwendig, dass der praktische Mann diese nun einmal naturalisirte wissenschaftliche Verkehrtheit immer im Auge behalte und sich demgemäss merke:

§. 335. **Die Dichtigkeit** (δ) **eines Körpers** im Sinne der neueren Mechanik ist: **die Anzahl Pfunde, die ein Kubikfuss desselben wiegt**; wonach also jedem anderen Maasssystem andere Dichtigkeitszahlen zukommen, z. B.: die Dichtigkeit des Gusseisens ist nach voriger Rechnung in preussischem Maasse die Zahl 475, in österreichischem die Zahl 405.

Das specifische Gewicht (s) **eines Körpers ist: die Verhältnissizahl seiner Dichtigkeit oder seiner Schwere zu der des reinen Wassers** (gewöhnlich beide Körper in mittlerer Temperatur genommen). — Für das specifische Gewicht der Luftarten wird auch häufig statt des Wassers die wasserfreie atmosphärische Luft zur Einheit genommen.

Wenn also z. B. die linke Oberecke sagt: Platin 22, so heisst das: das Platinmetall ist 22mal so dicht und schwer als Wasser, dessen Dichtigkeit = 1 als Einheit gedacht ist.

Das **Gewicht** eines Gegenstandes im Sinne des gemeinen Lebens wird daher, zum Unterschiede von jenem, in der Wissenschaft mit dem Namen: **absolutes Gewicht** belegt.

Anstatt: »die Dichtigkeit des reinen Wassers in sächsischen Zahlen ist (laut *n*-Tabelle) 45,4 Zollpfund«, kann man also auch sagen: »der sächsische Kubikfuss reines Wasser hat 45,4 Zollpfund absolutes Gewicht«.

§. 336. **Die specifische Gewichts- und Dichtigkeitstafel** des Knechtes wird zwar nach dem oben

Bemerkten auch dem Laien verständlich sein; doch ist in Bezug auf ihre Einrichtung und ihre anderweite Nutzanwendung noch Folgendes hervorzuheben:

Die *n*-Tabelle der kleinen Maasstafel im unteren Mittelfelde giebt die Dichtigkeit (δ) des reinen Wassers bei mittlerer Temperatur in dem Maasse und Gewichte jedes in der Ueberschrift stehenden Landes. Dieselbe sagt uns also: 1 österreichischer Kubikfuss dergleichen Wassers wiegt 56,3 Wiener Pfund; ein preussischer: 66 preussische Pfund; ein sächsischer: 45,4 neue oder Zollpfund. — Die Wasserdichtigkeit fürs Metermaass anzugeben ist unnöthig, denn man weiss aus dem ersten Kapitel, dass das Gewicht eines Kubikcentimeter Wassers als Gewichtseinheit (Gramm); also da $100 \times 100 \times 100$ Kubikcentimeter $= 1$ Kubikmeter, folgt des letzteren Gewicht $= 100 \times 100 \times 100 = 1000 \times 1000$ Gramme $= 1000$ Kilogramme. — Auch sagte schon die *h*-Tabelle der Rückseite, dass 1 Gramm $= \frac{1}{\text{Million}}$ Kubikmeter Wassergewicht; also 1 Million Gramme $= 1$ Kubikmeter Wasser.

§. 337. Fortsetzung.

Das linke Dichtigkeitstäfelchen giebt die mittleren specifischen Gewichte der wichtigeren Stoffe, wobei das des Wassers bei mittlerer Temperatur oder 18° C. $= 1$ gesetzt ist, wie die Ueberschrift sagt.

Wir lesen daraus z. B.: Gegossenes Zink ist 7,0mal, gewalztes 7,7mal so schwer und dicht als Wasser; oder das gegossene verhält sich seiner Schwere nach zum gewalzten, wie 70 zu 77, d. i. wie 100 : 110. Letzteres ist also 10 Proc. dichter als jenes.

Bei den Erden und Steinen finden wir doppelte Zahlen; die grösseren beziehen sich nämlich in der Regel auf den sehr nassen oder sehr fetten, die kleineren auf den trocknen oder mageren Zustand.

Wir lesen demgemäss:

Magerer oder trockner Lehm ist 1,5mal, sehr fetter oder sehr feuchter dagegen 2,8mal, mittlerer mit der ge-

wöhnlichen Erdfeuchtigkeit aber zwischen 1,5 und 2,8, also circa 2mal so schwer als Wasser.

Bei der Kohle deuten die doppelten Zahlen nicht sowohl auf den verschiedenen Feuchtigkeits- als vielmehr Dichtigkeitszustand. Ich kann 2 gleich grosse, gleich trockne Stücken Steinkohle haben, deren Schwere sich wie 1,2 : 1,5 verhält, wovon also das eine um den 4. Theil oder 25 Proc. dichter ist als das andere. Hat nun die schwerere im Verhältniss keinen grösseren Aschengehalt, so ist sie auch um 25 Proc. preiswürdiger.

Ferner lesen wir:

Hartes Holz mit Wasser gesättigt ist 1,11; also 11 Proc. schwerer als Wasser; dagegen getrocknet (d. h. künstlich ausgetrocknet, »chemischtrocknes« ohne alles freie Wasser) 0,66 oder nur $^2/_3$ so schwer als Wasser. Während also jenes untersinkt, würde dieses (anfangs) nur bis $^2/_3$ seines Volums ins Wasser eintauchen.

Die Zahlen des Torfes beziehen sich nur auf den gewöhnlich trocknen (lufttrocknen) Zustand, und zeigen sonach, welche ausserordentliche Verschiedenheit der Dichtigkeit bei diesem Material vorkommt; und wie es möglich ist, dass 1 Tausend Torfziegel (mit 0,96 specif. Gewicht) mehr als 6mal soviel Massengehalt haben können, als ein gleich grosses Tausend gelben Rasentorfs (von dem specif. Gewicht 0,15). Und es wird die Heizkraft in nahe gleichem Verhältnisse stehen.

Beim Schnee bezieht sich 0,4 auf den lockeren Zustand des frisch gefallenen; 0,8 dagegen auf den des zusammengelagerten oder des feuchten.

Beim Wein sehen wir, dass süsser 2—4 Proc. schwerer, geistiger (= 0,99) aber 1 Proc. leichter als Wasser ist; sowie endlich bei der Luft, dass diese bei 0° Temperatur (und mittlerem Barometerstand) 770mal so leicht ist als Wasser.

§. 338. Fortsetzung.

Die rechte Dichtigkeitstafel giebt die specif. Gewichtszahlen in dem Verhältniss, dass Wasser = 100 gesetzt ist. Sobald wir also diese Zahlen als Hunder-

tel oder Procentsätze lesen, sind sie sofort auf die Wasserschwere 1 bezogen, wie die der linken Seite. Als solche Hundertel wollen wir sie in der Regel betrachten.

Die Tabelle fürs Derbholz (wohin alle Baumtheile über 3 Zoll Stärke gerechnet werden) giebt die specif. Gewichte direkt für den dürrtrocknen (künstlich ausgetrockneten, chemisch trocknen, wasserfreien) und für den grünen oder frisch gefällten Zustand, in welchem es 33 Proc. (Weissbuche) bis 50 Proc. (Pappel) seines Gewichts Wasser enthält. Wenn das Holz einige Zeit an einem dem Austrocknen nicht ungünstigen Orte als Klafterholz steht, verliert es ungefähr ein Drittel seines Wassers; es wird antrocken; und wenn es dann kleingespalten über $\frac{1}{2}$ Jahr der austrocknenden Luft in günstiger und geschützter Weise exponirt wird, reducirt es seinen Wassergehalt so, dass es noch 20 — 25 Proc. seines Gewichts enthält, und heisst dann lufttrocken. Bis unter 12 Proc. Wassergehalt kann die Austrocknung ohne künstliche Hitze nie getrieben werden.

Da die Dichtigkeit des Holzes, je nach Ort und Jahreszeit, ziemlich verschieden ist, selbst an einem und demselben Stamme, so sind die betreffenden Zahlen immer nur als Mittelwerthe anzusehen. (Der Verfasser fand z. B. an einer frischgefällten Fichte am Wurzelende des Stammes das specif. Gewicht 0,76 und am Wipfelende 0,99).

Man leitet deshalb die Zahlen des luft- und antrocknen Zustandes durch einfache Zwischenrechnung ab, wie unter dem Tabellchen angegeben. Z. B. lufttrockne Weissbuche $= 64 + \frac{1}{3}$ Differenz zwischen 99 und 64 $= 64 + \frac{35}{3} = 64 + 12 = 76$ Hundertel $= 0{,}76$. Antrockne Weissbuche $= 64 + \frac{2}{3}$ Differenz $= 64 + 12 \cdot 2$ $= 88$ Hundertel $= 0{,}88$.

Das Drittel der Differenz bei der Eiche ist $\frac{103 - 62}{3} = 14$; also hat man für die Eiche·

chemisch trocken	lufttrocken	antrocken	frisch gefällt
62	62 + 14 = 76	62 + 28 = 90	103.

Das Täfelchen fürs Reisholz (wozu alles Kronenholz unter 3 Zoll Durchmesser verstanden wird) ist nun selbsterklärlich. Man wird z. B. haben, da antrocken in der Mitte zwischen lufttrocken und grün liegt, specifisches Gewicht von antrocknem Eichenreisig $= \frac{60 + 91}{2} = 75$ Hundertel.

Die Zahlen des dürrtrocknen Holzes haben übrigens noch eine ganz besondere Wichtigkeit hinsichts der Beurtheilung der Heizkraft der verschiedenen Holzarten (siehe im folgenden Kapitel). Uebrigens ist noch zu beachten, dass gleichzeitig mit diesem Austrocknen die Raumverhältnisse schwinden. Dies Schwinden geht fast nur in den Querflächen vor sich, und beträgt (nach König)

	vom grünen Zustande an bis zum antrocknen	lufttrocknen	dürrtrocknen
	im Durchmesser		
bei den härtesten (oberst.)	1 Pc.	3 Proc.	6½ Proc.
bei den mittleren . . .	¾ »	2 »	4½ »
bei den weichsten (untersten)	½ »	1½ »	2½ »
	und im Querschnitte oder im Volumen		
bei den härtesten . . .	3 »	9 »	17 »
bei den mittleren . . .	2 »	6 »	12 »
bei den weichsten . . .	1 »	4 »	7 »

§. 339. Fortsetzung.

Was weiter die in der rechten Dichtigkeitstabelle aufgeführten specifischen Gewichte der geschichteten Früchte anlangt, so ist dabei im Allgemeinen die leichte Aufeinanderhäufung verstanden, wie sie beim Messen im Hohlmaasse, beim Umschaufeln auf dem Schüttboden etc. erfolgt. Die geringeren Werthe beziehen sich dabei auf die leichteste, die grössere auf die schwerere, beste Sorte. Zusammengerüttelte Körnerfrüchte können ausserdem wohl um den zehnten Theil mehr Dichtigkeit besitzen.

Der leichtere Winterweizen, aufgeschichtet, hat also das specif. Gewicht 0,70; der schwerste dagegen 0,81. Und durch's Zusammenrütteln kann jener auf 0,77, dieser auf 0,89 gebracht werden.

Die Doppelzahlen beim Rauhfutter sind aber so zu verstehen, dass die kleine Zahl sich auf die lockerste, die grössere auf eine sehr feste und längere Aufbansung bezieht. Beim Heu z. B. bedeutet 0,07, dass das specifische Gewicht desselben im Haufen auf der Wiese oder nach dem Abladen zu $^{7}/_{100}$ anzunehmen, dagegen bei sehr zusammengedrücktem Zustande auf dem Heuboden auf $\frac{11}{100}$ steigt.

Endlich ist unter »klarer Kohle« sogenannter Kohlengruss (in nussgrossen Stücken) zu verstehen.

§. 340. Volumenwägung.

Der Hauptzweck, weshalb der Knecht sich mit einer Tafel (*n*) der Wasserdichtigkeit und der specifischen Gewichte versehen hat, ist seine mathematische Körpermessung durch eine physische zu vervollständigen und seinen Herrn in Stand zu setzen, das Volumen solcher Körper, die geometrisch nicht kubirt werden können oder sollen, durch das Wägen zu bestimmen.

Dem Unkundigen wird die Möglichkeit und die Me-

thode dieser physischen Stereometrie am besten durch ein Beispiel klar werden.

Das specifische Gewicht des Gusseisens ist $s = 7{,}2$, und die Dichtigkeit des Wassers in preussischen Maassen $\delta = 66$ Pfund, folglich
die Dichtigkeit des Gusseisens $d = \delta \times s = 66 \times 7{,}2 = 475$ Pfund.

Ein Stück Gusseisen, dessen Gewicht $g = 4750$ Pfund, muss also enthalten $v = \frac{4750}{475} = \frac{g}{d} = 10$ Kubikfuss.

Man kann also das Volumen eines Körpers nach Kubikfussen abwägen mittels der Formel

(1) $v = \frac{g}{d}$ oder $= \frac{g}{\delta \, . \, s}$ oder in Worten:

Dividire des Körpers Gewicht durch seine Dichtigkeit oder durch das Produkt aus seinem specifischen Gewicht und der Wasserdichtigkeit.

Zum Beispiel. Um den Massengehalt einer fichtenen Stockklafter auf dem Wege der Wägung zu finden, hatte man eine gute Federwage an einem aus drei Stangen gebildeten Gerüste befestigt, die Scheite einzeln gewogen und ihr Gesammtgewicht $= 2560$ Pfund gefunden. Das Holz war zwar nicht mehr ganz grün, da aber die Dichtigkeit des Stockholzes in der Regel grösser als die mittlere des Baumes ist, soll bei der Berechnung der grüne Zustand angenommen werden. Wieviel Kubikfusse enthielt demnach diese Stockklafter, wenn der Versuch in Sachsen und die Wägung nach Handelspfunden geschah?

Die sächsische Wasserdichtigkeit ist $= 45{,}4$ Zollpfunde $= 22{,}7$ Kilogramme, laut h-Tabelle $= 22{,}7 \times 2{,}14 = 48{,}5$ Handelspfunde; also

$$v = \frac{g}{\delta \, . \, s} = \frac{2560}{48{,}5 \times 0{,}79} = 66{,}8 \text{ Kubikfuss.}$$

§. 341. Anderweite Beispiele, die sich auf die Volumenwägung beziehen.

1. Beispiel. Das gesammte Astholz einer frisch gefällten Buche in Baiern wog 800 Pfund. Wieviel Ku-

bikfuss Holzmasse kommen demgemäss auf den Kroneninhalt dieses Baumes?

Das gesammte Astholz besteht theils aus Derb-, theils aus Reisholz. Jenes hat zum specif. Gewicht 97, dieses 86. Das einfache Mittel zu nehmen, würde aber darum weniger richtig sein, weil die Masse und auch der Einfluss des ersteren in der Regel grösser ist. Wäre die Derbmusse doppelt so gross als die Reisigmasse, so wäre das entsprechende mittlere specifische Gewicht des ganzen Kronenholzes $= \frac{97 + 97 + 86}{3} = 93$ Hundertel, und demgemäss, da der Knecht die Wasserdichtigkeit in baierischem Maass zu 44,3 giebt,

$$v = \frac{800}{44{,}3 \times 0{,}93} = \frac{800}{41{,}2} = 19{,}4 \text{ Kubikfuss.}$$

2. Beispiel. Wieviel Holzmasse enthält ein Schock lufttrocknes Nadelreisig, dessen 60 Wellen zusammen 600 Zollpfund wogen, in sächsischen Kubikfussen?

Das specif. Gewicht giebt der Knecht circa 50 Hundertel oder $1/2$; also ist dieses Holzes Dichtigkeitszahl $= \frac{45{,}4}{2} = 22{,}7$ Pfund; also enthält es $\frac{600}{22{,}7}$ $= 27$ Kubikfuss knapp.

3. Beispiel. Ein preussischer Landwirth will wissen, wieviel Kubikfuss ein Centner Heu à 110 Pfund einnimmt a. im locker, b. im mittelmässig, c. im sehr zusammengedrückten Zustande?

a. 1 Kubikfuss $= 66 \times 0{,}07$ Pfund; also

$$v = \frac{110}{66 \times 0{,}07} = \frac{110}{4{,}62} = 23{,}8 \text{ Kubikfuss.}$$

b. 1 Kubikfuss $= 66 \times 0{,}09$ Pfund; also

$$v = \frac{110}{66 \times 0{,}09} = \frac{110}{5{,}94} = 18{,}5 \text{ Kubikfuss.}$$

c. 1 Kubikfuss $= 66 \times 0{,}11$ Pfund; also

$$v = \frac{110}{66 \times 0{,}11} = \frac{1000}{66} = 15{,}2 \text{ Kubikfuss.}$$

4. Beispiel. Ein österreichischer Techniker fragt den

Messknecht: a. wieviel Kubikfuss bruchfeuchte Sandsteine und b. wieviel Kubikfuss antrocknes weiches Holz zu einer Fuhre von 3000 Pfund Ladung gehören?

Da der Knecht das specif. Gewicht (s) für bruchfeuchten Sandstein zu 2,3 und für antrocknes Fichtenholz zu $41 + 2 \,.\, 13 = 0{,}67$ zeigt, so hat man in österreichischem Maass:

$$\text{a. } v = \frac{3000}{56{,}3 \times 2{,}3} = 23{,}2 \text{ Kubikfuss Sandstein.}$$

$$\text{b. } v = \frac{3000}{56{,}3 \times 0{,}67} = 104 \text{ Kubikfuss Holzmasse.}$$

5. Beispiel. Zur Deckung eines Hauses in Sachsen wurden Zinktafeln verwendet, von denen jede, 3 Fuss (36 Zoll) breit und 6 Fuss (72 Zoll) lang, 10 Handelspfunde wog. Der Knecht soll hieraus die Stärke der Tafeln in Zollen bestimmen?

Der Rauminhalt der Tafel, nach dem Gewichte erörtert, ist $v = \frac{g}{\delta \,.\, s} = \frac{10}{48{,}5 \times 7{,}7} = \frac{10}{373.45}$ Kubikfuss $= \frac{10 \times 1728}{373{,}45}$ Kubikzoll $= 46{,}3$ Kubikzoll.

Der Rauminhalt geometrisch ermittelt, wenn die unbekannte Dicke $= x$ gesetzt wird, Seite 329 giebt $v = 36 \times 72 \times x = 2592\, x$; da also dies $2592\, x = 46{,}3$ Kubikzoll sein muss, so muss auch sein $x = \frac{46{,}3}{2592} = 0{,}018$ Zoll oder nahe $1/55$ Zoll.

§. 342. Geometrische Gewichtsmessung.

Dass ein Hülfsmittel, welches die Dichtigkeit eines Naturkörpers kennt und gleichzeitig denselben geometrisch kubirt, dadurch (also durch Messung) das absolute Gewicht desselben zu bestimmen (gleichsam als geometrische Wage zu wirken) vermag, liegt auf der Hand. Auch folgt unmittelbar aus der Volumenformel:

(1) $\frac{g}{d} = v$ oder $\frac{g}{\delta \,.\, s} = v$ der S. 466, die absolute Gewichtsformel:

(2) $g = v \times d$ oder $= v \,.\, \delta \,.\, s$; d. h.

Willst du das (absolute) Gewicht eines Körpers ohne Wägung finden, so kubire ihn nach Vorschrift des dritten Buches und multiplicire sein Volumen mit seiner Dichtigkeit oder mit seinem specifischen Gewichte und der Wasserdichtigkeit.

§. 343. **Beispiele, die Messung des absoluten Gewichts betreffend.**

1. **Beispiel.** Es ist bekannt, dass die dreifussige Scheitklafter 80 Kubikfuss Masse enthält. Wie schwer ist daher eine solche in Kiefernholz und zwar a. im frischen und b. im lufttrocknen Zustande in preussischem Maasse?

Für jenen Zustand giebt der Knecht das specif. Gewicht = 86 und für diesen (laut S. 463) = 45 + 13 = 58 Hundertel; mithin

a. $g = v \times \delta \times s = 80 \times 66 \times 0{,}86 = 4541$ Pfund;
b. $g = v \times \delta \times s = 80 \times 66 \times 0{,}58 = 3062$ Pfund.

2. **Beispiel.** Wieviel Pfunde wiegt im Mittel der Scheffel klare und grobe Kohle in Sachsen?

Laut m-Tabelle ist 1 Scheffel $= \frac{32}{7}$ Kubikfuss; und laut n-Tabelle 1 Kubikfuss Wasser = 45,4 Pfund; endlich laut der rechten Dichtigkeitstafel das specif. Gewicht der klaren Kohle in nussgrossen Stücken im Mittel 0,90; der grobstückigen 0,97. Also wiegt

1 Scheffel klare Kohle $\frac{32}{7} \times 45{,}4 \times 0{,}90$ Pfund.
$= 187$ Pfund;

1 Scheffel grobe Kohle $\frac{32}{7} \times 45{,}4 \times 0{,}97 = 201$ Pfund.

Der Scheffel der letzteren hält also im Durchschnitte 14 Pfund oder 8 Proc. mehr.

3. **Beispiel.** Wieviel wiegt der Scheffel besten Hafers in Baiern?

Laut m-Tabelle ist 1 Kubikfuss = $1/_9$ Scheffel; also 1 Scheffel = 9 Kubikfusse. Laut n-Tabelle 1 Ku-

bikfuss = 44,3 Pfund; 1 Scheffel Wasser also = 44,3 × 9 = 398,7 Pfund. Laut der rechten Oberecke endlich der beste Hafer 0,44mal so schwer als Wasser, mithin 1 Scheffel solchen Hafers = 398,7 × 0,44 = 175 Pfund baierisch.

4. Beispiel. Wieviel Zollcentner Stroh sind in einem Feimen befindlich, dessen Volumen zu 4500 preuss. Kubikfuss ausgemessen worden ist?

Nehmen wir zwischen dem specif. Gewicht 10 und 12, das der Knecht giebt, das Mittel 0,11, so wiegt 1 Kubikfuss Stroh 66 × 0,11 = 7,26 Pfund, also der Feimen $= \frac{4500 \times 7{,}26}{100}$ Centner = 312 Centner.

§. 341. Die specifische Gewichts- oder Dichtigkeitsmessung einer Masse, deren Volumen der Knecht genau genug messen und deren absolutes Gewicht durch eine hinlänglich genaue Wage gewogen werden kann, gestaltet sich unter diesen Voraussetzungen ganz einfach. Denn da, wenn wieder V das Volumen, δ die Dichtigkeit des Wassers, s das specifische und g das absolute Gewicht des betreffenden Körpers bedeutet, nach obiger Regel $v \,.\, \delta \,.\, s = g$, so folgt 3) $s = \frac{g}{v \,.\, \delta}$ oder in Worte übersetzt:

Um die Dichtigkeit eines physischen Körpers als specifisches Gewicht zu ermitteln: dividire sein (absolutes) Gewicht durch sein mit der Wasserdichtigkeit multiplicirtes Volumen.

Ist der Körper klein und nach Zollen kubirt, so hat man natürlich unter δ auch die auf den Kubikzoll bezogene Wasserdichtigkeit zu verstehen, die beim Duodecimalmaass der 1728ste, beim Decimalmaass 1000ste Theil der in der Tafel angegebenen ist.

Soll dagegen die Dichtigkeit im Sinne des §. 335, als Gewicht des Kubikfusses (d), ermittelt werden, so hat man

$$v : 1 = g : d, \text{ also } d = \frac{g}{v}, \text{ d. h.}$$

Dividire das in Pfunden ausgedrückte absolute Gewicht des Körpers durch sein in Kubikfussen ausgedrücktes Volumen.

§. 342. **Beispiele über Dichtigkeitsmessung.**

1. **Beispiel.** Ein 3 Zoll dicker, 6 Zoll breiter und 12 Zoll langer (sächsisches Maass) Mauerziegel wog 10 Pfund Zollgewicht. Wie gross ist also sein specifisches Gewicht.

Sein Volumen ist: ($3 \times 6 \times 1 = 18$, in der *Pr.*-Spalte aufgesucht) $= 0{,}13$ Kubikfuss, also da $s = \frac{g}{v \, . \, \delta}$ und nach der Tabelle das sächsische $\delta = 45{,}4$ Pfund,

$$s = \frac{10}{0{,}13 \times 45{,}4} = 1{,}75.$$

2. **Beispiel.** Wenn ein preussischer Scheffel Getreide 90 Pfund wiegt, welches specif. Gewicht kommt letzterem dann zu?

Das Mittelfeld sagt: dass $\frac{9}{16}$ Scheffel $= 1$ Kubikfuss, also 1 Scheffel $= \frac{16}{9}$ Kubikfuss und da dasselbe auch $\delta = 66$ Pfund giebt, folgt:

$$s = \frac{g}{v \, . \, \delta} = \frac{90}{\frac{16}{9} \, . \, 66} = 0{,}84.$$

3. **Beispiel.** Der sächsische Eimer (à 72 Kannen) Weingeist wog 112 Zollpfunde. Von welchem specif. Gewicht ist derselbe?

Gegeben das absolute Gewicht $g = 112$; die Wasserdichtigkeit $\delta = 45{,}4$ Pfund. Zu suchen zunächst das Volumen von 1 Eimer. Nach der *m*-Tabelle ist 23,9 Kannen $= 1$ Kubikfuss; also 1 Kanne $= \frac{1}{23{,}9}$ Kubikfuss, also 72 Kannen $= \frac{72}{23{,}9} = 3{,}01$ Kubikfuss $= 1$ Eimer. Mithin:

$$s = \frac{112}{3{,}01 \, . \, 45{,}4} = 0{,}819.$$

§. 343. Anderweite Beispiele näherer und entfernterer Anwendung.

1. **Beispiel.** Die Dichtigkeit des leichtesten und schwersten Holzes im dürren und im grünen Zustande in sächsischen Zahlen und nach dem Handelspfunde anzugeben.

Im dürren Zustande ist das kleinste $s = 0{,}38$ (der Pappel und Weide) und das grösste $= 0{,}64$ (der Weissbuche); also da nach Beispiel a. S. 466 $\delta = 48{,}5$ Pfunde:

$d = \delta \cdot s = 48{,}5 \times 0{,}38 = 18{,}4$ Pfund (für Pappel),
und $48{,}5 \times 0{,}64 = 31{,}0$ Pfd. (f. Hornbaum).

Im grünen Zustande: das kleinste $s = 0{,}76$, das grösste $= 1{,}03$; demgemäss:

$d = \delta \cdot s = 48{,}5 \times 0{,}76 = 40$ Pfund (für Pappel),
sowie $d = 48{,}5 \times 1{,}03 = 50$ Pfund (für Eiche).

2. **Beispiel.** Wie gross hat man die Dichtigkeit des Mauerwerks in preussischen Maassen anzunehmen?

Nimmt man sein mittleres s, wie es die specifischen Gewichtszahlen andeuten, zu $2\frac{1}{2}$, so folgt $d = \delta \cdot s = 66 \cdot 2\frac{1}{2} = 165$ Pfund.

3. **Beispiel.** In Sachsen wird das zweispännige Normalfuder Sand in der Regel zu 5 Kubikellen oder 40 Kubikfuss gerechnet. Wieviel Last hat ein solches in sehr feuchtem Zustande der Masse?

Für diesen Zustand zeigt der Knecht $s = 1{,}9$; also

$g = v \cdot \delta \cdot s = 40 \cdot 48{,}5 \cdot 1{,}9 = 3686$ Pfund.

4. **Beispiel.** Der Messknecht soll sagen, wieviel ein entwipfelter eben gefällter Tannenstamm von 60 Fuss Länge und 13 Zoll mittlerem Durchmesser nach österreichischem Maasse an Gewicht hat?

Als Parabelkegel berechnet, hat man:

$V =$ Kreis von 13 Zoll $\times$ 30 Fuss, also nach *Kr.*-Spalte $0{,}922 \times 30 = 27{,}66$ Kubikfuss, und da die Wasserdichtigkeit in österreichischem Maasse 56,3 und das specifische Gewicht der Tanne 0,83, so folgt: $g = v \cdot \delta \cdot s = 27{,}66 \times 56{,}3 \times 0{,}83 = 1265$ Pfund.

5. **Beispiel.** Welches Gewicht hat bei 28 pariser Zoll

Barometerstand die Luftsäule von 1 pariser □Zoll Grundfläche in pariser Pfunden; oder: welchen mittleren Druck übt die Atmosphäre auf jeden □Zoll Oberfläche (in pariser Maasse) aus?

Das Gesuchte ist das Gewicht eines Parallelepipedums von Quecksilber von 1 □Zoll Basis und 28″ Höhe. Da nun das $v = 1 \times 28 = 28$ Kubikzoll; und das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser $= \delta = \frac{69,9}{1728}$ und das s des Quecksilbers $= 13,6$, so folgt:

$$g = 28 \cdot \frac{69,9}{1728} \cdot 13,6 = 15,4 \text{ Pfund.}$$

6. **Beispiel.** Wenn die Atmosphäre eine 28 pariser Zoll hohe Quecksilbersäule trägt, eine wie hohe Wassersäule in österreichischen Fussen kann sie da tragen, oder: wie hoch beinahe kann eine Wassersaugpumpe wirken?

Der Knecht sagt: 308 pariser Zoll sind = 316 österreichischen; 1 pariser Zoll $= \frac{316}{308}$ österreichischen; also Quecksilberhöhe von 28 pariser Zoll $= \frac{316}{308} \times 28$ österreichische Zolle $= \frac{316}{308} \times \frac{28}{12}$ österreichische Fusse; das Wasser aber ist 13,6mal so leicht als Quecksilber, folglich die Wassersäule 13,6mal so hoch als die Barometersäule, also die gesuchte Höhe: $= \frac{316}{308} \times \frac{28}{12} \times 13,6$ Fuss $= \frac{79}{33} \times 13,6 = 32\frac{1}{2}$ Fuss

Achtundzwanzigstes Kapitel.

Wärmetechnik.

---

a. Ausdehnung durch Wärme.

§. 344. Sobald das eigenthümliche Wesen, das wir **Wärmestoff** (*calor*) nennen, in die Körper eindringt, wirkt es der Anziehungskraft ihrer Theile (der Cohäsion) entgegen, d. h. **Wärme dehnt sie aus und vermindert ihre Dichtigkeit.**

Der rothglühende eiserne Reif geht darum willig um das Rad und presst, erkaltet, seine Felgen zusammen; und das specif. Gewicht des Wassers bei 4° C .ist 1,008, während das der mittleren Temperatur (14—15° R., 18° C.) = 1,000 ist, wie aus der Tabelle der linken Oberecke zu ersehen. Nach der *n*-Tabelle des Knechtes ist ferner in sächsischen Zahlen die Dichtigkeit des reinen Wassers bei mittlerer Temperatur = 45,4 Zollpfund; also dem Obigen nach bei 4° C., d. h. im Zustande der grössten Dichtigkeit, um 8 Tausendtel, oder: in dem Verhältnisse 1,000 zu 1,008 grösser, also = 45,4 × 1,008 = 45,8 Pfund.

§. 345. Eine Art Ausnahme von diesem Gesetze machen manche feuchte Körper, die, indem die Wärme die ihnen innewohnende Flüssigkeit verdunstet (bis zur Verdunstung **ausdehnt**), dadurch zusammenschwinden (Thonsteine, Lehmmauern, Holz; gefeuchtetes Papier). Eine wirkliche Ausnahme macht aber das Wasser insofern, als es, wenn die Temperatur von 4° weiter noch nach dem Gefrierpunkte zugeht, sich (in Folge der nun bald beginnenden Krystallisation) wieder ausdehnt, so dass sein specif. Gewicht von 1,008 bis auf 0,92 (siehe Dichtigkeits-Tabelle, Eis = 0,92) oder von 100,8 auf 92 herabsinkt.

Ueberhaupt wird die Ausdehnung und Zusammenziehung, die durch die Wärme-Zu- und Abnahme be-

dingt wird, unregelmässig, sobald sich ein Körper dem Punkte nähert, wo er seinen Aggregatzustand ändert, d. h. wo ein fester flüssig, ein flüssiger dampfförmig, oder umgekehrt ein flüssiger fest zu werden beginnt. Ausserdem aber ist sie ziemlich gleichförmig, weshalb z. B. das bei — 39° C. gefrierende und erst bei + 360° C. siedende Quecksilber im Thermometer die Temperatur von — 30 bis + 300 durch gleiche Grade der Skala richtig anzugeben vermag, während der rectificirte Weingeist, der seinen Siedepunkt schon bei + 78½° C., seinen Gefrierpunkt aber äusserst tief hat, kaum noch bis 60° über, wohl aber für jedwede Temperatur unter dem Wassergefrier- oder Eisschmelzpunkte zur Wärmemessung anwendbar ist.

§ 346. Dass beim Réaumur'schen Thermometer der Raum zwischen dem Gefrier- und Siedepunkte in 80, beim Celsius'schen oder Centesimal-Thermometer aber in 100 Grade getheilt wird, die Réaumur'sche zu der Celsius'schen Temperaturzahl sich also wie 4 : 5 verhält, Fig. 348, dürfte Jedem bekannt sein; weniger vielleicht, dass die (in England und Russland gebräuchliche) Fahrenheit'sche Skala ihren Nullpunkt 32 (Fahrenheit'sche) Grade unter dem Gefrierpunkte hat und der Raum von letzterem bis zum Siedepunkte in 180 Grade, also der von ihrem Null- bis zum Siedepunkte in 32 + 180 = 212 Grade getheilt ist.

Fig. 348.



In neuerer Zeit wird mehr und mehr die Celsius'sche oder Centesimalskala gebraucht; und es ist diese in dem Folgenden immer gemeint, wenn nicht das Gegentheil erwähnt ist. Ihre Reduction auf Réaumur'sche Grade geschieht ganz einfach durch Multiplikation mit $\frac{4}{5}$; und umgekehrt: mit $\frac{5}{4}$.

Die Reduction von Celsius in Fahrenheit und um-

gekehrt geschieht am besten nach der im linken Mittelfelde des Knechtes angegebenen Formel:

$$C = (F - 32)\ ^5/_9;\ F = ^9/_5\ C + 32.$$

1. Beispiel. Physikalisch-statistischen Beobachtungen nach soll die grösste Kälte in Deutschland noch nicht unter -28° R. gesunken sein. Wieviel ist dies nach Centi-Graden?

$$C = ^5/_4\ R = ^5/_4 \times 28\ \textit{minus} = -35^\circ\ C.$$

2. Beispiel. Ein Engländer schreibt von einer Hitze von 104° (Fahrenheit). Welche Temperatur ist damit nach Réaumur und Celsius gemeint?

$C = (F - 32)\ ^5/_9 = (104 - 32)\ ^5/_9 = 72 \times {}^5/_9 = 40^\circ$ Wärme nach Centesimal-Skala,

$R = ^4/_9\ C = ^4/_5 \,.\, 40 = 32^\circ$ Wärme nach Réaum.-Skala, oder

$R = (F - 32)\ ^4/_9 = 72 \times {}^4/_9 = 32^\circ.$

3. Beispiel. Wo liegt am Centi-Thermometer der Fahrenheit'sche Nullpunkt?

Da hier der Stand des Fahrenheit'schen Thermometers $F = 0$, folgt $C = (0 - 32)\ ^5/_9 = -\frac{160}{9}$ $= -17^7/_9$, also bei $17^7/_9{}^\circ$ Kälte nach Celsius.

§. 347. Die Kenntniss der Ausdehnung, welche verschiedene Körper durch die Wärme erleiden, ist mitunter von praktischem Werthe. Darum enthält der Knecht (auf dem rechten Rande der Rückseite) die betreffenden Zahlen für jene Stoffe, in Bezug auf welche diese Kenntniss am nöthigsten erscheint. Mit diesen Ausdehnungszahlen hat es folgende Bewandtniss.

Wenn eine gusseiserne Platte von 0° bis auf 100° erwärmt wird, so dehnt sie sich nach allen Richtungen um 0,0011 (oder 11 Zehntausendtel) ihrer Dimensionen aus; d. h. alle ihre Dimensionen nehmen zu in dem Verhältnisse von 1 zu 1,0011, welches man die Längenausdehnung nennt.

Gemäss Seite 323 etc. hat dann jede Fläche dieses Körpers zugenommen in dem Verhältnisse von 1^2 zu $1{,}0011^2$

oder 1 × 1 zu 1,0011 × 1,0011, was bis auf Zehntausendtel ausgeführt, das Verhältniss 1 zu 1,0022 erzeugt.

Die Flächenvergrösserung beträgt also 22 Zehntausendtel oder das Doppelte der Längenvergrösserung.

Die ganze räumliche oder Volumen-Ausdehnung dieses Körpers hat dagegen zugenommen (s. S. 323 etc.) in dem Verhältnisse von 1^3 zu $1{,}0011^3$, oder 1 . 1 . 1 zu 1,0011 × 1,0011 × 1,0011, welches Produkt, wiederum nur bis auf 4 Decimalstellen angegeben, das Verhältniss 1 zu 1,0033 ergiebt; die Volumen-Vergrösseruug ist also 33 Zehntausendtel oder das Dreifache der Längenvergrösserung.

§. 348. Das einfache Gesetz, dass die Flächenvergrösserung das Doppelte und die Volumenvergrösserung das Dreifache der Längen- oder Linearvergrösserung ist, gilt mit hinlänglicher Genauigkeit für alle festen Körper, weil bei ihnen allen die letztere Ausdehnungszahl (im obigen Beispiel 0,0011) äusserst klein gegen das Ganze (oder die 1) ist. — Indessen hat es auch für Flüssigkeiten ausreichende Gültigkeit.

Zum Beispiel. Beträgt die lineare Ausdehnung des (absoluten) Alkohols für 100° Temperaturerhöhung 172 Zehntausendtel, so ist das Verhältniss seiner Volumvergrösserung wie $1^3 : 1{,}0172^3$ oder wie 1 : 1, 05251 d. h. die Ausdehnung beträgt 525 Zehntausendtel des ursprünglichen Volumens, und es ist also die Längenausdehnung 172 beinahe das Drittel $\left(\frac{525}{3} = 175\right)$ davon.

Wenn also der rechte Rand der Rückseite des Knechtes in Bezug auf's Zink sagt: Volumenausdehnung für 100° Temperaturerhöhung = 88 Zehntausendtel = 0,0088, so ist damit zugleich gesagt: Linearausdehnung = (88 × $\frac{1}{3}$) = 29 Zehntausendtel, = 0,0029: Flächenausdehnung = (88 × $\frac{2}{3}$) = 59 Zehntausendtel = 0,0059; und demgemäss die

Ausdehnung für 1° Temperaturerhöhung 100mal kleiner oder

= 0,000029 = 29 Milliontel bei der Längen-
= 0,000058 = 58 od. 29 × 2 Milliontel bei der Flächen-
und = 0,000088 = 88 od. 29 × 3 Milliontel bei d. Volumen-
} Ausdehnung des Zinkes.

Diese Ausdehnungszahlen für 1 Grad Temperaturerhöhung pflegt man den Ausdehnungskoëfficienten zu nennen, und wenn nicht das Gegentheil besonders erwähnt wird, ist unter diesem Namen immer der der linearen oder Längenvergrösserung gemeint.

Die Zahlen des rechten Randes der Rückseite, wenn wir sie als Zehntausendtel betrachten, bedeuten also für 100° Temperaturerhöhung die Grösse der Volumenausdehnung. Die Division durch 3 giebt die der Längen-, und das Doppelte der letzteren, die der Flächenausdehnung. Lesen wir sie aber als Milliontel, so beziehen sie sich auf 1 Grad Temperaturerhöhung und geben gedrittelt den sogenannten Ausdehnungskoëfficienten (der Längenvergrösserung).

Doch ist hierzu hinsichts der Flüssigkeiten zu bemerken, dass deren Zahlen weniger zuverlässig sind, indem z. B. Dalton die des Alkohols (von 0,817 specif. Gewicht) zu 1112, also doppelt so gross, und Hallström die des Wassers = 477 angiebt.

§. 349. Beispiele der Anwendung.

1. Beispiel. Um wieviel verdehnen sich der Länge nach die 8 Fuss oder 96 Zoll langen Platten eines Zinkdaches, wenn dessen Temperatur einem Wechsel von — 30° bis zu 50° ausgesetzt ist?

Nach dem rechten Rande der Rückseite ist die Volumenausdehnung pro 100° = 88 Zehntausendtel, oder pro 1° = 88 Milliontel, also die Längenausdehnung $= \frac{88}{3} =$ 29 Milliontel = 0,000029; mithin pro 80° Temperaturerhöhung = 0,000029 × 80 = 0,00232;

und in Zollen: 0,00232 × 96 = 0,22272; circa $^2/_9$ Zoll.

2. Beispiel. Wenn man genöthigt wäre, bei 20° Wärme ein messingenes Metermaass anzufertigen, das bei 0 Grad ganz genau = 1 Meter = 1000 Millimeter sein soll, wie lang hat man es bei obiger Temperatur zu machen?

Der Messknecht sagt: Volumenausdehnung des Messings pro 100° = 0,0056; also die 3mal so kleine Längenausdehnung des Messings pro 100° = 0,0019; folglich pro 1° letztere = 0,000019;
pro 20° » = 0,000019 × 20 = 0,00038;
und da der Stab = 1000 Millimeter, die ganze Ausdehnung desselben bei 20° Temperaturerhöhung = 0,00038 × 1000 = 0,38 Millimeter; so dass also der Stab = 1000,38 Millimeter lang zu machen wäre.

3. Beispiel. Wieviel muss man bei strengster Winterkälte den 20 Fuss langen Eisenbahnschienen an ihrem Stosse beim Legen Abstand geben, damit sie bei grösster Sonnenhitze eben zusammenstossen.

Längenausdehnung des Eisens pro 100° C. = $\frac{35}{3}$ = 12 Zehntausendtel. Auszuhaltende Temperaturveränderung von 35° Kälte bis 40° Hitze, zusammen = 75° = $^3/_4$ der Skala. Daher Längenausdehnung für diese Temperaturverschiedenheit = 12 × $^3/_4$ = 9 Zehntausendtel; also da 20 Fuss = 240 Zoll, die totale Ausdehnung = 0,0009 × 240 = 0,216 oder fast 0,22 = $^2/_9$ Zoll. (Jede 20 Fuss lange Schiene dehnt sich also bei 75° Temperaturunterschied um $^2/_9$ Zoll aus.)

§. 350. Da jeder Körper, der ausgedehnt wird, an Festigkeit verliert, oder dem Punkte des Zerreissens oder Zerbrechens näher gebracht wird, so müssen alle Körper durch erhebliche Temperaturerhöhung auch entsprechend an ihrer Festigkeit verlieren.

Die durch die Temperaturverschiedenheit bedingte Ausdehnung und Zusammenziehung der Körper erfolgt übri-

gens mit ausserordentlicher Kraft, so dass selbst bedeutende mechanische Wirkungen dadurch hervorgebracht, z. B. durch erhitzte Anker sich neigende Mauern wieder aufgerichtet werden können (was Molard einst im *Conservatoire des arts et metiers* in Paris mit grossem Erfolge versucht hat).

Beispiel. Der Anker sei 60 Fuss oder 720 Zoll lang und an dem einen Ende so befestigt, dass er sich nur nach dem anderen, durch die geneigte Wand hindurchgehenden Ende hin ausdehnen kann. Um wieviel wird der Kopf dieses Endes vortreten, wenn die ganze Ankerlänge um 100° erwärmt wird?

Der Messknecht giebt die Volumenausdehnung des Schmiedeeisen zu 35, also die Längenausdehnung zu $\frac{35}{3} = 12$ (Zehntausendtel) bei 100° Temperaturerhöhung; folglich da $0{,}0012 \times 720$ Zoll $= 0{,}86$ Zoll. Um so viel, also um fast 1 Zoll würde die Mauer am Ankerpunkte nach dem Erkalten herübergezogen werden, wenn die Feder in den Kopf scharf passend beim erhitzten eingekeilt ward.

b. Wärmecapacität. Specifische Wärme.

§. 351. Wenn wir die Wärmemenge (»Hitzkraft«), welche nöthig ist, um 1 Pfund Wasser um 1 Grad (Cent.) wärmer zu machen, als Wärmeeinheit mit dem Namen Calorie belegen, so brauchen wir, um die Temperatur von 50 Pfund Wasser um 1° zu erhöhen, 50 Calorien. Und um bei diesen 50 Pfunden 10° Temperaturerhöhung hervorzubringen: $50 \times 10 = 500\ C$.

Die Wärmemenge W, die nöthig ist, um m Pfunde Wasser n^0 wärmer zu machen, ist sonach $W = m \,.\, n \,.\, C = m \times n$ Wärmeeinheiten.

Um 1 Pfund Eisen um 1° wärmer zu machen, bedarf man dagegen nur $0{,}112\ C$ oder $^1/_9$ jener Wärmeeinheit; also um m Pfund Eisen n Grad wärmer zu machen, nur eine Heizkraft oder Wärmemenge $W = {}^1/_9\ m\, n\, C$; Quecksilber gar nur $^1/_{30}$ oder 0,033 des zum Wasser nöthigen Wärme-

stoffes. Und dieselbe Heizung, die eine gewisse Wassermenge um eine gewisse Temperatur erhöht, bringt diese Temperaturerhöhung bei einer 9mal so grossen Eisen- und 30mal so grossen Quecksilbermasse hervor. Das Wasser kann also gegenüber dem Quecksilber 30mal soviel Wärme fassen, ehe seine Temperatur in gleichem Maasse wie beim Quecksilber zur Erscheinung kommt. Man sagt: die Fassungskraft (Capacität) des Quecksilbers ist $\frac{1}{30}$ von der des Wassers; oder kürzer: die specifische Wärme des Quecksilbers ist $= \frac{1}{30}$; des Eisens $= \frac{1}{9}$.

Die Zahlen der specifischen Wärme sind also nicht sowohl Wärmemengen, als Verhältnisszahlen, die die Wärmefassungskraft angeben, wenn die des Wassers = 1 gesetzt ist; gleichwie die specifischen Gewichte keine Gewichtsmengen, sondern eben nur Verhältnisszahlen sind, die die Dichtigkeit angeben, wenn die des Wassers = 1 gesetzt ist.

§. 352. Betrachten wir, um eine Basis zu haben, die Wärmemenge, die das Wasser und jeder Körper bei 0° enthält, als Null,

so haben 9 Pfd. Wasser v. 60° Wärme in sich $60 \times 9 = 540$ Calorien od. Wärmeeinheiten,

dagegen 9 Pfd. Quecks. v. 60° » nur $\frac{1}{30} . 9 \times 60 = 18$ Calorien od. Wärmeeinheiten,

und 9 Pfd. Eisen v. 60° » » $\frac{1}{9} . 9 . 60 = 60$ Calorien od. Wärmeeinheiten,

überhaupt also, wenn w die specif. Wärme des betreffenden Körpers bedeutet, so giebt die Formel $W = w . m . n$. Wärmeeinheiten die Wärmemenge in Calorien an, welche m Pfunde desselben bei n^0 Temperatur enthalten, oder auch welche man braucht, um m Pfunde um n Grade zu erwärmen.

Nach Regnault, Dulong und Petit ergeben sich die specifischen Wärmezahlen w wie folgt:

Wasser . . .	=	1,000	Marmor . . .	=	0,210
Alkohol . . .	=	0,700	Coaks	=	0,203
Eichenholz .	=	0,570	Schwefel . . .	=	0,200
Terpentinöl	=	0,426	Glas	=	0,198
Kohle	=	0,241	Eisen	=	0,112

Kupfer . .	= 0,095	Zinn	= 0,053
Zink	= 0,094	Quecksilb.	= 0,033
Messing . .	= 0,094	Gold u. Plat.	= 0,032
Silber . .	= 0,056	Blei	= 0,030.

Atmosphärische Luft bei gleichbleibendem Drucke 0,276
Wasserdampf » » » 0,847,

Zusatz. Wenn Luft- oder Dampfarten eingeschlossen, ihr Volumen also unveränderlich ist, dann können sie auch weniger Wärmestoff in sich binden und ist dann ihre specif. Wärme um circa $\frac{1}{4}$ kleiner als die bei möglicher Ausdehnung mit unveränderlichem Drucke.

§. 353. Beispiele der Anwendung.

1. Beispiel. 10 Pfund Wasser von 12° und 10 Pfund Blei von 30° zusammengemengt, nehmen nach gegenseitiger Ausgleichung welche Temperatur x an?

10 Pfund Wasser à 12° enthalten nach §. 352 an $W = 1 \cdot 10 \cdot 12 = 120$ Calorien,
10 Pfund Blei à 30° enthalten nach §. 352 an $W = 0{,}03 \times 10 \times 30 = 9$ Calorien.
Bei gleicher Temperatur x für beide enthält an Wärmestoff das Wasser $1 \cdot 10 \cdot x$ Calorien, das Blei $0{,}03 \cdot 10 \cdot x = 0{,}3\,x$; und es muss sein:

$$10\,x + 0{,}3\,x = 120 + 9$$
$$10{,}3\,x = 129$$
$$x = \frac{129}{10{,}3} = 12\tfrac{1}{2}{}^{0},$$

so dass also die gleiche Masse viel heisseren Bleies das Wasser nur $\frac{1}{2}{}^{0}$ zu erwärmen im Stande ist.

2. Beispiel. Wieviel (x Pfunde) Quecksilber von 10° Wärme müsste man mit 5 Pfund Wasser von 20° vermengen, damit das Gemenge auf 15° komme?

Bei 15° hätte das Wasser $1 \cdot 5 \cdot 15 = 75$ Calorien. und das Quecksilber $0{,}033 \cdot x \cdot 15 = 0{,}50\,x$ Calor. } also das Gemenge $75 + 0{,}5\,x$.

Vor der Mengung aber das Wasser $1 . 5 . 20 = 100$ Calor. das Quecksilber $0{,}033 . x . 10 = 0{,}33 x$ Calor. } zusammen $= 100 + 0{,}33\ x$.

Und es muss sein: $75 + 0{,}50\ x = 100 + 0{,}33\ x.$

$$0{,}50\ x - 0{,}33\ x = 100 - 75$$

$$0{,}17\ x = 25$$

$$x = 25 : 0{,}17 = 147 \text{ Pfunde!}$$

3. **Beispiel.** Um die Temperatur eines 12 Pfund schweren erhitzten Eisenstabes kennen zu lernen, ward derselbe in einem 50 Pfund Wasser von 12° Temperatur enthaltenden Fasse untergetaucht und nach erfolgter gegenseitiger Wärmeausgleichung die Temperatur des Wassers = 15° befunden. Die Temperatur der Gefässumwandung kann hierbei als gleichbleibend und sonach als indifferent angesehen werden, da Holz, als sehr schlechter Wärmeleiter, den Wärmestoff nur schwer und langsam in sich aufnimmt. Wie heiss war sonach jenes Metallstück?

Es hatte x Grad Temperatur; also war vorhanden an Wärmestoff vor der Mengung:

im Wasser $1 . 50 . 12 = 600$ Calorien.
im Eisen $0{,}112 \times 12 \times x = 1{,}344\ x$ »

nach der Mengung:

im Wasser $1 . 50 . 15 = 750$ Calor.
im Eisen $0{,}112 . 12 . 15 = 20{,}16$ » } ; also ist

$$600 + 1{,}344\ x = 770{,}16$$

$$x = \frac{770{,}16 - 600}{1{,}344} = 170{,}16 \cdot 1{,}344 = 126{,}7^{\circ}.$$

4. **Beispiel.** In einem kupfernen Kessel von 80 Pfund Gewicht befinden sich 500 Pfund Wasser. Wieviel Wärmestoff hat dieser Apparat in sich aufzunehmen, um seine Temperatur von 10° auf 100, d. h. das Wasser zum Sieden zu bringen?

Die Temperaturerhöhung beträgt 90°, und dazu

braucht das Wasser	1 . 500 . 90 =	45000 Calor.,
das Kupfer (dessen specif. Wärme = 0,095)	0,095 . 80 . 90 =	684 »
	In Summa also:	45684 Wärmeeinheiten.

§. 354. **Gebundene und freie (latente und sensible) Wärme.**

Wenn man zu 1 Pfund Eis von 1° 1 Pfund Wasser von 79° (= 79 Calorien) bringt, so verschluckt ersteres beim Schmelzen sämmtliche 79 Wärmeeinheiten und es entstehen 2 Pfund Wasser von 0°. Jedes Pfund Wasser von 0° enthält also 79 Calorien gebunden, von denen das Thermometer nichts empfindet oder anzeigt. Man sagt, die latente Wärme des Wassers ist 79; und diese wird wieder frei, sobald das Wasser aus dem flüssigen in den festen Zustand zurückgeht. (Dampfen der gefrierenden Flüsse.)

Eben so muss 1 Pfund Wasser von 100°, ehe es sich vollständig in 1 Pfund Dampf von 100° verwandelt, 540 Calorien latent in sich aufnehmen. Diese 540 Calorien werden beim Condensiren des Dampfes natürlich wieder losgelassen und müssen demnach geeignet sein, 5,4 Pfund Wasser von 0° auf 100° zu erwärmen (= 5,4 × 100 = 540 Calorien); und in der That sind 5,4 Pfund Wasser von 0° das Maass, um 1 Pfund Dampf von 100° zu condensiren.

Wenn man nämlich 1 Pfund Dampf von 100° mit 5,4 Pfund Wasser von 0° zusammenbringt, ergeben sich 6,4 Pfund Wasser von nahe 100°, oder 6,4 × 100 = 640 freie Wärmeeinheiten. Da nun davon 100 der zu Wasser gewordene Dampf behält, so muss derselbe 540 ans Condensationswasser gegeben haben: **Die latente Wärme des Wasserdampfes ist 540.**

Um 1 Pfund Wasser von 0° auf 100° zu bringen, bedarf es also der Aufnahme von 1 × 100 = 100 Calorien, dagegen um 1 Pfund Wasser von 0° in Dampf von 100° zu verwandeln, der Aufnahme von 1 × 640 = 640 Calorien, oder der **6½fachen Brennstoffmenge.** In der **Feuerungs**praxis muss man aber das 10fache rech-

nen, weil das kochende Wasser die vom Heizmateriale entwickelten Calorien nicht so gut verschluckt, als das kältere.

Uebrigens zeigen die Eigenschaft der Wärmebindung alle Körper, wenn auch in anderen Zahlen, sobald sie aus dem festen Zustande in den flüssigen, oder aus dem flüssigen in den dampfförmigen übergehen; und ebenso bei entgegengesetzter Veränderung, die Wärmeentbindung.

c. Wirkung und Werth der Brennstoffe.

§. 355. Durch den vorigen Abschnitt, und namentlich durch den letzten Paragraph desselben, ist zugleich das Verständniss der kleinen Brennmaterialstabelle begründet, die der Knecht auf dem linken Mittelfelde der Vorderseite enthält.

Diese Tabelle ist an sich, und noch mehr in Verbindung mit der specif. Gewichtstabelle, für die Oekonomie des technischen wie auch des einfach bürgerlichen Haushaltes von grosser Wichtigkeit und giebt zu vielen nützlichen, namentlich dem Geldbeutel des Hausvaters zu Gut kommenden Erörterungen die nöthigen Zahlengrössen.

Zunächst lehrt nämlich jene Brenntabelle in ihrer einfachen Lesung:

a) Wenn alle Wärme benutzt werden kann, bringt 1 Pfund Holz in ordinär trocknem (nahe lufttrocknem) Zustande 28 Pfund, bei künstlich ausgetrocknetem (dürrem) Zustande aber 36 Pfund Wasser von 0° bis 100°; oder, wissenschaftlich ausgedrückt, es erzeugt 28 $\times$ 100 oder respective 36 $\times$ 100 Wärmeeinheiten, oder auch, um recht kurz und praktisch zu reden: 1 Pfund gewöhnlich trocknes Holz erzeugt 28 Pfund Siedewasser bei vollständiger Benutzung aller entwickelten Wärme; 1 Pfund vollständig ausgetrocknetes aber 36 Pfund. Dabei ist's gleichviel, ob wir weiches oder hartes Holz nehmen.

Gleiche Gewichtsmassen gleich trocknen Holzes, erzeugen gleichviel Wärme, und enthalten in der That auch,

chemisch untersucht, ziemlich gleichviel an zur Wärmeerzeugung wesentlichen Bestandtheilen*).

Die Heizkraft eines gewissen Gewichtes lufttrocknen Holzes verhält sich zu der des gleichen Gewichtes an (künstlich) völlig ausgetrocknetem oder dürrem Holze nahe wie 4 zu 5; gleichviel, ob die Holzarten die nämlichen oder ungleich sind.

b) Gewöhnlich trockner Torf bringt 36 Pfund Wasser zum Sieden oder eine Wirkung von 3600 Calorien hervor, während 1 Pfund völlig ausgetrockneter 4800 Calorien erzeugt. Torf entwickelt also im Mittel $\frac{1}{3}$ mehr Hitze als dieselbe Masse (dasselbe Gewicht) an Holz; und ausgetrocknet wiederum $\frac{1}{3}$ mehr als lufttrocken (da $36 \times 1\frac{1}{3} = 48$).

c) 1 Pfund Torfkohle bringt — gleich einem Pfunde Coaks — 58 bis 60 Pfund Siedewasser oder circa 6000 Wärmeeinheiten hervor, während

d) Braunkohle, durchschnittlich 45 Pfund Siedewasser oder 4500 Calorien, und Steinkohle dagegen im Mittel 75 Pfund Siedewasser oder $75 \times 100 = 7\frac{1}{2}$ Tausend Calorien erzeugt.

e) Beste Braun- und Steinkohle, d. h. solche von möglichst wenig Wasser- und Aschegehalt, bringt dagegen ihr 70- respective 100faches Gewicht Wasser von 0 bis 100°, oder erzeugt pro Pfund 7, respective 10 Tausend Calorien.

f) Die Heizkräfte gleicher Gewichtsmengen Braun- und Steinkohle verhalten sich im Mittel zu einander wie 45 zu 75 oder 3 zu 5; und es ist die der Braunkohle reichlich $1\frac{1}{2}$mal so gross als die des luftrocknen Holzes (= 28) und die der Steinkohle fast 3mal so gross.

g) Zur **Verdampfung** des Wassers gehört circa eine 10mal so grosse Menge Brennmaterial, als zur Erhitzung um 100°. (**Theoretisch** laut S. 484 nur das 6—7fache;

---

*) Im völlig ausgetrockneten Zustande: 52 Proc. Kohlenstoff und 48 Proc. chemisch gebundenes Wasser (Sauerstoff und Wasserstoff im Verhältniss 89 : 11).

doch ist beim Verdampfen die Wärmebenutzung ungünstiger, als beim blossen Erhitzen; darum steigert sich das praktische Verhältniss.)

h) Hierzu ist noch zu bemerken, dass auch bei den besten Feuerungseinrichtungen der Nutzeffect nur 60—70 Proc. beträgt; d. h. dass etwa nur die reichliche Hälfte, höchstens $^2/_3$ der erzeugten Wärme zur Wirkung oder Benutzung gelangen. Bei sehr hohen Temperaturen ist der durch die Esse entweichende Wärmeverlust oft weit über die Hälfte.

§. 356. Wie wir eben sahen, erzeugen also gleiche Gewichte gleich trocknen Holzes gleichviel Wärmemengen; gleichviel ob es Eichen- oder Pappelholz ist, und wiederum dürrtrocknes circa $^1/_4$ mehr als lufttrocknes (S. 485). Lufttrocknes natürlich wiederum erheblich, mindestens $^1/_3$ mehr als antrocknes, da jedes Pfund Wasser, das im Holze ist, 640 Calorien verschluckt (S. 484), dafern es nicht, wie das des lufttrocknen Holzes, beim Brennen zersetzt, sondern, wie beim feuchteren, nur in Dampf verwandelt wird.

Die Heizkräfte von 1 Pfund oder Centner luft- und dürr-trocknen Holzes verhalten sich also nahe wie die Zahlen 28 und 36 oder 4 und 5, woraus zu sehen, wie sehr man dieselben durch's Trocknen steigern kann. Der dabei stattfindende Gewichtsverlust macht aber auch jedes Pfund Holz ziemlich in dem Maasse theurer, als es trockner wird, so dass obige Zahlen noch keineswegs das ökonomische Verhältniss der Holzfeuerung begründen. (Siehe vielmehr das 8. Beispiel a. S. 493).

§. 357. Der Satz: gleiche Gewichte gleich trocknen Holzes haben gleichen Brennwerth, hat seine vollste Richtigkeit bei der wasserfreien oder dürrtrocknen, ausreichend genau indess auch noch bei der lufttrocknen Beschaffenheit. Einige Modification erleidet er aber für den frischen oder grünen Zustand, und zwar aus dem Grunde, weil der Antheil an freiem Wasser bei den verschiedenen Hölzern verschieden ist. Man betrachte die specif. Gewichtstafel

der rechten Oberecke: Grüne Pappel hat das specif. Gewicht 76, dürrtrockne 38,1, gerade die Hälfte oder 50 Proc.; d. h. 1 Pfund frisches Pappelholz hat nur $^1/_2$ Pfund eigentliche Holzmasse; dasselbe gilt beinahe auch von Erle, Linde (82 und 42), weniger von Fichte (79 und 41) und von Kiefer (86 und 45); wogegen bei Weissbuche jene Tabelle sagt: grün 99, dürr 64; d. h. 1 Pfund frisches Weissbuchenholz hat beinahe $^2/_3$ Pfund eigentliche Holzmasse. Die Holzmasse von 1 Pfund grüner Weissbuche verhält sich also zu der von 1 Pfund grüner Pappel wie 65 : 50 oder 13 : 10 oder 130 : 100; oder da die Weissbuche die dichteste, die Pappel die lockerste Holzart ist: Im ganz frischen Zustande enthält das dichteste (härteste) Holz 30 Proc. mehr Brennstoff als das gleiche Gewicht der lockersten (weichsten) Holzart.

Die Werthe der Brennholzklaftern verhalten sich also nicht genau wie ihre Gewichte im grünen, wohl aber wie ihre Gewichte im dürr- und lufttrocknen Zustande. Bei gleichartiger Aufbereitung (wobei z. B. immer die 3füssige Scheitklafter 80 Kubikfuss feste Masse hält) verhalten sich nun jene Klaftergewichte wie die Dichtigkeitszahlen ihrer Holzarten. Also verhalten sich auch die Brennwerthe gleicher Volumina der verschiedenen Holzarten (als z. B. der Scheitklaftern, der Knüppelklaftern, der Reisigwellen unter sich) wie die Zahlen ihrer specif. Gewichte im dürr- und auch im lufttrocknen Zustande.

§. 358. Dadurch wird die Skala der specif. Gewichtszahlen in der Spalte »dürr« zugleich eine Skala des Heizwerthes der betreffenden Holzarten in Bezug auf gleiche Raummaasse. (Streng genommen, wegen der verschiedenen Schwindungsgrösse, siehe S. 464, nur in Bezug auf gleiche Volumina geschwundenen Holzes.)

In Folge dessen lesen wir aus der rechten Oberecke: Die Brennwerthe eines Kubikfusses oder einer Scheitklafter der dort aufgeführten Derbholzarten verhalten sich wie die Zahlen 64, 62, 59 . . . . 41, 38. Dass die Eiche einen höhere

Brennwerth habe (62) als die Rothbuche (59), steht einer allgemein verbreiteten Ansicht zwar entgegen, diese Ansicht ist aber ein Irrthum; denn es erscheint die Eiche bloss darum als kein vorzügliches Brennholz, weil man ihr nie Zeit zum gehörigen Austrocknen lässt, was bei ihr allerdings sehr langsam erfolgt.

Da übrigens je nach dem spärlicheren oder geileren Wuchse die Dichtigkeit derselben Holzart ziemlich verschieden sein kann, so dass z. B. unterdrückt gewachsene Fichten mit sehr feinen Jahrringen dem harten Holze nahe kommen, so haben wir diese Verhältnisszahlen auch hier wieder nur als allgemeine Mittelwerthe anzusehen, welche erforderlichenfalls bei ausnahmsweiser Wuchsart entsprechend zu modificiren wären.

§. 359. **Von den vielen nützlichen Aufgaben und Erkenntnissen, die in Bezug auf die Heiztechnik aus der Brennmaterial- und specif. Gewichtstabelle des Knechtes** abgeleitet werden können, wollen wir hier einige Beispiele folgen lassen

1. Beispiel. Wie hoch müsste die Taxe für die Klafter gewöhnliches Buchenholz sein, wenn das Kiefernholz mit 4 Thlrn. angesetzt ist?

   Nach der rechten Oberecke ist das Brennwerthsverhältniss von Kiefern zu Buchen $= 45 : 59$, also hat man $45 : 59 = 4 : x$ und daraus $x = \frac{236}{45} = 5{,}24$ Thlr. $=$ 5 Thlr. 7 Sgr.

2. Beispiel. Was ist in Absicht auf Heizkraft der Kubikfuss Fichten-Durchforstungsholz von 0,60 specif. Gewicht im lufttrocknen Zustande werth, wenn der Werth des gewöhnlichen Fichtenscheitholzes mit 9 Pfennig angesetzt wird.

   Des letzteren specif. Gewicht im lufttrocknen Zustande ist nach dem Knechte $= 41 + \frac{1}{3}(79 - 41) = 41 + 13 = 54$; also hat man

   $54 : 60 = 9 : x$, woraus $x = 10$ Pfennig.

3. Beispiel. In welchem Verhältnisse steht der Brennwerth von 1 Kubikfuss gewöhnlichem Fichten-, Tannen- und Kiefernreisig zu dergleichen Derbholz und zu einander?

Der Knecht sagt:

Das specif. Gewicht lufttrocknen

Fichtenreisigs = 51; Fichtenderbholzes = 41 + 13 = 54
Tannenreisigs = 50; Tannenderbholzes = 46 + 12 = 58
Kiefernreisigs = 47; Kieferndérbholzes = 45 + 14 = 59.

Nehmen wir den Brennwerth des Fichtenreisigs als Maassstab und = 100 an, so ist

fürs Tannenreisig
51 : 50 = 100 : x, und daraus als Brennwerth = 98
» Kiefernreisig
51 · 47 = 100 : x » » » » » = 92
» Fichtenderbholz
51 : 54 = 100 : x » » » » » = 106
» Tannenderbholz
51 : 58 = 100 : x » » » » » = 114
» Kieferndérbholz
51 : 59 = 100 : x » » » » » = 116.

Zusatz. Diese allgemeinen Verhältnisszahlen können jedoch für einzelne Fälle unstatthaft werden. Sehr frech gewachsenes lockeres Kiefernholz hat z. B. geringere Dichtigkeit und also auch geringere Brennkraft als normales Fichtenholz, letzteres wiederum geringere als sparsam gewachsenes. Im Einzelnen entscheiden daher genauer nur die im betreffenden Falle eben wirklich vorhandenen Dichtigkeitszahlen des (mindestens luft-) trocknen Zustandes.

4. Beispiel. In Tharand kostet der sächsische Scheffel mittelguter Steinkohlen (bester weicher Schiefer des Plauenschen Grundes) bis in das Haus befördert durchschnittlich 11 Neugr. Der Besitzer des Messknechts will aus letzterem ermitteln, wie demgemäss bei Steinkohlenheizung und zweckmässiger Feuerungsanlage dem Tharander Einwohner das Tausend Calo-

rien (Wärmeeinheiten) kosten, die er in seinem Ofen und dergl. zur Wirkung bringt?

Auflösung. Ein Pfund mittlerer Steinkohlen erzeugt laut Brenntabelle 57 Hundert oder 7500 Calorien (S. 486). Man muss also wissen, was das Pfund Steinkohlen kostet; oder zunächst, wieviel der Scheffel Kohle wiegt. Laut m-Tabelle ist $^7/_{32}$ Scheffel $=$ 1 Kubikfuss, also 1 Scheffel $= {}^{32}/_7$ Kubikfuss. Der Kubikfuss geschichtete Steinkohle hat nun laut Dichtigkeitstabelle der rechten Ecke (da der weiche Schiefer zu den leichteren Kohlenarten gehört) etwa 0,90 als specif. Gewicht, wiegt also laut n-Tabelle $0{,}90 \times 45{,}4$ Zollpfund $= 40{,}86$ oder 41 Pfund. Es wiegt also der Scheffel $\frac{32}{7} \times 41 = 187$ Pfund. Das heisst: 187 Pfund weicher Schiefer kosten 110 Pfennig; 1 Pfund also $= 0{,}59$ Pfennig und auch $= 7500$ Calorien; woraus weiter leicht folgt: 1 Pfennig weiche Schieferkohle erzeugt beinahe 13 Tausend Calorien; oder das Tausend Calorien kostet $^1/_{13}$ Pfennig oder genauer 0,078 Pfennig.

5. Beispiel. Der Messknecht soll angeben, wie sich in Tharand gegenüber diesen Kosten der Steinkohlenheizung die der Coaksfeuerung stellt, da der Scheffel Coaks(»griefen«) bis ins Haus nur 5 Ngr. kostet?

Laut Brenntabelle: 1 Pfund Coaks erzeugt 60 Hundert oder 6 Tausend Calorien.

Laut specif. Gewichtstabelle der rechten Ecke und laut n-Tabelle: 1 Kubikfuss Coaks wiegt $0{,}55 \times 45{,}4 = 25$ Pfund.

Laut m-Tabelle: 1 Scheffel Coaks wiegt also $\frac{32}{7} \times 25 = 114$ Pfund und kostet 50 Pfennig.

1 Pfund Coaks ist demnach $= \frac{50}{114}$ Pfg. $= 0{,}44$ Pfg. und auch $= 6000$ Calorien; woraus wieder folgt 1 Pfennig Coaks erzeugt reichlich 13 Tausend Calo-

rien, und es kostet sonach das Tausend Wärmeeinheiten knapp $\frac{1}{13}$ Pfg. oder genauer $\frac{0,44}{6} = 0,073$ Pfg. (also circa wie bei der Kohle).

6. **Beispiel.** Der Messknecht soll auf ähnliche Weise für Tharand die Heizkosten beim Gebrauche von weichem, d. h. Tannen-, Fichten-, Kiefern-Scheitholze im lufttrocknen Zustande angeben; wenn die Klafter (lufttrocken = 78 Kubikfuss Holzmasse) incl. Sägen und Spalten bis ins Haus durchschnittlich 5 Thlr., also der Kubikfuss 19 Pfennig kostet.

Laut Dichtigkeitstabelle der rechten Ecke: specif. Gewicht vom Nadelderbholze im Mittel: dürr = 44; grün 83; also lufttrocken $= 44 + \frac{83 - 44}{3} = 44 + 13 = 57$ Hundertel; also laut n-Tabelle: Gewicht von 1 Kubikfuss $= 0,57 \times 45,4 = 25,9$ Pfund, wofür 26 Pfund zu nehmen.

26 Pfund lufttrocknes Holz kosten also 19 Pfennig; 1 Pfund demnach = 0,73 Pfennig und erzeugte laut Brenntabelle 2800 Calorien. 1 Pfund Holz erzeugt demnach $\frac{2800}{0,73} = 3800$ Wärmeeinheiten, und das Tausend Wärmeeinheiten kostet $\frac{1}{3,8} = 0,26$ Pfennig oder circa $\frac{1}{4}$ Pfennig (reichlich).

7. **Beispiel.** In welcher Grösse ergeben sich vorgenannte Zahlen im ganz oder dürrtrocknen Zustande des weichen Scheitholzes, da dasselbe erfahrungsmässig beim Uebergange aus dem lufttrocknen in den ganz ausgetrockneten Zustand um 4 Procent schwindet, die waldmässige Klafter also dann nur noch 75 Kubikfuss (dürrtrockne) Holzmasse enthält?

Der Kubikfuss solchen Holzes kostet demnach $\frac{5 \text{ Thlr.}}{75}$ = 20 Pfennig und wiegt, laut n-Tabelle und rech-

ter Oberecke des Knechtes $45,4 \times 0,44 = 20$ Pfund; es kostet demnach 1 Pfund $= \frac{20}{20} = 1$ Pfennig. Und dieses 1 Pfund = 1 Pfennig erzeugt laut Brenntabelle des Knechts 3600 Wärmeeinheiten, so dass mithin das Tausend derselben kostet: beinahe 0,28 Pfennig; also in dem Verhältnisse wie 26 zu 28 oder 13 zu 14 mehr als beim lufttrocknen Holze. Darnach ist es in Bezug auf den Finanzpunkt also nicht rathsam, die Austrocknung des Brennholzes bis zum wasserfreien Zustande zu treiben. Denn das, was das Pfund dürrtrocknes Holz im Verhältniss zum lufttrocknen mehr wirkt (wie 28 zu 36 oder 100 zu 128, oder 28 Proc.), ist etwas weniger als das, was es bei unserer Art des Holzeinkaufs mehr kostet (wie 0,73 zu 1 oder 100 : 137, d. i. 37 Proc. Mehrkosten).

8. Beispiel. Bei gleichen Gewichtsmassen verhält sich laut Brenntabelle der Werth des lufttrocknen zu dem des dürrtrocknen Holzes wie 28 : 36 oder 100 : 128. Der Knecht soll aber angeben, wie sich dieser Werth bei gleichen Raummengen, also z. B. der Werth von 1 Kubikfuss oder einer vollen Klafter lufttrocknen zu dem von einem Kubikfuss oder einer vollen Klafter dürrtrocknen Holzes verhält?

Man hat hier den Brennwerth von je 1 Kubikfuss zu ermitteln; und da dieser (im trocknen Zustande) lediglich vom Gewichte des Kubikfusses, d. h. von der Dichtigkeit der Holzart (§. 335) abhängt, so ist obige Frage nur in Bezug auf eine bestimmte Holzart bestimmt zu beantworten. Sie soll daher hier einmal a) in Bezug auf Kiefer und dann b) in Bezug auf Eiche erledigt werden.

Laut specif. Gewichts-, laut *n*- und Brenntabelle des Knechtes hat man:

Ad a. Ein (preuss.) Kubikfuss dürrtrocknen Kiefernholzes wiegt $0,45 \times 66 = 30$ Pfund, lufttrocknen $= (0,45 + 0,14)\ 66 = 0,59 \times 66 = 38\frac{1}{2}$ Pfund.

Jenes erzeugt pro Pfund 36 Pfund Siedwasser, also pro Kubikfuss $30 \times 36 = 1080$ Pfund; dieses pro Pfund 28 Pfund Siedwasser, also $38{,}5 \times 28 = 1078$ Pfund pro Kubikfuss. Das Verhältniss ihres Brenn- und Geldwerthes also wie 1080 : 1078, oder fast wie 100 : 100. Oder: die volle Klafter lufttrocknes Kiefernholz hat dieselbe Heizkraft als die volle Klafter dürrtrocknes, obgleich jene weniger Holzsubstanz enthält. Es wird dies nur dadurch erklärlich, dass das dem lufttrockenen Holze noch innewohnende (20 Proc.) Wasser beim Verbrennen sich nicht in Dampf verwandelt, sondern, chemisch zerlegt, ebenfalls mit verbrennt.

Ad b. Ein preussisch. Kubikfuss Eiche wiegt dürrtrocken $0{,}62 \times 66$ Pfund; lufttrocken $= (0{,}62 + 0{,}14)\ 66$ Pfund und erzeugt Siedwasser, im ersteren Falle $0{,}62 \times 66 \times 36$ Pfund, im anderen $0{,}76 \times 66 \times 28$ Pfund, und es verhält sich letzterer Werth zu ersterem wie $0{,}76 \times 28 : 0{,}62 \times 36 = 266 : 279 = 100 : 105$.

Beim Eichenholze stellt sich also ein Mehrwerth von 5 Procent zu Gunsten der ganz ausgetrockneten Klafter.

Zusatz. Gegenüber demjenigen Brennholze, das, wie nur zu oft, schon bloss im antrocknen Zustande (mit 30 — 40 Proc. Wasser) zur Feuerung gelangt, muss sich natürlich das Verhältniss ungleich günstiger zum Vortheil des trocknen gestalten.

9. Beispiel. Um wieviel Procent ist die volle (80 Kubikfuss Masse enthaltende) Klafter lufttrocknes Birkenholz mehr werth als eine dergleichen fichtene?

Specif. Gewicht des lufttrocknen Fichtenholzes laut Knecht $= 41 + 13 = 54$ Hundertel.

Specif. Gewicht des lufttrocknen Birkenholzes laut Knecht $= 51 + 12 = 63$ Hundertel.

Also verhalten sich die Gewichte beider Klaftern wie 54 : 63 oder wie 100 : $116\frac{1}{2}$. Nach Früherem ver-

halten sich aber die Brennwerthe ebenso; also ist die Birke 16½ Procent besser als die Fichte.

Zusatz. Hätte man, um kürzer zu verfahren, gleich die Verhältnisszahlen des dürren Zustandes genommen, so hätte man erhalten: 41 : 51 = 100 : 124 oder 24 Procent, d. h. eine gänzlich ausgetrocknete Klafter Birke hat 24 Procent mehr Heizkraft als ein gleiches Volumen Fichte. Die Differenz von 7½ Procent erklärt sich theilweise dadurch, dass (s. S. 464) die Birke vom luft- zum dürrtrocknen Zustande noch um 6 Procent schwindet (12 — 6), wenn das weiche Holz nur 3 Procent (7% — 4%) zusammengeht, zu einem Kubikfuss chemisch-trocknen Birkenholzes also mehr lufttrocknes Holz gehören als zu 1 Kubikfuss chemisch-trockenen Fichtenholzes.

Neunundzwanzigstes Kapitel.
Von den Bewegungskräften.

a. Geschwindigkeit.

§. 360. Die Länge des Raumes, den eine Sache oder eine Kraft in einer Sekunde zurücklegt, wird deren Geschwindigkeit genannt.

Der äussere Rand der Rückseite des Knechts enthält die Mittelwerthe der interessanteren Geschwindigkeiten nach Metern.

Es bedarf diese Tabelle kaum einer Erläuterung. Wir sehen aus ihr z. B.: Ein Pferd hat in der Carriere mindestens 10 Meter (kleine Carriere) und höchstens 25 Meter (seltene Rennpferde) Geschwindigkeit. Ein gemüthlicher Fussgänger legt pro Sekunde 1 Meter; ein scharfschreitender bis 1,8 Meter Weg zurück. Beim ordinären Personenzuge hat die Locomotive 15 Meter; bei ausserordentlichen Schnellzügen bis 27 Meter Geschwindigkeit. Im ersteren Falle durchschneidet sie also die Luft mit der Geschwindigkeit eines heftigen Windes, im letzteren mit

der eines schon bedeutenden Sturmes (siehe Rand: Sturm = 16; heftigster Orkan = 40).

§. 361. Ausserdem giebt die kleine Krafttabelle im Mittelfelde der Vorderseite in der Rubrik *G* noch die (vortheilhafteste mittlere) Arbeitsgeschwindigkeit der Thierkräfte an, mit welcher sie am liebsten und am förderlichsten bei mittlerer Arbeitszeit (täglich 8 Stunden) arbeiten. Das Pferd z. B. vor dem Lastwagen mit $1\frac{1}{4}$ Meter, am Schwengel des Göpels aber nur mit 0,9 Meter; der Mensch, ohne Maschine (d. h. vor dem Wagen, hinter dem Karren, oder als Träger), geht bei täglich 8 Arbeitsstunden mit 0,8 Meter; am Göpelschwengel nur mit 0,6 Meter; und den Kurbelgriff bewegt er nur mit $\frac{3}{4}$ Meter durchschnittlicher Geschwindigkeit.

§. 362. Endlich ist am Boden desselben Mittelfeldes die Geschwindigkeit angegeben, mit welcher die Schwerkraft die Geschwindigkeit eines frei fallenden, keinem Luftwiderstande ausgesetzten Körpers in jeder Sekunde beschleunigt. Darnach ertheilt dieselbe einem mit Null Anfangsgeschwinidgkeit fallenden Körper nach Ablauf einer Sekunde eine Geschwindigkeit von 9,81 Meter; also am Ende der zweiten Sekunde eine von 9,81 + 9,81 = 19,62 Meter; am Ende der dritten Sekunde von $9{,}81 \times 3 = 29{,}43$ Meter; und nach t Sekunden freien Falles die Endgeschwindigkeit $v = 9{,}81 \times t = gt$ (1); und wenn von vornherein c Fuss Anfangsgeschwindigkeit da war .... $v = c + gt$ (2); (immer ohne Luftwiderstand)*).

Die halbe Beschleunigung $= \frac{g}{2} = 4{,}9$ Meter giebt den Fallraum der ersten Sekunde. Der Fallraum h der t ersten Sekunden ist $t \times t$ so gross, als der der ersten; oder $h = t^2 \frac{g}{2}$ (3); und bei c Anfangsgeschwindigkeit $h = \frac{t^2 g}{2} + ct$ (4). Auch folgt aus (1) mit (3) noch;

*) v von velocitas; c von celeritas; t von tempus.

$v = \sqrt{2gh}$ (5) und $h = \frac{v^2}{2g}$ (6), welch letztere Formel die häufig in Anwendung kommende Geschwindigkeitshöhe, d. h. die Höhe giebt, von der ein Körper frei fallen muss, um eine gegebene Endgeschwindigkeit v zu erlangen.

§. 363. Beispiele.

1. Beispiel. Wieviel Zeit braucht der rasche Fussgänger zu einer geographischen Meile?

Nach der *e*-Tabelle ist eine geographische Meile = 7420 Meter; nach dem oberen Rande der Rückseite die Geschwindigkeit des Fussgängers 1,8 Meter pro Sekunde; also Zeit $= \frac{7420}{1,8}$ Sekunden = 4122 Sekunden = 68½ Minuten = 1 Stunde 8 Minuten.

2. Beispiel. Wieviel geographische Meilen legt der Dampfwagen bei gewöhnlicher Geschwindigkeit und ohne Aufenthalt in einer Stunde zurück?

In einer Sekunde (laut Oberrand der Rückseite) 15 Meter; in einer Stunde = 60 . 60 . 15 = 54000 Meter $= \frac{54000}{7420} = 7$ Meilen reichlich.

3. Beispiel. Im Maximo des Schnellzuges (27 Meter gegen 15) legt die Locomotive fast das Doppelte, nämlich stündlich $x = \frac{27}{15}\, 7 = 12\frac{1}{2}$ Meile zurück.

4. Beispiel. Wie weit kommt das Pferd vor einem Lastwagen per Stunde oder 3600 Sekunden?

1¼ Meter × 3600 = 4500 Meter.

5. Beispiel. Der Ochse dagegen?

0,8 × 3600 = 2880 Meter.

6. Beispiel. Wie lange Zeit braucht man bei der mittleren Geschwindigkeit der Flüsse (1 Meter) zur Zurücklegung von einer geographischen Meile ohne Rudern?

Eine geographische Meile laut *e*-Tabelle = 7420 Me-

ter; also pro Meter 1 Sekunde macht 7420 Sekunden $= \frac{7420}{3600}$ Stunden = 2 Stunden reichlich.

7. Beispiel. Von welcher Höhe müsste eine Kugel fallen, um die (Anfangs-) Geschwindigkeit der Büchsenkugel = 500 Meter zu erlangen, wenn kein Luftwiderstand da wäre?

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{500 \,.\, 500}{2 \,.\, 9{,}81 \text{ Meter}} = \frac{250000}{19{,}62} \text{ Meter}$$
$$= 12742 \text{ Meter.}$$

b. Kraft.

§. 364. Der **Druck**, den eine mechanische oder bewegende Kraft auf das ihr entgegenstehende Hinderniss ausübt, in Gewicht (Pfund, Kilogramm) ausgedrückt, heisst ihre **Grösse**. Z. B.: Im vortheilhaftesten Arbeitsschritte zieht am Lastwagen ein mittelstarkes Pferd so, dass der Schlossnagel im Mittel einen Druck von 60 Kilogrammen auszuhalten hat; die mittlere Grösse einer Pferdekraft im Schritte ist sonach 60 Kilogramme. (Siehe das linke Mittelfeld.)

Die Grösse einer und derselben thierischen Arbeitskraft ist übrigens verschieden; und sie verringert sich in dem Maasse, als die Art der Bewegung und die Geschwindigkeit derselben dem Individuum weniger zusagt.

§. 365. Die Spalte *K* der Krafttabelle des unteren linken Mittelfeldes **giebt die Grösse thierischer Kräfte in Kilogrammen für die vortheilhafteste Arbeitsgeschwindigkeit und eine tägliche Arbeitszeit von 8 Stunden.**

Unter dieser Voraussetzung (so lesen wir aus dieser Tabelle) arbeitet z. B. ein Mensch ohne Maschine, z. B. im einfachen Zuge, durchschnittlich mit einer Kraft von 15 Kilogrammen; an den Hebelarmen eines Göpels aber, wo er weniger Muskelpartien in Anwendung bringen kann, nur mit 13; und am Haspel oder überhaupt an der Kurbel, wo noch weniger Muskeln in Thätigkeit gelangen, nur mit 8½ Kilogramm Kraft.

Wenn es nur auf kurze Frist geschieht, kann der thie-

rischen Kraft ohne Schaden auch das Doppelte, auf sehr kurze Zeit selbst das Dreifache zugemuthet werden; einem Pferde z. B. beim Anzuge eines Pflugs eine Zugkraft von $60 \times 3 = 180$ Kilogrammen und beim Transport über nicht fortwährende Steigungen $60 \times 2 = 120$ Kilogramm.

§. 366. Die Kraft des Wassers ist durch dessen Dichtigkeit bedingt und also aus der *n*-Tabelle zu ersehen. Dieser nach wirkt jeder Kubikfuss Wasser (z. B. in den Zellen eines Wasserrades) mit einer Schwere von 56,3 Pfund in österreichischem, 66 Pfund in preussischem, 44,3 Pfund in baierischem Maasse etc., und ein Kubikmeter mit 1000 Kilogrammen (siehe *h*-Tabelle).

Was ausserdem jenen Druck betrifft, den das Wasser auf untergetauchte (ebene) Flächen ausübt, so ist derselbe immer gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die betreffende Ebene zur Basis und die senkrechte Höhe des Wasserspiegels über ihrem Schwerpunkte zur Höhe hat.

Das weitere Detail dieses Gesetzes wollen wir, statt durch Regeln, mittels eines einfachen Beispieles aufklären.

Fig. 349.

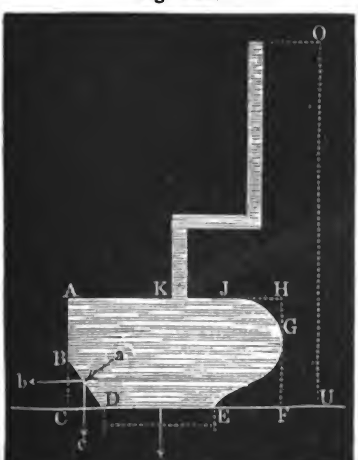
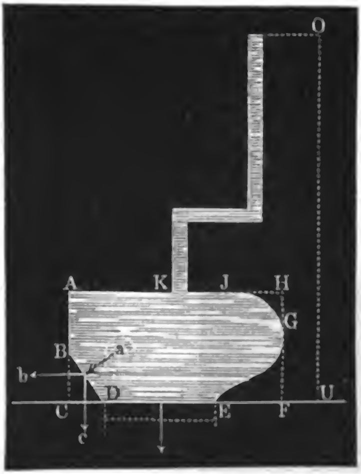


Fig. 349 stelle ein rings umschlossenes eisernes Bassin vor, das sammt der Einfallröhre ohne Wasser 3000 Pfund, mit Wasser gefüllt 8000 Pfd. wiegt; dabei sei der Spiegel *O* des Oberwassers 30 Fuss senkrecht über dem Boden *U*. Die Horizontalprojection (Kap. 12) *CF* dieses Bodens betrage 18 □Fuss, davon 3 auf das Stück *CD*, 10 auf *DE* und 5

auf EF kommen. Die Vertikalprojection AC (oder HF) betrage 12 □Fuss, davon auf AB 8 und auf BC 4 kommen, während die wirkliche Grösse der schiefen Fläche $BD = 5$ □Fuss und ihr Schwerpunkt $27\frac{1}{2}$ Fuss unter dem Oberwasserspiegel. Endlich sei das Stück AK des Deckels $= 6$ □Fuss und 25 Fuss unter dem Niveau von O. Dann hat man, alle Maasse als preussisch betrachtet:

1) Der Verticaldruck auf das Bodenstück DE ist = Gewicht der Wassersäule von 10 □Fuss Basis und 30 Fuss Höhe $= 10 \times 30$ Kubikfuss $\times 66$ Pfund $= 19800$ Pfund. Wäre DE der Kolben einer Presse, so würde dieser also, trotzdem dass die ganze Wassermasse nur 5000 Pfund wiegt, dennoch mit fast 20000 Pfund abwärts gedrückt.

Fig. 850.



2) Der Verticaldruck auf den ganzen Boden wiederum = Horizontalprojection $\times$ Druckhöhe $\times$ Wasserdichtigkeit $= 18 \times 30 \times 66$ Pfund $= 35640$ Pfd. (wovon indess das Gewicht der Wasserkeile BCD und EFG noch abzuziehen wäre.)

3) Der Druck rechtwinklig (oder in der Richtung a) auf BD, d. h. der Normaldruck auf die schiefe Fläche = Fläche $BD \times$ Druckhöhe ihres Schwerpunktes $\times$ 66 Pfund $= 5 \times 27\frac{1}{2} \times 66 = 9075$ Pfund. Davon entsteht als Folge eine

4) Pressung auf BD in der Richtung b, d. h. der Horizontaldruck auf die schiefe BD = Projection $BC \times$ Druckhöhe des Schwerpunktes von $BD \times 66$ Pfund $= 4 \times 37\frac{1}{2} \times 66 = 7260$ Pfund; sowie eine

5) Pressung auf BD in der Richtung c, d. h. der Vertical-

druck auf die schiefe BD = Projectiqn $CD \times$ Druckhöhe des Schwerpunktes der schiefen $BD \times 66$ Pfund $= 3 \times 27\frac{1}{2} \times 66 = 5445$ Pfund.

6) Der **Horizontaldruck** auf die krumme Fläche EG = Projection $GF \times$ Druckhöhe des Schwerpunktes dieser Projection $\times$ Wasserdichtigkeit.

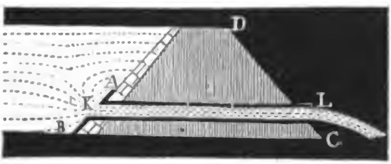
7) Der **Verticaldruck** auf die krumme Fläche EG = Projection $EF \times$ Druckhöhe über $EF \times$ Wasserdichtigkeit weniger das Wassergewicht des Keiles EGF.

8) Der (aufwärts gehende) Druck auf das Deckelstück AK = 6 □Fuss $\times$ 25 Fuss $\times$ 66 Pfund = 9900 Pfund.

9) Die Summe aller Drucke abwärts ist gerade um das Wassergewicht grösser als die Summe aller Drucke aufwärts, so dass trotz des Bodendruckes von fast 36000 Pfund (s. 2) der ganze Apparat auf die Wage doch nur mit 800 Pfund drückt.

§. 367. **Beispiel.** Fig. 351 zeige den Sammelteich eines Flossgrabens, dessen Schütze K 5 Fuss breit und 4′ hoch parallel mit der Dammböschung BA = 40° gegen den Horizont geneigt, und mit seiner Unterkante 36 Fuss unter dem Wasserspiegel liegt. Man soll angeben: 1) welchen Normaldruck das Schutzbrett auszuhalten hat oder mit welcher Kraft es gegen seine Führung gepresst und 2) mit welcher Pressung, namentlich Horizontalpressung, das Wasser den 100 Fuss langen Damm zur Seite zu schieben strebt; wenn Alles in sächsischen Maassen gegeben ist.

Fig. 351.



Ad 1. Der Schwerpunkt des rechteckigen Schutzbrettes ist mit dem Mittelpunkte desselben einerlei. Da nun die Unterkante von K 36 Fuss unter dem Niveau, folgt für die Tiefe des Mittelpunktes von K = 36 Fuss — 2 Fuss $\times$ *sin.* 40°, was nach der Sinusspalte des Knechtes $= 36 - 2 \times 0{,}64 = 34{,}72$ Fuss. Ferner ist die gedrückte Fläche $= 5 \times 4 = 20$ □Fuss; Wasserdichtigkeit laut n-Tabelle = 45,4 Pfund. Also

Normaldruck auf den Schützen = 20 × 34,72 × 45,4 Pfd. = 31526 Pfund. Nehmen wir den Reibungskoëfficienten = $^{7}/_{10}$ (siehe Reibungstäfelchen des Knechtes), so würde zum Aufziehen des Schützens eine direkte Kraft von 35526 × 0,7 = 24868 Pfund erforderlich sein.

Ad 2. Die gedrückte Fläche des Dammes hat die Länge von 100 Fuss, und (wenn wir nur von *K* an aufwärts gehen) als Breite die Dimension von *K* bis zur Dammkrone = 36 × *sec.* 50°, also nach der Secantenspalte des Knechtes 36 × 1,56 = 5616 Fuss. Die bis *K* untergetauchte Dammböschung also = 100 × 56,16 = 5616 □'. Ihr Schwerpunkt, als der eines Rechteckes zu betrachten, liegt in der Mitte der Breite, oder $\frac{36}{2}$ = 18' unter dem Wasserspiegel. Sonach Normaldruck auf die Dammseite N = 5616 × 18 × 45,4 Pfd. = 4589395 Pfd., also reichlich $4^{1}/_{2}$ Million Zollpfunde. —

Dagegen ist der Horizontalschub gleich dem sinuirten Normaldrucke *N. sin.* 40° = 4589385 × 0,64 = 2937000 Pfund, also fast 3 Millionen.

Oder auch, weil 36 Fuss die Breite der Vertikalprojection der letzteren Fläche, also = 100 . 36 = 3600 □' und 18 Fuss die Tiefe ihres Schwerpunktes, findet sich gleich von Haus aus der Horizontaldruck 3600 × 18 × 45,4 Pfund = 2941920 Pfund. (Die kleine Fehlerhaftigkeit des ersten Resultates kommt daher, dass die trigonometrischen Grössen nur mit 2 Decimalen in Anwendung gebracht wurden.)

§. 368. Die Kraft der Luft wirkt theils als Atmosphärendruck, theils als Windstoss oder Winddruck. Im ersteren Falle übt sie nach allen Seiten eine Pressung aus, die (siehe die unterste Zeile des linken Mittelfeldes) gleich dem Gewichte einer 0,76 Meter = 760 Millimeter (= 28 pariser Zoll) hohen Quecksilbersäule ist. Die Grösse des Atmosphärendruckes pro □Meter berechnet daraus der Messknecht wie folgt: Volumen dieser Quecksilbersäule = 1 □Meter × 0,76 = 0,76 Kubikmeter; Dichtigkeit des Quecksilbers pro Kubikmeter

= 1000 Kilogramme × 13,6 = 13600 Kilogrammen; Gewicht der Säule = 13600 × 0,76 = 10336 Kilogramm pro □Meter, also 1,0336 Kilogramm pro □Centimeter und 0,010336 Kilogramm pro □Millimeter (reichlich 1 Kilogramm pro □Centimeter). Die Pressung der Atmosphäre pro landüblichen Quadratzoll in Kilogrammen leitet der Knecht nun leicht durch die *o*-Tabelle ab mit Hülfe des letzteren Werthes von 0,01 oder genauer 0,01034 Kilogramm pro □Millimeter.

Z. B. pro sächsischen □Zoll muss der Atmosphärendruck betragen 0,01034 Kilogramm × 557 = 5,76 Kilogramm = 11,5 Zollpfund.

Pro pariser □Zoll? Circa = 0,01 × 732 = 7,32 Kilogramm, was nach der *h*-Tabelle = 7,32 × 2,04 pariser Pfund = 15 Pfund.

Pro preussische □Zoll? 0,01 × 684 = 6,84 Kilogramm = 68,4 × 2,14 preussische Pfund = 14²/₃ Pfd.; bei genauerer Rechnung 15,1 Pfund preussisch.

Beispiel. Mit wieviel Kilogramm Kraft verhindert die Luft allein das Heben eines Pumpenkolbens von 6 österreichischen Zollen Durchmesser, dafern unter demselben ein luftleerer Raum gebildet werden sollte?

Laut *K*-Spalte ist die Grösse der Kolbenfläche = 28,3□″, oder laut *o*-Tabelle = 28,3 × 694 □Millimeter; es drückt also die Atmosphäre auf die Luftseite des Kolbens mit 28,3 × 694 × 0,01 Kilogramm = 28,3 × 6,94 = 196½ Kilogramm.

§. 369. Beim Winde ist die Richtung des Druckes durchschnittlich horizontal. Dieses Druckes Grösse hängt ab von der Dichtigkeit der Luft und von der Geschwindigkeit, mit der sie getrieben wird. Als Mittelwerth*) hat man in runden Zahlen

*) Berechnet nach der Annäherungsformel $P = d \, . \, s \, . \, 2\,h$, wo h die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, d das Gewicht von 1 Kubikmeter Luft, s die getroffene Fläche nach □Metern.

Geschwindigkeit in Metern, womit der Wind den Widerstand trifft.	Technische Karakteristik dieses Windes.	Pressung nach Kilogrammen für jeden □Meter Gegenfläche.
2	Schwacher Wind	0,5
4	Mässiger Wind	2
6	Frische Brise (schwellt die Segel)	5
7	Bester für Mühlen	7
9	Gute Kühle (günstig zur See)	11
12	Sehr gute Kühle (wobei die hohen Segel einzuziehen)	20
15	Sehr starker Wind	30
20	Sturm	54
30	Heftiger Sturm	122
40	Grosser Ocean	220

1. Beispiel. Eine scharfe Brise von 7 Meter Geschwindigkeit trieb ein Schiffchen mit einer Geschwindigkeit von 2 Meter vorwärts, wobei das Segel, senkrecht gegen die Windrichtung gemessen, ein Rechteck von 3 Meter Breite und 6 Meter Höhe darstellte. Mit welcher Kraft schob der Wind dies Schiff?
Geschwindigkeit, mit der das Segel getroffen wird, $= 7 - 2 = 5$ Meter, dem nach obiger Tabelle ein Druck von $\frac{2 + 5}{2} = 3\frac{1}{2}$ Kilogramm entspricht. Projection der Segelfläche = 18 □Meter; also Gesammtdruck $3\frac{1}{2} \times 18 = 63$ Kilogramm.

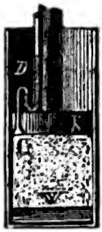
2. Beispiel. Die windschiefe Ebene vorschriftsmässig construirter Windmühlenflügel macht mit der Vertikalebene im Mittel einen Winkel von 15°, also mit der Windrichtung im Mittel einen Winkel von circa 75°,

welchen man den **Stosswinkel** nennt. Hat also ein Flügel 20 □Meter wirkliche Oberfläche, so hat er gegen die Windrichtung eine Normalfläche von nur 20 *cos.* 15°, was nach des Knechtes Cosinusspalte nahe 20 × 0,967 = 19,34 □Meter; und wenn der Wind mit bester Geschwindigkeit auf die ausweichenden Flügel trifft (also mit relativ 7 □Meter), hat jeder Flügel eine Normalpressung von $N = 19,3 \times 7$ Kilogramm = 135 Kilogramm (als im Schwerpunkte jedes Flügels normal auf die Drehungsebene wirkend zu denken. Von dieser Normalkraft geht nur ein kleiner Theil *N. cos.* 75° [also, weil *cos.* 75° laut Cosinusspalte = 26 Hundertel] = 135 × 0,26 = 35 Kilogramm oder 26 Proc. des Normaldruckes als Umdrehungskraft der Bewegung zu gut.)

§. 370. Die **mechanische Kraft des Dampfes** entsteht durch dessen **Expansivkraft**, d. h. durch die Macht, mit welcher der in der Regel stark erhitzte Dampf sich auszudehnen (zu expandiren) strebt. Wenn z. B. der Dampf im Kessel bis auf eine Temperatur von 135° gebracht wird, so drückt er auf die Wandung des Kessels oder auf die Fläche des im Dampfcylinder beweglichen Kolbens *K* mit der Expansivkraft oder Spannung von 3 Atmosphären, oder nach S. 502 auf den □Meter mit 3 × 10336 Kilogramm, oder auf den preussischen □Zoll mit 3 × 15 = 45 preussischen Pfunden. Correspondirt nun die entgegengesetzte Kolbenfläche mit der Aussenluft, wie bei Dampfmaschinen ohne Condensation, bei denen der verbrauchte Dampf sofort in die Atmosphäre tritt, so hat der Arbeitsdampf immer eine Atmosphäre Gegendruck, der 135 Grad heisse oder 3 atmosphärige Dampf wirkt also nur mit einem **Ueberdrucke** von 3 — 1 = 2 Atmosphären. Wird aber der verbrauchte Dampf durch eingespritztes kaltes Wasser verdichtet (condensirt) so hat der auf die Gegenseite des Kolbens wir-

Fig. 352.

A



B

kende Dampf etwa nur 0,1 bis 0,2 Atmosphärendruck vom Condensationsraume gegen sich, wirkt also mit 2,9 und 2,8 Atmosphären.

Das folgende Tabellchen giebt für die voranstehende Temperatur nach Centigraden in der zweiten Skala die Expansiv- oder Druckkraft des Dampfes in Atmosphären (à 10336 Kilogramm pro □Meter, oder 0,010336 Kilogramm pro □Millimeter oder 15 Zollpfunde pro preussischen □Zoll) in der dritten die Dampfkubikfusse die, für die voranstehende Hitze und Spannkraft, aus einem Kubikfusse Wasser entstehen, und die vierte das diesem Volumverhältnisse entsprechende specifische Gewicht solchen Dampfes. Hierbei ist vorausgesetzt, dass immer hinlängliches Wasser zur Dampferzeugung vorhanden, der Dampf nicht überhitzt, sondern gesättigt ist, in welchem Zustande seine Dichtigkeit und Spannung im Maximum und stets grösser ist als (bei gleicher Temperatur) die des nicht gesättigten (überhitzten) Dampfes.

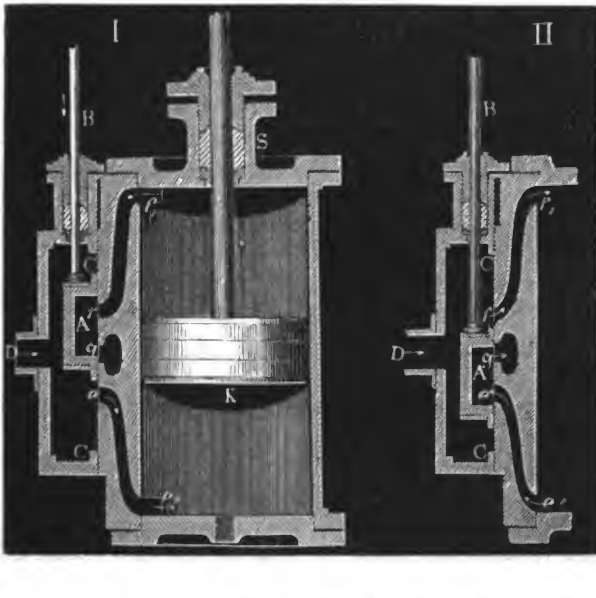
Temperatur.	Spannkraft in Atmosphären.	Dampfkubikfuss aus 1 Kubikfuss Wasser.	Specifisches Gewicht Wasser = 1 Million.
0	0,006	182323	5
10	0,012	102670	10
20	0,023	58224	18
50	0,12	12546	84
100	1,0	1696	588
121	2	897	1130
135	3	619	1670
145	4	476	2170
153	5	388	2640
160	6	329	3130
165	7	286	3510
200	15	144	6940

§. 371. Beispiele.

1. Beispiel. Wenn bei 20 Grad Wärme die in der Luft als Nebel und Wolken schwimmenden Wassertheilchen sich in Dampf auflösen, und die dadurch vollkommen heiter gewordene Luft mit solchem Dampf ganz gesättigt wurde, so müsste sich ihre Spannung um 0,023 Atmosphären oder 0,023 × 28 Zoll Barometerhöhe = 0,6 Zoll erhöhen.

2. Beispiel. Mit welcher Kraft wird der 12 rheinländische Zoll Durchmesser haltende Kolben K einer Locomotive hin und her geschoben, wenn der Dampf 150 bis 160° Hitze hat?

Fig. 353.



Der Druck ist = 5 Atmosphären; also, da die Locomotiven ohne Condensation wirken, der effektive oder Ueberdruck = 4 Atmosphären = 60 Pfund pro

□Zoll. Des Kolbens Fläche aber ist nach der *K*-Spalte = 113 □Zoll; also Dampfdruck auf den Kolben = 113 × 60 = 6780 Pfund.

3. Beispiel. Bei Dampfmaschinen mit Condensation wird durch kaltes Einspritzwasser der aus dem Dampfcylinder in den Condensatorraum tretende verbrauchte Arbeitsdampf etwa bis zu 40 oder 50 Grad abgekühlt. Welche Expansionskraft bleibt sonach im Condensator und welchen Gegendruck übt derselbe auf den Kolben in preussischen Maassen?

Laut Tabelle der S. 506 entspricht dem gesättigten Wasserdampf von 40—50° eine Spannkraft von ungefähr 0,1 Atmosphäre, was nach S. 503 pro □Zoll einen Druck von $\frac{15}{10}$ = 1,5 Zollpfund bedingt.

§. 372. Dichtigkeit des Dampfes.

Laut Tabelle des §. 370 entspricht beim gesättigten Dampfe einer bestimmten Temperatur stets auch eine bestimmte Expansivkraft und Dichtigkeit, und umgekehrt. Stets z. B. hat der gesättigte Wasserdampf von 121° Temperatur die Expansivkraft von 2 Atmosphären (= 2 . 10336 Kilogramme pro □Meter = 2 . 15 Pfund pro □Zoll) und die Dichtigkeit von $\frac{1}{897}$ oder fast $\frac{1}{900}$ des Wassers (also Gew. = $\frac{1000}{900}$ Kilogr. = 1 ⅑ Kilogr. pro Kub.-Met.; oder = $\frac{66}{900}$ = $^7/_{10}$ preussische Pfund pro prs. Kubikfuss). Und umgekehrt: Wenn das Sicherheitsventil eines Kessels so belastet ist, dass es erst bei 2 Atmosphären Spannung des Dampfes sich öffnet, so muss die Hitze im Kessel auf 121° steigen und jeder Kubikfuss Wasser circa 900 Kubikfuss Dampf geben. Die Dichtigkeit des gesättigten Dampfes ist demnach um so grösser, je heisser er ist; bei 160° oder 6 Atmosphären z. B. circa $\frac{1}{300}$ von der des Wassers; bei der Rothglühhitze des Eisens würde sie dem Wasser gleich sein.

§. 373. **Brennstoffaufwand.**

Um 1 Pfund Wasser von 0° zum Kochen zu bringen, braucht man nach S. 484 100 Calorien, und um es in Dampf (von 1 Atmosphäre Spannung) zu verwandeln, noch weitere 540 Calorien (= latente Wärme des Dampfes); also um 1 Pfund Wasser von 0° in Dampf von 1 Atmosphäre zu verwandeln: 640 Wärmeeinheiten. Ein interessanter und genügend bestätigter Erfahrungssatz ist es aber, dass man mit derselben Wärmemenge dasselbe Wasserquantum in Dampf von 2 Atmosphären oder 121° Temperatur verwandeln kann, indem dieser fast doppelt so dichte Dampf (siehe Tabelle S. 506), eben weil er dichter ist, weniger als 540 Calorien in sich zu binden vermag, jener also beim Dichterwerden von den verschluckten Calorien gerade soviel hergiebt, als die dieser Dichtigkeit entsprechende Temperaturerhöhung verlangt. Da dasselbe für alle Temperaturen des Dampfes gilt, so erhält man den einfachen und wichtigen Satz:

Um 1 Pfund Wasser von 0° in Dampf, gleichviel von welcher Temperatur (oder Dichtigkeit oder Spannung), zu verwandeln, muss man demselben 640 Wärmeeinheiten einführen.

1. **Zusatz.** Bei t^0 Temperatur des Wassers nur $(640 - t)$ Calorien.
2. **Zusatz.** Nimmt man das Kilogramm, das Doppelte, statt des Pfundes, so wird auch die Wärmeeinheit von doppelter Grösse; die Zahlen des Gesetzes bleiben also dieselben.
3. **Zusatz.** Da von der durch's Heizmaterial **erzeugten** Wärmemenge in den **günstigsten** Fällen nur $\frac{2}{3}$ dem Wasser eingeführt werden können, so nimmt man zur Sicherheit bei desfallsigen Rechnungen von den auf der Vorderseite des Knechtes angegebenen Heizzahlen nur die Hälfte als effektive oder Nutz-Wirkung an.

1. **Beispiel.** Wieviel Pfund Dampf erzeugt 1 Pfund lufttrocknes Holz und 1 Pfund Steinkohle bei 10° Wassertemperatur?

1 Pfund Holz $\frac{28}{2}$ = 14 Pfund Siedwasser = 1400 Calorien = $\frac{1400}{640-10} = \frac{1400}{630}$ = 2,2 Pfund Dampf;

1 Pfund Steinkohlen = $\frac{75}{2}$ = 37½ Pfund Siedwasser = 3750 Calorien = $\frac{3750}{630}$ = 6 Pfund Dampf.

NB. In der That giebt auch erfahrungsmässig 1 Pfund Holz 2½ — 2¾ Pfund Dampf, 1 Pfund Steinkohle 5 — 7 Pfund, 1 Pfund Coaks 4½ — 5¾ Pfund; 1 Pfd. Holzkohle 6 Pfund Dampf.

2. Beispiel. Ein Dampfkessel soll jede Minute 400 Kubikfuss (preussisch) Dampf von 3 Atmosphären Spannung (oder 45 Pfund Druck pro □Zoll preussisch) erzeugen. Wie gross ist der stündliche Bedarf an Steinkohlen, wenn das Speisewasser 30° warm ist? Gewicht jener 400 Kubikfuss laut Tabelle S. 506 = $\frac{1}{619}$. 66 . 400 Pfund = 42½ Pfund. Diese 42½ Pfund brauchen Calorien 42½ (640 — 30) = 42½ . 610 = 25925 Calorien; also, da 1 Pfund Kohle 3700 Calorien erzeugen, pro Minute $\frac{25925}{3700}$ = 7 Pfund; pro Stunde 420 Pfund Kohle.

c. Arbeit oder Leistung.

§. 374. Die mechanische Arbeit, die eine bewegende Kraft innerhalb einer gewissen Zeit verrichtet oder verrichten kann, ist abhängig von der Grösse der Kraft und von dem Wege derselben und wird durch das Produkt beider gemessen. 100 Pfund 6 Fuss hoch gehoben (= 100 × 6 = 600 Fusspfund) oder 600 Pfund 1 Fuss hoch gehoben (= 600 × 1 Fusspfund), oder 300 Pfund 2 Fuss hoch gefördert (= 300 × 2 Fusspfund) ist immer dieselbe Leistungsgrösse von 600 Fusspfunden.

Ein Pferd mit 60 Kilogramm Zugkraft und 1¼ Meter Geschwindigkeit verrichtet per Sekunde eine Leistung

$L = 60 \cdot 1\frac{1}{4} = 75$ Kilogrammmeter. Die Arbeit einer Kraft per Sekunde ist also das Produkt aus Grösse der Kraft und Grösse der Geschwindigkeit; und es wird, obwohl nicht ganz richtig, die Grösse dieser Arbeit sehr gewöhnlich auch die Grösse der (betreffenden) Kraft genannt. Man sagt demgemäss z. B.: »die Grösse der Pferdekraft ist = 75 Kilogrammmeter,« anstatt des richtigeren: »die Leistung des Pferdes pro Sekunde ist 75 Kilogrammmeter.« — Ein Missverständniss kann indess durch diesen Sprachgebrauch nicht entstehen, weil in den beiden Sätzen:

a. die Grösse einer Pferdekraft ist (bei mittlerer Geschwindigkeit und laut Krafttabelle des Knechtes) = 60 Kilogramm, und

b. die Grösse einer Pferdekraft ist = 75 Kilogrammmeter,

durch die beigefügten Maasswörter »Kilogramm und Meterkilogramm« schon angezeigt ist, dass dort eigentliche Kraft (Druck), hier Leistung (pro Sekunde) gemeint ist.

Zusatz. Die tägliche Arbeitsleistung ist soviel mal so gross, als die sekundliche, als der Tag Arbeitssekunden hat. Da nun Thiere und Menschen bei mittlerer Kraft und Geschwindigkeit täglich 8 (höchstens 10) Stunden arbeiten können und sollen, so hat der Arbeitstag der animalischen Motoren $60 \cdot 60 \cdot 8 = 28800$ Sekunden, wofür man auch 30000 Sekunden nehmen kann, was einer Arbeitszeit von $8\frac{1}{3}$ Stunde entspricht.

Sonach ist bei vortheilhaftester und voller Ausbeutung aller Arbeitskraft die

tägliche Leistung eines Pferdes = $75 \times 30000 = 2\frac{1}{4}$ Million Kilogrammmeter,

» » » Ochsen = $47 \times 30000 = 1,4$ Million Kilogrammmeter,

» » » Mensch. = 12×30000 = reichlich $\frac{1}{3}$ Million Kilogrammmeter.

§. 375. Reduction der Meterkilogramme auf Fusspfunde u. s. w.

Um die durch die Maasse irgend eines Landes ausgedrückte Leistung einer Kraft leicht auf ein anderes land-

übliches Maasssystem zu reduciren, hat sich der Messknecht mit der p-Tabelle der Vorderseite versehen, welche aus einer Gleichungszeile besteht. Ihre Zahlen sind die Produkte aus den Gleichungszeilen der a- und h-Tabelle; denn indem 1 Meter = 3,16 österr. Fuss (a-Tabelle),

1 Kilogr. = 1,79 österr. Pfund (h-Tabelle)

folgt 1 Kilgrmmet. = 3,16 × 1,79 Fusspfd. = 5,7 Fusspfd.

Wir lesen demgemäss aus der p-Tabelle:

a. 1 Kilogrammmeter, verwandelt in österreichische Fusspfunde, giebt 5,7 Fusspfund, also n Kilogrammmeter $= n . 5,7$ Fusspfd österr.; oder: Um Kilogrammmeter in Fusspfunde eines Landes zu verwandeln, multiplicire sie mit dem betreffenden Reductionsfaktor der p-Tabelle.

b. 5,7 österreichische Fusspfund = 1 Kilogrammmeter;

1 österreichisches Fusspfund $= \frac{1}{5,7}$ Kilogrammmeter;

n österreichische Fusspfund $= \frac{n}{5,7}$ Kilogrammmeter,

oder: Um Fusspfunde eines Landes in Kilogrammmeter zu verwandeln, dividire sie durch den betreffenden Reductionsfaktor der p-Tabelle; oder multiplicire sie mit dessen Reciproke (2. Kapitel).

c. 5,7 österreichische Fusspfund = 6,8 preussische Fusspfund (weil = 1 Kilogrammmeter); also

1 österreichisches Fusspfund $= \frac{6,8}{5,7}$ preuss. Fusspfund;

n » » » Fusspfunde $= \frac{n \;.\; 6,8}{5,7}$, d. h.: Um Fusspfunde eines Landes in die eines anderen zu verwandeln, multiplicire mit dem Reductionsfaktor des gesuchten und dividire mit dem des gegebenen Landes.

1. Beispiel. Es ist beim Maschinenbaue allgemein jetzt eingeführt, bei der Berechnung der Leistungsgrösse einer Kraftmaschine die Pferdekraft = 75 Kilogrammmeter zu setzen. Was macht dies in preussischem Maasse?

Preussischer Faktor = 6,8; also 75 × 6,8 = 510 Fusspfund.

Zusatz. Auf solche Weise berechnet sich schnell folgendes Tabellchen für die

Grösse einer Pferdekraft von 75 Kilogrammmeter in Fusspfunden.

Oesterreich.	Preussen.	Baiern.	Sachsen.	Hannover.	Würtemberg.	Baden.	Darmstadt.	England.	Paris.
424	510	460	530*) Zoll-pfd.	550	560	500	600	548	472

2. **Beispiel.** Eine Leistung von 1000 Fusspfund preussisches Maass in Meterkilogramm auszudrücken?

$L = \frac{1000}{6,8}$ Fusspfund, oder, da die linke Unterecke die Reciprokenziffer von $68 = 147$ angiebt: $L = 0,147 \times 1000 = 147$ Kilogrammmeter.

3. **Beispiel.** 1000 preussische Fusspfunde in sächsische zu verwandeln?

$L = \frac{1000 \times \text{sächsisch. Faktor}}{\text{preussischer Faktor}} = 7100 : 6,8 = 1044$ sächsische Fusspfund.

§. 376. **Leistung in vertikalem und horizontalem Sinne.**

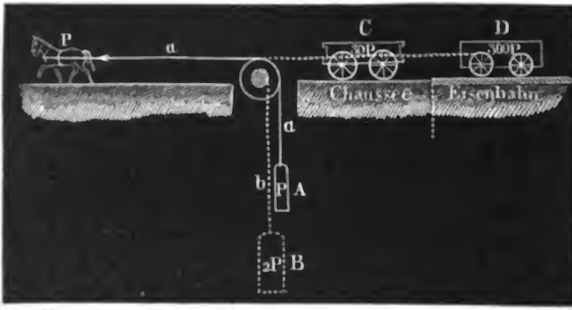
Setzen wir die sekundliche Arbeit des Pferdes beim gewöhnlichen Zuge in runder Zahl = 500 Fusspfund, so ist beim raschen Schritte von 5 Fuss Geschwindigkeit seine Zugkraft P = 100 Pfund, und es fördert dabei (s. Fig. 354 a. f. S.):

a. Wenn das Zugseil *a* über eine Rolle in die Tiefe geht

*) Bei Annahme der alten Handelspfunde ergeben sich für Sachsen 550 Fusspfund.

und die Reibung unberücksichtigt bleibt, einen Kübel von 100 Pfund Gewicht in jeder Sekunde 5 Fuss hoch.

Fig. 354.



b. Wenn das Lastseil b an einer halb so starken Rolle oder Welle sich aufrollt, als an welcher das Kraftseil a wirkt: $2\,P = 200$ Pfund Gewicht aber in jeder Sekunde nur $\frac{2}{5} = 2\frac{1}{2}$ Fuss hoch.

c. Wenn ein Wagen C auf guter horizontaler Chaussee am Seile hängt: das 30fache von A, nämlich 30×100 Pfd. 5 Fuss weit $= 30 \times 500$ Fusspfund horizontal.*)

d. Wenn der Wagen auf horizontaler Eisenbahn geht, das 300fache, nämlich 300×100 Pfund 5 Fuss weit $= 300 \times 500$ Fusspfund.*)

Die Arbeit sub a. und b. ist sich gleich und entspricht mit 500 Fusspfund per Sekunde der mittleren Leistungsfähigkeit des Pferdes. Die Arbeit sub c. ist dagegen scheinbar 30mal, die sub d gar 300mal so gross; weil beim Lastzuge auf horizontalem Wege die Kraft kein Heben der Last, sondern nur die Ueberwindung des Reibungswiderstandes zu bewirken hat. Da nun letzterer auf guter Schotterstrasse $\frac{1}{30}$ der Last beträgt, so kann letztere auch 30mal so gross als die Zugkraft 100, also $30 \times 100 = 3000$ Pfd. sein. Die eigentliche (subjective) Arbeit des Pferdes war dabei immer doch nur $=$ Reibungswiderstand $\times$ 5 Fuss

*) Siehe Kapitel: Reibungstechnik.

$= \frac{1}{30}$ Last $\times$ 5 Fuss $= \frac{1}{30}$. 3000 Pfund $\times$ 5 Fuss $=$ 500 Fusspfund.

Das Kilogrammmeter oder das Fusspfund muss sich also immer auf vertikale oder eine dieser Wirkung identische Leistung beziehen, wenn es ein directes Maass für die Arbeitsgrösse einer Kraft sein soll. Und es ist das Produkt aus Last und horizontalem Weg wohl davon zu unterscheiden; eben so das aus Last und geneigtem Weg, wobei nur eine theilweise Vertikalleistung vorkommt.

Beim Tragen einer Last auf dem Rücken eines Pferdes oder Menschen findet aber selbst auf horizontalem Wege bei jedem Schritte ein Heben der Last statt; auch ist selbst beim Stillstande eine Muskelanstrengung entgegen dem Lastdrucke nöthig, so dass selbst dadurch eine animalische Arbeitskraft vollständig erschöpft werden kann, ohne die geringste objektive (nutzbare) mechanische Arbeit geleistet zu haben.

§. 377. Die Leistungsgrösse der thierischen Kräfte (der animalischen Motoren) in ihrem durchschnittlichen Werthe bei der vortheilhaftesten Geschwindigkeit und bei der mittleren Arbeitszeit von täglich 8 Stunden, giebt der Messknecht im linken Mittelfelde der Vorderseite unter der Rubrik *L* in Kilogrammmetern an.

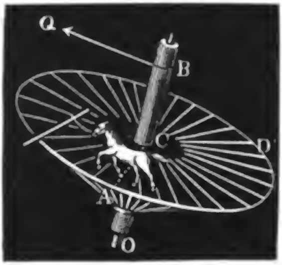
Wir ersehen aus diesem Tabellchen, dass

a. das Pferd bei der ungehindertsten Kraftausübung, z. B. bei seinem Zuge, eine mechanische Arbeit von 75 Kilogrammmetern (510 preussische Fusspfund; siehe 1. Buch §. 10) per Sekunde verrichtet; dass diese Leistung aber beim Maschinenbetriebe durch Thierpferde, wie an der Tretscheibe, Fig. 355 a. f. S., bedeutend geringer, am Göpelwerke z. B. nur 43 Kilogrammmeter gross ist. Wenn also die Mechaniker, wie geschieht, bei Berechnung der Maschinenleistung die Pferdekraft mit 75, also so wie beim freien Zuge, annehmen: so folgt:

Das Maschinenpferd ist nicht nur bedeutend,

circa um die Hälfte, stärker als das Thierpferd, sondern arbeitet auch, weil ununterbrochen, dreimal so lange. Um ein Maschinenpferd zu ersetzen, brauchte man circa 4 Thierpferde.

Fig. 355.



b. Die freie mechanische Ochsenkraft, die Arbeit des Ochsen ohne Maschine, ist im Verhältnisse von 75 : 47 oder 100 : 61 oder 39 Proc. geringer als die des Pferdes; während des Ochsen Leistung am Göpel (42) der des Pferdes (43) fast gleich ist.

c. Die Menschenkraft = 12 Kilogrammmeter; die des Pferdes also reichlich 6mal so gross, ein Verhältniss, das beim Maschinenbetriebe, z. B. beim Göpel, sich etwas mehr zu Gunsten der Menschenkraft (fast = $\frac{1}{5}$ Pferd, da 8 fast $\frac{1}{5}$ von 43) herausstellt.

d. Die Kraft eines Esels (29 und 12) ist im Mittel das Doppelte der Menschenkraft (12 und $6\frac{1}{2}$).

e. Pferd, Esel und Mensch geben beim Maschinenbetriebe (43; 12; 8) bedeutend weniger Leistung als bei freier mechanischer Arbeit (75; 29; 12), wie z. B. beim Tragen, Ziehen etc.; wogegen des Ochsen Arbeit bei ersterer Verwendung (42) wenig von ihrer natürlichen Grösse (47) verliert.

f. Die mittlere Kraft eines animalischen Motors ist = $\frac{1}{5}$ seines Körpergewichtes.

§. 378. Leistung der Thierkräfte (Fortsetzung). Die Zahlen der Krafttabelle beziehen sich (s. S. 514) nur auf wirkliche oder Vertikalleistung, und haben Gültigkeit bei einer täglichen mittleren Arbeitszeit von 8 Stunden, einer mittleren Geschwindigkeit G und mittleren Kraft K.

Soll aber eine andere tägliche Arbeitszeit z, und eine andere Geschwindigkeit g in Anwendung kommen, so hat

man als mit der Erfahrung ziemlich übereinstimmend für die dann zu fördernde Kraft k die Gleichung:

$k = \left(2 - \frac{g}{G}\right)\left(2 - \frac{z}{Z}\right)K$; welche für gewöhnliche Arbeitszeit $z = Z = 8$ übergeht in $k = \left(2 - \frac{g}{G}\right) K$.

Beispiel. Welche Zugkraft kann man am Schwengel eines Göpels einem Pferde zumuthen, wenn es mit 1,2 Meter Geschwindigkeit täglich 6 Stunden arbeiten soll?

Gegeben laut Messknecht: $K = 48$; $G = 0{,}5$; $Z = 8$;
" laut Aufgabe: $g = 1{,}2$; $z = 6$, also

$k = \left(2 - \frac{1{,}2}{0{,}9}\right)\left(2 - \frac{6}{8}\right) 48 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot 48 =$ 40 Kilogramm.

§. 379. Leistung der Thierkräfte (Fortsetzung). Bei der Leistung der animalischen Motoren kommt das eigene Gewicht und die Art der Körperanstrengung sehr in Betracht; daher denn z. B. bei einer Geschwindigkeit, die das Doppelte der mittleren beträgt, keine Nutzkraft und also keine Nutzleistung, wenigstens nicht für die Dauer bei voller Arbeitszeit, mehr möglich ist. Darum giebt auch obige Formel für $g = 2\,G$:

$$k = \left(2 - \frac{2\,G}{G}\right) K = 0 \,.\, K = 0.$$

Für besondere Fälle und namentlich für die Horizontalleistung sind daher folgende Grössen noch von einigem Interesse:

a. Mensch. Eigenes Gewicht 70 Kilogramm; Geschwindigkeit bei 10 Stunden täglicher Arbeitszeit ohne Last auf horizontalem Wege 1,5 Meter;

Tragend bei horizontalem Wege auf dem Rücken 40 — 50 Kilogramm, bei 7 Stunden Arbeitszeit mit einer Geschwindigkeit von $\frac{3}{4}$ Meter;

Fahrend bei horizontalem Wege mit einem Schubkarren 60 — 70 Kilogramm hin, und leer zurück, bei

10 Arbeitsstunden, mit einer Geschwindigkeit von ½ Meter.

Desgleichen mit einem zweiräderigen Karren, der 100 bis 110 Kilogramm Ladung hat: dasselbe.

b. Pferd. Eigenes Gewicht 300 Kilogramm. Tragend im Schritte auf dem Rücken 125—130 Kilogramm, bei 10 Arbeitsstunden; mit 1,1 Meter Geschwindigkeit.

Tragend im Trabe 85 Kilogramm bei 7 Arbeitsstunden; mit 2,2 Meter Geschwindigkeit.

Ziehend im Schritte an einem Karren 7—800 Kilogramm bei 10 Arbeitsstunden mit 1,1 Meter Geschwindigkeit.

Desgleichen im Trabe 350—400 Kilogramm bei 4—5 Arbeitsstunden mit 2,2 Meter Geschwindigkeit.

Aus welchen Angaben die tägliche Leistung nach S. 511 leicht abzuleiten ist.

§. 380. Beispiele über §. 377—379.

1. Beispiel. Wieviel eigentliche Arbeit verrichtet ein Mensch, der eine Klafter gespaltenes lufttrocknes Birkenholz von der Hausthür bis ins dritte Stockwerk oder 40 Fuss hoch trägt; das Aufpacken ungerechnet? Auflösung in sächsischen Maassen.

Eine Klafter hat bekanntlich $6 . 6 . 3 = 108$ Kubikfuss Rauminhalt. Das Forsttäfelchen des rechten Mittelfeldes giebt an, dass davon 73 Proc. oder fast ¾ solide Masse sind: das giebt fast $108 . \frac{3}{4} = 80$ Kubikfuss Holzmasse; deren specif. Gewicht laut rechter Oberecke $51 + 12 = 63$ Hundertel; deren absolutes Gewicht also laut n-Tabelle $= 80 \times 0{,}63 \times 45{,}4 = 2288$ Zollpfund; 2288 Pfund Last 40 Fuss hoch gehoben giebt aber 91520 Fusspfund als effektive Leistung (Nutzeffekt).

Da nun die Leistung eines Menschen ohne Maschine per Sekunde laut Kraft- und p-Tabelle $= 12$ Kilogrammmeter $\times 7{,}1 = 85$ sächs. Fusspfund, so würde daraus für die eigentliche oder effektive Arbeitszeit $= \frac{91520}{85}$ Sekunden $= \frac{91520}{85 . 60}$ Minuten $= 18$ Minu-

ten folgen, wenn nicht bei jedem Gange (Tracht) die ganze Last des Menschen = 150 Pfund mit gehoben und die Zeit des Herunterganges mitgerechnet werden müsste. Rechnet man eine Tracht = 50 Pfund, so hat der Arbeiter beim Steigen also 50 Pfund Nutzlast und 150 Pfund oder 3mal so viel Nebenlast zu fördern. Und wenn die Nutzarbeit 18 Minuten erfordert, muss die Nebenarbeit $18 \times 3 = 54$ Minuten, die ganze also, ohne das leere Abwärtssteigen 1 Stunde 12 Minuten erfordern.

Zusatz. Sollte die Klafter mittels eines Haspels gefördert werden, so hätte man: da die Menschenkraft = 6,5 Kilogrammmeter $= 6\frac{1}{2} \times 7{,}1 = 46$ sächs. Fusspfd; und wenn $\frac{1}{3}$ der zu fördernden Last auf Reibungs- und Steifigkeitswiderstand gerechnet wird: $\frac{91520 \cdot 1\frac{1}{3}}{46}$ = 2653 Sekunden, oder nur = 45 Minuten (ohne die Zeit des Seilniederganges).

2. Beispiel. Um wieviel Procent ist die tägliche Leistung eines Arbeiters bei horizontaler Lastförderung mit dem zweiräderigen Karren grösser als bei Anwendung des Schubkarren?

Auflösung. Da nach §. 379 bei einerlei Arbeitszeit und Geschwindigkeit sich die Schubkarrenlast zur Schiebebockslast wie 60 : 100 oder wie 100 : 167 verhält, so folgt, dass die tägliche Leistung mit dem zweiräderigen Karren um 67 Proc. grösser ist als mit dem Schiebebock.

3. Beispiel. Wiviel eigentliche oder Nutzleistung liefert täglich ein Mann, der mit dem Schubkarren Erde auf horizontalem Wege von einem gewissen Platze nach einem anderen schafft?

Laut §. 379: Last 65 Kilogramm; Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$ Meter, Arbeitszeit 10 Stunden. Da indess der leere Rückgang sammt Einladung die Hälfte dieser Zeit in Anspruch nimmt, bleibt nur 5 Stunden für die tägliche Nutzleistung, die demnach als eine Horizontalleistung von (65 Kilogramm $\times \frac{1}{2}$ Meter $\times$ 60 .

60 . 5 Sekunden) Kilogrammmeter = 585000 Kilogrammmeter oder etwas über $^1/_2$ Million Kilogrammmeter erscheint.

4. **Beispiel.** Wenn die Unterhaltungskosten (Futter, Abnutzung, Zinsen der Ankaufssumme; Knecht) eines Geschirres von 2 Zugochsen auf täglich 15 Ngr., dagegen die eines von 2 Pferden 27 Ngr. zu stehen kommen, um wieviel Procente ist zur Verwendung am landwirthschaftlichen Göpelwerke die Ochsenkraft billiger als die der Pferde?

Laut Mittelfeldes der Vorderseite des Knechtes ist die sekundliche Leistung zweier Pferde am Göpel $= 2 \times 43 = 86$ Kilogrammmeter und kostet per Tag 27 Ngr., es kostet also eine solche Arbeitseinheit $\frac{27}{86}$ Ngr. $= 0{,}314$ Ngr. oder 3,14 Pfennig.

Bei den Ochsen dagegen: $\frac{15 \text{Ngr.}}{2 \times 42} = 0{,}179$ Ngr. $= 1{,}79$ Pfennig.

Das Kostenverhältniss bei gleicher mechanischer Arbeit täglich ist also wie 314 zu 179 oder wie 100 zu 57, d. h. beim Göpel ist — nach obigen Unterhaltungskosten — der Ochsenbetrieb 43 Procent billiger als der Betrieb durch Pferde.

5. **Beispiel.** Wie gross ist die tägliche Horizontal-Leistung eines im Trabe gegenüber der eines im Schritte ziehenden Wagenpferdes?

Nach §. 379 bei ersterem:

die Last — Geschw. — Zeit

375 Kilogramm; 2,2 Meter; $4^1/_2 \times 3600$ Sekunden,

bei letzterem:

die Last — Geschw. — Zeit

750 Kilogramm; 1,1 Meter; 10×3600 Sekunden.

Tägliche Horizontalleistung bei ersterem:

$375 \times 2{,}2 \times 16200$ Kgrammm. $= 13^1/_3$ Mill. Kgrmmm.,

bei letzterem:

$750 \times 1{,}1 \times 36000$ » $= 30$ Mill. Kgrammm.

Als blosses Verhältniss auch leicht so zu finden:
Erstere zu letzterer wie 375 $\times$ 2,2 $\times$ $4\frac{1}{2}$ $\times$ 3600 zu 2 . 375 $\times$ 1,1 $\times$ 10 $\times$ 3600, was durch Aufhebung sich sofort verwandelt in 1 $\times$ 2 $\times$ $4\frac{1}{2}$ zu 2 $\times$ 1 $\times$ 10 oder wie 9 zu 20 oder wie 1 zu $2\frac{2}{9}$.

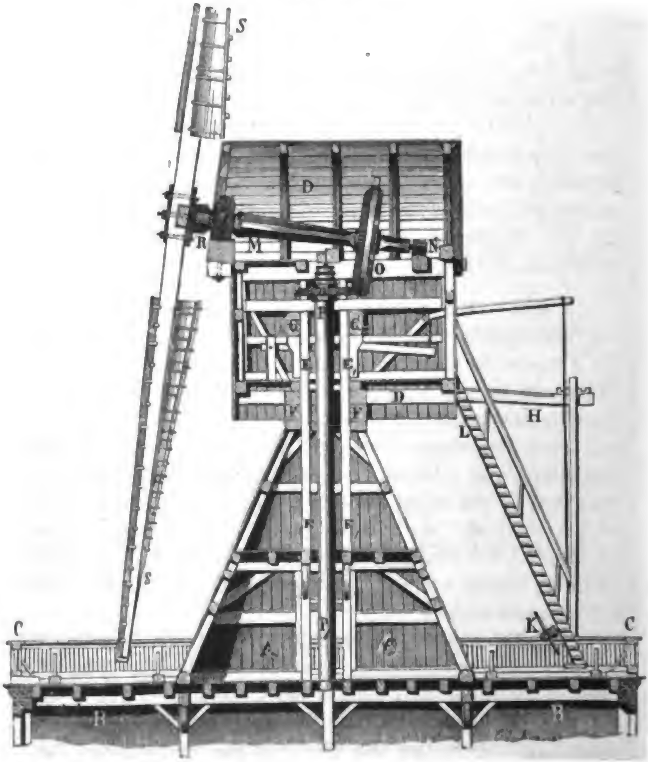
§. 381. Die mechanische Arbeit der Wasserkraft ist abhängig von der Menge des zufliessenden Wassers (vom »Aufschlagwasser«) und der Höhe seines Falles (vom »Gefälle«). Weil die Messung dieser Arbeitsgrösse (im mechanischen Sprachgebrauche die »Messung der Wasserkraft«) eine im technischen Leben so oft vorkommende und von Jedem leicht aufzulösende Aufgabe ist, hat ihr der Messknecht einen besonderen Abschnitt gewidmet. Siehe das dreissigste Kapitel.

§. 382. Die Arbeit der Windkraft wird fast nur bei Windmühlen mit horizontaler oder beinahe horizontaler Flügelwelle und also vertikalem oder beinahe vertikalem Windrade benutzt. Anzahl der Flügel gewöhnlich 4, seltener 5, noch seltener 6. Länge einer Windruthe 6 bis 11 Meter; einer Flügelfläche 5 bis 10 Meter; mittlere Breite der Flügelfläche $1\frac{1}{4}$ bis 3 Meter. Bei ebenen Flügelflächen ist erfahrungsmässig die beste Neigung gegen die Umdrehungsebene 12 bis 18 Grad (der Stosswinkel des Windes also 48 bis 72 Grad), bei windschiefer innen 23 Grad, in der Mitte 10 Grad, aussen 6 Grad. Letztere geben 15 Procent mehr Leistung als erstere.

Fig. 356 a. f. S. versinnlicht die Bauart einer sogenannten Thurmwindmühle mit 4 windschiefen Flügeln, deren Flügelwelle *MN* mittels der Zahnräder *O* und *P* die stehende Hauptwelle (den Königsbaum) in Bewegung setzt, um durch ihn die im Unterbau befindlichen Arbeitsmaschinen (Pulver-, Papier-, Getreide- oder sonstige Mühlen) zu treiben. Das Haupt *DD* des Thurmes ist drehbar vermöge des Kranzes *FF* und des Holzringes *GG*. Die Drehung geschieht mittels einer kleinen Welle (Kreuzhaspel) *K*.

Die Leistung des Windrades wird erfahrungsmässig am grössten, wenn man der Maschine eine solche Arbeit giebt, dass das Windrad am Umfange die $2\frac{1}{2}$fache Geschwindigkeit des Windes annimmt. Für diesen Fall, und bei guter Con-

Fig. 356.



struction und gewöhnlichen Reibungswiderständen findet sich dann (nach Coulomb und Smeaton), wenn *A* die gesammte Flügelfläche und *c* die Windgeschwindigkeit bedeutet, die Leistungsgrösse des Windrades oder der

Flügelwelle *MN* durch die Erfahrungsformel $L = 0{,}032\ A\,c^3$ Kilogrammmeter.

Die Arbeit des Windrades wächst also einfach mit der Flügelgrösse, dagegen in der dritten Potenz der Windgeschwindigkeit. Eine doppelt so grosse Flügelfläche giebt doppelt so grosse Leistung; ein doppelt so schneller Wind aber eine $2 \times 2 \times 2 = 8$mal so grosse Leistung.

Beispiel. Das Windrad der Mühle Fig. 356 habe 4 Flügel von $7^3/_4$ Meter Länge und 1,9 Meter Mittelbreite. Welche Leistungsgrösse hat dasselbe bei $6^1/_4$ Meter Wind- und vortheilhaftester Radgeschwindigkeit (von $2^1/_2 \times 6^1/_4$ Meter am Umfange), oder: wieviel Pferdekräfte theilt es der Königswelle *PP* mit?

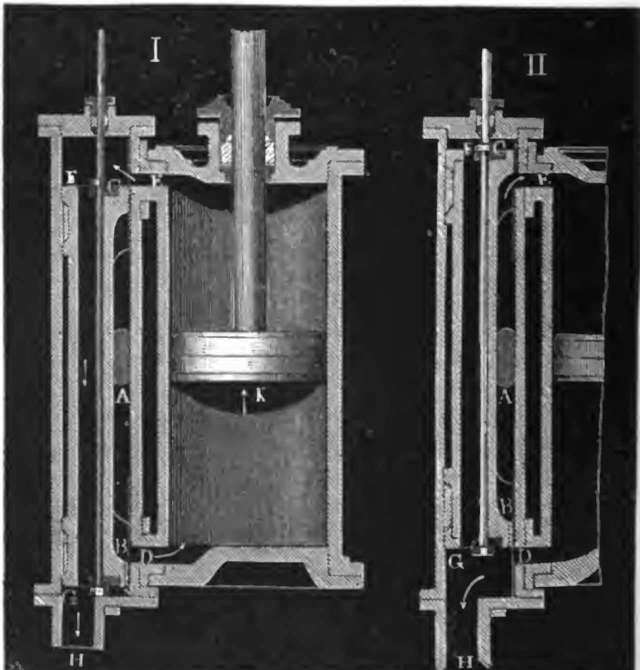
$A = 7^3/_4 \times 1{,}9 \times 4 = 59$ □Meter; $c^3 = 6^1/_4 \times 6^1/_4 \times 6^1/_4 = 244$; $L = 0{,}032 \times 59 \times 244 = 460$ Kilogrammmeter, oder in Pferdekräften, à 75 Kilogrammmeter, $L = \frac{460}{75} = 6{,}1$ Pferde = effektive Kraft der Flügelwelle *MN*, wovon jedoch noch die Reibung am Halse und Zapfen des Königsbaumes in Abzug zu bringen wäre, wenn die effective oder Nutzkraft (s. Zusatz S. 526) des letzteren angegeben werden sollte.

§. 383. Mechanische Arbeit des Dampfes.

Fig. 357 a. f. S. zeigt den Kolben *K* eines Dampfcylinders in der Mitte seines Hubes. Man denke sich denselben in seinem tiefsten Stande, d. h. beim Anfange seines Hubes; und dabei den unteren Cylinderraum (mittels der Oeffnung *D* und des Raumes *B* der Schiebersteuerung *CB* und durch das Dampfzuleitungsrohr *A*) in Communication gesetzt mit einem Dampfkessel, welcher Dampf von 135° Temperatur (nach S. 506 und S. 502 = 3 Atmosphären Spannung = 3 Kilogramm pro □Centimeter) enthält; während der obere Cylinderraum mittels der Kanäle *E* und *FH* mit der Luft communicirt. Die Geschwindigkeit, mit welcher der gespannte Dampf in Folge seiner Druckkraft von 3 Kilogramm pro □Centimeter arbeitet, ist eine solche, dass bei ge-

höriger Weite von D (gewöhnlich $= \frac{1}{25}$ der Kolbenfläche K) und der gewöhnlichen Kolbengeschwindigkeit ($\frac{1}{2}$ — 2 Meter; im Mittel 1 Meter) der Dampf dem ausweichenden Kolben mit unveränderter Druckkraft folgt. Diese ist nach unserem Beispiele = 3 Kilogramm pro □Centimeter. Da indess die Gegenseite des Kolbens mit der freien

Fig. 357.

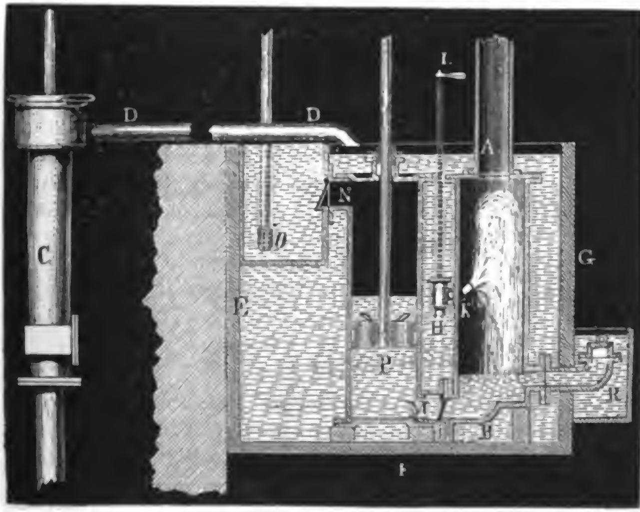


Luft correspondirt, also 1 Atmosphäre = 1 Kilogramm Gegendruck vorhanden ist, so kann der Kolben nur mit dem Ueberdrucke der Arbeitsseite, also mit 2 Atmosphären, arbeiten.

Communicirt des Kolbens Gegenseite, statt mit der freien Luft, durch GH, Fig. 357, mit dem Raume A,

Fig. 358, eines Condensators, wo der Dampf mittels eingespritzten kalten Wassers bis auf 40° oder 50° abgekühlt wird, so kann nur ein Gegendruck von 1—2 Zehntel Atmosphären (S. 506) vorhanden sein. Der obige Dampf arbeitet

Fig. 358.



dann mit einem Ueberdrucke von 3 — 0,1 = 2,9 Atmosphären = 2,9 Kilogramm pro □Centimeter.

Wenn, sobald der Kolben seinen höchsten Stand erreicht hat, durch Veränderung der Schiebersteueruug die entgegengesetzte Communication hergestellt wird, so treibt der nun auf der anderen Seite wirkende Dampf den Kolben mit derselben Kraft zurück.

Ist die Kolbenfläche $K = 1/5$ □Meter = 2000 □Centimeter, so ist bei 2 Atmosphären oder 2 Kilogramm Ueberdruck des Kolbens Kraft = 4000 Kilogramm = P.

Ist sein Hub (die Länge seines Hin- oder Herganges) $h = 1$ Meter und macht er pro Minute 24 (= n) Spiele (à 1 Hin- und 1 Hergang), so legt er pro Minute $n \times 2h$

= 24 . 2 Meter = 48 Meter Weg zurück, oder hat eine Geschwindigkeit c von $\frac{2nh}{60} =$ 0,8 Meter pro Sekunde. Und 4000 Kilogramm Kraft, wirkend mit 0,8 Meter Geschwindigkeit, entsprechen (§. 374) einer Leistungsgrösse von $4000 \times 0{,}8 = 3200$ Kilogrammmeter oder $\frac{3200}{75}$ = 43 Pferdekräften.

§. 384. Rohkraft der Dampf-Maschinen ohne Expansion.

Ist sonach K die Kolbenfläche, p der Ueberdruck des Dampfes auf eine Flächeneinheit des Kolbens, also $P = pK$ des Kolbens Kraft; h die Hubhöhe, n die Zahl der Spiele in 1 Minute, also $\frac{2h \cdot n}{60} = \frac{hn}{30} = c$ die Geschwindigkeit der Kraft, so hat man die theoretische oder rohe Leistungsgrösse des Dampfkolbens $L =$ Kraft $\times$ Geschwindigkeit $= \frac{pKhn}{30}$ (Kilogrammmet. oder Fusspfunde), welche Formel jedoch nur für doppelt wirkende Dampfmaschinen, bei denen der Hin- und Rückgang durch den Dampfdruck erfolgt, gültig ist.

Für die, jetzt wohl nur noch beim Betriebe schwerer Pumpengestänge, den sogenannten Dampfkünsten der Bergwerke, üblichen einseitig wirkenden Dampfmaschinen, bei denen der Rückgang des Kolbens durch die Last des niedersteigenden Gestänges bewirkt wird, arbeitet der Dampf nur in der Hälfte jedes Kolbenspieles; die Leistungsgrösse einer solchen Maschine ist demnach bei denselben Grössen nur halb so gross:

$$L = \frac{pKhn}{60};$$

dafür aber ist auch der Dampf- und also auch der Kohlenverbrauch natürlich nur halb so gross.

§. 385. Zusatz. Von der so berechneten rohen Kraft oder theoretischen Leistung des Dampfes ist die zur wirklichen Benutzung gelangende (für die Arbeits-

welle übrig bleibende) **effektive Kraft oder Leistung** durchschnittlich nur die Hälfte oder 50 Procent der rohen; und nur bei sehr guten und sehr starken Maschinen sind die Verluste, welche durch Abkühlung in den Dampfleitungen, durch Dampfverluste bei den Dichtungen, durch die Reibung des Kolbens, der Kolbenstange etc., durch die Arbeit der Steuerungs- und Speisevorrichtungen etc. verhältnissmässig geringer, so dass der **Wirkungsgrad** auf 0,80 oder der **Nutzeffekt auf 80 Procent steigt.** Bei gewöhnlicher Unterhaltung geht bei schwachen Maschinen unter 8 Pferdekräften der Nutzeffekt sogar bis 30 Procent herab.

Wie man diesen Wirkungsgrad messen kann: Siehe Bremsdynamometer im Kapitel **Reibung**.

§. 386. **Beispiele.**

1. **Beispiel.** Der Kolben einer (doppelt wirkenden) Dampfmaschine habe eine Fläche von $K = \frac{1}{2}$ □Meter und arbeite mit einem Ueberdrucke von 2 Atmosphären oder 20672 Kilogramm (pro □Meter), so dass die rohe Kolbenkraft $= 20672 \times \frac{1}{2} = 10336$ Kilogramm. Die Hubhöhe betrage 1 Meter; die Zahl der Kolbenspiele (à 2 Meter) per Minute sei 30, also des Kolbens Geschwindigkeit (per Sekunde) $\frac{2 \times 30}{60} = 1$ Meter.

Es verrichtet also dieser Dampf in diesem Cylinder, da er in jeder Sekunde 1 Meter mit 10336 Kilogramm Druck zurücklegt, $1 \times 10336 = 10336$ Kilogrammmeter Arbeit, was der sekundlichen Leistung von $\frac{10336}{75}$ $= 138$ Pferden gleichkommt.

Zusatz. Ginge der Kolben leer zurück, so wäre seine **Arbeits**geschwindigkeit nur $= \frac{1}{2}$ Meter zu setzen, woraus für diese einfach wirkende Maschine $L = \frac{138}{2}$ $= 69$ Pferde bei der **Hälfte des Dampfconsums** erfolgte.

2. **Beispiel.** Eine in Preussen stehende (doppelt wirkende) Maschine ohne Condensation hat 18 Zoll Cylinderweite, 40 Zoll Hub und 24 Spiele in der Minute; dabei eine Dampfspannung von $3\frac{1}{2}$ Atmosphären. Welche rohe und, bei 50 Procent Nutzeffekt, welche effektive Kraft hat diese Maschine?

Auflösung. Formel: $L = P \cdot c$ oder $pK \cdot \frac{hn}{30}$.

18 Zoll Durchmesser $= \frac{3}{2}$ Fuss sind nach a-Tabelle $= 0{,}314 \times \frac{3}{2}$ Meter $= 0{,}471$ Meter oder $= 4{,}71$ Decimeter und folglich mittels K-Spalte der Rückseite die zugehörige Kolbenfläche $K = 0{,}175$ □Meter. 1 Atmosphärendruck pro □Meter = Gewicht der Quecksilbersäule von 0,760 Kubikmeter = 10336 Kubikmeter; $2\frac{1}{2}$ Atmosphären Ueberdruck $p = 10336 \times 2\frac{1}{2}$ $= 25840$ Kilogramm pro □Meter; also Kolbenüberdruck $P = pK = 25840 \times 0{,}175 = 4522$ Kilogramm.; Hub $h = 40$ Zoll $= 3\frac{1}{3}$ Fuss, laut a-Tabelle $= 0{,}314 \times 3\frac{1}{3}$ Meter $= 1{,}046$ Meter; Spiele $n = 24$; also Geschwindigkeit $c = \frac{h \times n}{30} = \frac{1.046 \times 24}{30}$ $= 0{,}837$ Meter; $L = P \times c = 4522 \times 0{,}837$ Kilogrammmeter $= 3785$ Kilogrammmeter pro Sekunde oder in Pferden $= \frac{3785}{75} = 50$ Pferdekräften.

Die Arbeitswelle der Maschine würde also beim Wirkungsgrade 0,50 der Maschine eine lebendige Nutzkraft von 25 Pferden besitzen.

§. 387. **Rohkraft der Dampf-Maschinen mit Expansion.**

Man denke sich die Steuerung der im Beispiel 1 des vorigen Paragraphen berechneten Dampfmaschine so eingerichtet, dass sie den Dampfweg schon absperrt, wenn der Kolben nur erst die Hälfte seines 1 Meter langen Hubes zurückgelegt hat, so wirkt der Dampf bei jedem Kolbenspiele nur die Hälfte der Zeit und des Weges mit der

vollen Spannung von 135° oder 3 Atmosphären. Während der anderen Hälfte hört er aber nicht auf zu arbeiten, sondern treibt den Kolben vermöge seiner Expansivkraft, indem er in Folge allmäliger Ausdehnung zum doppelten Raume zugleich von 3 Atmosphären Spannung nach und nach auf $2\frac{1}{2}$, 2 und $1\frac{1}{2}$ Atmosphären herabsinkt, immer noch mit gewissem Ueberdruck, wenn auch zuletzt nur mit dem von etwa $\frac{1}{2}$ Atmosphäre vor sich her. Eine solche Maschine braucht natürlich in derselben Zeit nur die Hälfte des Dampfes, den bei gleich geschwindem Gange und sonst gleichen Verhältnissen die erstere braucht. Vermöge der Arbeit aber, die der Kolben noch während der Expansion verrichtet, ist ihre Leistung nicht bloss die Hälfte oder 0,5, sondern bedeutend mehr; im gedachten Falle, wenn man die abnehmende mechanische Arbeit in der 2ten Hälfte des Kolbens summirt, kommen noch 0,3 hinzu; zusammen also $0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$ oder $\frac{4}{5}$ soviel.

Ist z. B. V der Dampfverbrauch der im 2. Beispiele berechneten Maschine per Stunde, und L (= 50 Pferde) ihre Leistung, so würde sie mit $\frac{1}{2}$ Expansion brauchen $\frac{1}{2}$ V und leisten $0{,}8\ L$ (= 40 Pferde).

Für den gleichen Dampfverbrauch V würde aber die von ihm geleistete Arbeit $= 2 \times 0{,}8\ L = 1{,}6\ L$ (= 80 Pferde) oder um 60 Procent grösser als ohne Expansion sein.

§. 388. Annähernd, aber sehr einfach, lässt sich die **theoretische Leistung** oder **rohe Kraft der Expansionsmaschinen** nach folgender Regel finden:

Man berechne nach §. 384 nur die Arbeit des nicht expandirten Dampfes, indem man sich den Kolbenhub um soviel verkürzt denkt, als der Expansionsgang des Kolbens beträgt; erhöhe diese Leistung, wenn der Dampf in der Mitte oder bei 5 Zehntel des Hubes abgesperrt wird:

a) bei Condensationsmaschinen immer um 70 Proc.,

b) bei Maschinen ohne Condensation

mit 2,	3,	4,	5,	6	Atmosphärenspannung,
um 50	55	60	62	64	Proc.,

und erhöhe diesen Zuschlag für jedes Zehntel früherer Absperrung verhältnissmässig, d. h. um sein Fünftel; und vermindere ihn ebenso für jedes Zehntel späterer Absperrung.

1. Beispiel. Die Maschine des 2. Beispiels §. 386 sei mit 5 Zehntel Expansion, d. h. so eingerichtet, dass bei 0,5 des Hubes der Dampf abgesperrt wird. Welche Rohkraft hat dieselbe?

Die Arbeit des Dampfes vor der Expansion, ist laut Rechnung des Beispiels 2 in §. 386, indem man die Hubhöhe h zur Hälfte, also $\frac{1}{2}h$ statt h in die Formel setzt, natürlich $= \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$ Pferdekräfte. Dazu die durch Expansion gewonnene Leistung bei $3\frac{1}{2}$ Atmosphärenspannung mit 57 Proc. $= 25 \times 0{,}57 = 14\frac{1}{4}$ Pferde; Summa 39 Pferdekräfte (bei der Hälfte des Dampf- und Kohlenverbrauchs, den sie ohne Expansion bei 50 Pferdekräften verbraucht).

2. Beispiel. Dieselbe Maschine soll mit 6 Zehntel Expansion wirken, d. h. der Dampf soll schon bei 0,4 des Hubes abgesperrt, also nur $\frac{2}{5}$ dessen an Dampf consumirt werden, was die 50pferdige Maschine brauchte. Wie gross die Rohkraft der Maschine?

Den Kolbenhub h zu $0{,}4\,h$ gesetzt, giebt den Werth L der vollen Leistung von 50 Pferden natürlich $= 0{,}4 \times 50 = 20$ Pferde; der Expansionsnutzen ist aber nach obiger Regel um $\frac{1}{5}$ grösser, also $57 + \frac{1}{5} \cdot 57 = 68$ Proc. $= 20 \times 0{,}68 = 13{,}6$ Pferde; Summa $33\frac{1}{2}$ Pferdekraft.

§ 389. Effektive Kraft. Wirkungsgrad Nutzeffekt (der Dampfmaschine).

Bereits in §. 385 sind die Ursachen namhaft gemacht, warum die Rohkraft, die gleichsam subjektive Arbeit des Dampfes, nicht zur vollen Benutzung und Objektivität gelangen könne; und warum man, wenn, z. B. mittels eines Kraftmessers, die Leistung der Arbeitswelle einer Dampfmaschine gemessen wird (siehe Reibung), diese »effektive Leistung« namhaft geringer findet, als die rohe oder sogenannte theoretische.

Die Erfahrung lehrt, dass die effektive Leistung, der Nutzeffekt der Dampfmaschinen, bis zu 80 Procent steigen und bis unter 30 Proc. sinken, oder dass der Wirkungsgrad zwischen 0,30 und 0,80 liegen kann.

Je weniger gut die Construction und die technische Ausführung, namentlich aber je schwächer und kleiner die Maschine, desto kleiner ist begreiflich auch ihr Wirkungsgrad.

Um aus der nach den vorstehenden §§. berechneten rohen Kraft die effektive mit genügender Sicherheit ableiten zu können, benutze man folgende

Erfahrungsregel für die Nutzeffekte,

bei mittlerer Geschwindigkeit und dem gewöhnlichen Zustande der Unterhaltung.

Rechne bei Maschinen	mit Niederdruck (oder bis 2 Atmosph.)	mit Hochdruck (2—8 Atmosph.). mit Condensation	mit Hochdruck (2—8 Atmosph.). ohne Condensation.	
unter 10 Pferdekraft	40	34	35	Procent der rohen Leistung.
von 10 Pferdekraft	41	35	37	Procent der rohen Leistung.
und für je 10 Pferde mehr.	1	1	$2\frac{1}{2}$	Procent mehr.

1. Beispiel. Welche effektive Kraft kann die im Beispiel 2 des §. 386 mit 50 Pferden Rohkraft berechnete Maschine hiernach ausüben?

Wirkungsgrad bei 10 Pferden = 37 Proc.; für 4 mal 10 Pferde mehr: $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$, zusammen 47 Proc. oder 0,47 Wirkungsgrad, macht $50 \times 0{,}47 = 23{,}5$ Pferde.

2. Beispiel. Welche effektive Kraft hat die Welle der im 2. Beispiel §. 388 mit 33 Pferdekräften berechneten Expansionshochdruckmaschine?

Wirkungsgrad der 10pferd. = 37; jede 10 Pferde mehr $2\frac{1}{2}$, also
für d. anderen 2 × 10 Pferde = 5
u. d. anderen 3 od. $\frac{1}{2}$.10 Pfrd. = 1

43 Proc.; oder
0,43 × 33 = 14 Pferde.

Zusatz. Diese Maschine hatte 0,6 Expansion; arbeitet also mit 0,4 des Dampfes, den jene mit 23,5 Pferdekräften effektiv verbraucht. Verhältnissmässig könnte sie also nur 0,4 × 23,5 = 9,4 Pferdekraft haben. Die Expansion hatte also den Gewinn von 14 — 9,4 = 4,6 effektiven Pferdekräften.

§. 390. **Wechselbeziehung zwischen Brennstoffverbrauch und Dampfkraft.**

Die Rohkraft der Dampfmaschine hängt, wie uns der Inhalt und die Formel des §. 384 zeigt, einzig nur von der Expansionskraft pK des Dampfes und von der Zahl n und Höhe h der Kolbenspiele, oder, was damit gleichbedeutend ist, von der Spannkraft und Grösse des verbrauchten Dampfvolumens ab. Beides, Menge und Spannkraft des Dampfes, sind aber einfach Folgen des verbrauchten Brennstoffs. Einem gewissen Quantum Brennstoff muss also eine gewisse Grösse roher Dampfleistung entsprechen, und umgekehrt; ein Verhältniss, das bei Maschinen von gleichen Wirkungsgraden selbst hinsichts der effektiven Leistung stattfindet.

Nach der Messknechtstafel giebt:

1 Kilogramm Steinkohle 75 Kilogramm Siedewasser, wovon etwa nur die reichliche Hälfte benutzbar ist.

1 Kilogramm Steinkohle erzeugt also 40 Kilogramm Siedewasser oder 4000 Wärmeeinheiten (metrische).

Zur Erzeugung von 1 Kilogramm Dampf braucht man

ferner 640 Wärmeeinheiten, gleichviel ob er 100 oder 150° heiss sei (S. 509); also erzeugt

1 Kilogramm Kohle $\frac{4000}{640} = 6$ Kilogramm Dampf von jeder Spannung.

Nach Tabelle d. S. 506 werden aus 1 Kubikmeter oder 1000 Kilogramm Wasser

a) 1696 Kubikm. Dampf v. 1 Atmosph.

b) 897 » » » 2 » » oder circa halbsoviel bei doppelter Spannkraft;

c) 476 » » » 4 » » gegen das vorige wieder circa halbsoviel bei doppelter Spannkraft,

und brauchen zu dieser Verwandlung immer dieselbe Brennstoffmenge; nämlich (da laut §. 373 z. B. zu 6 Kilogramm Dampf immer 1 Kilogramm Steinkohle, oder der sechste Theil des Dampfgewichts, gehört) $\frac{1000}{6} = 167$ Kilogramm Steinkohle.

Denken wir uns nun Maschinen mit Condensation und lassen den schwachen Gegendruck des condensirten Dampfes von 0,1 bis 0,2 Atmosphären unberücksichtigt, so arbeitet gegenüber *a* die Maschine *b* mit halbsoviel Dampf, aber doppeltem Ueberdrucke; *c* mit ¼ soviel Dampf, aber vierfachem Ueberdrucke; und es erhellt aus dem Früheren, selbst schon allein aus §. 384, dass natürlich die Rohleistungen dieser Dampfgrössen einander gleich sein müssen. — Bei Maschinen ohne Condensation, wobei man den Dampfdruck (2 Atmosphären, 4 Atmosphären) um 1 volle Atmosphäre Gegendruck vermindern muss, um die Rohleistung des Kolbens oder zunächst den Ueberdruck des Dampfes zu erhalten, wird das Verhältniss jener Rohleistung allerdings alterirt, denn man hat von 167 Kilogramm Steinkohle dem obigen gemäss

897 Kubikm. Dampf v. $2-1=1$ Atmosph. Ueberdruck
und 476 » » » $4-1=3$ » »

also $\frac{1}{2}$ soviel Menge mit 3facher Kraft, macht $\frac{1}{2} \times 3 = 1\frac{1}{2}$fache Leistung.

Maschinen (ohne Condensation) mit höherer Spannung brauchen also verhältnissmässig weniger Brennstoff als solche mit niederem Drucke. Doch ist der Vortheil nicht so grell, als vorstehende Rechnung giebt, weil bei höherer Spannung oder Temperatur mehr Wärmemenge in die Esse u. s. w. verloren geht, oder: weil je höher die Temperatur, desto geringer die effektive Heizkraft des Brennstoffes ist.

Demgemäss lassen sich allgemeine Mittelzahlen aufstellen, die den Brennstoffaufwand von der Dampfkraft abhängig machen, und umgekehrt; und die unter gleichartigen Verhältnissen ganz wohl zutreffen.

§. 391. Das untere Mittelfeld der Vorderseite des Knechtes enthält von diesen, für die Oekonomie des Dampfmaschinenhaushaltes wichtigen Zahlen eine kurze Notiz, gleich unter der Krafttabelle, die so zu verstehen und zu gebrauchen ist:

Bei Maschinen ohne Expansion ist der Bedarf an bester Steinkohle oder Kohlenstoff pro Pferd und Stunde, wenn die Maschine nur 3pferdig ist, 7 Kilogramm; wenn sie 10 Pferdekraft hat, 6 Kilogramm, und bei 20pferdigen und stärkeren $4\frac{1}{2}$ Kilogramm. — Bei zweckmässiger Expansion reducirt sich der Kohlenverbrauch mindestens um ein Drittel; und wenn auch eine zweckmässige Condensation vorhanden ist, fast noch um ein weiteres Drittel. Dass jene Zahlen nur allgemeine Durchschnittszahlen sein können, folgt schon daraus, dass eben nicht bloss die Kraft, sondern auch das System der Maschine auf den Brennstoffconsum Einfluss hat. Nimmt man gewöhnliche gute Steinkohle zum Maassstabe, so rechnen die Maschinenbauer z. B. bei Watt'schen Maschinen (Tiefdruck und Balancier) durchschnittlich pro Pferd und Stunde 6 bis 7 Kilogramm, während sie bei Hochdruckmaschinen ohne Expansion und Condensation 10—7 Kilogramm, bei dergleichen mit Expansion aber halbsoviel, und wenn noch Condensation dabei ist, nur $\frac{1}{3}$ soviel rechnen.

1. Beispiel. Wieviel Kohle braucht eine Dampfma-

schine, die mit 20 Pferdekraft und hohem Drucke ohne Expansion arbeitet, etwa stündlich?

Nach der Messknechtsnotiz $4\frac{1}{2} \times 20 = 90$ Kilogramm beste $= 90 \cdot \frac{4}{3} = 120$ Kilogramm gute.

2 Beispiel. Und wenn sie bei der gleichen Kraft mit Expansion arbeitet?

Die reichliche Hälfte = 50 bis 60 Kilogramm beste = 70 bis 80 Kilogramm gute.

§. 392 Man kann sogar noch weiter gehen und für jede Spannung, mit welcher der Dampf, und je nachdem er mit und ohne Expansion zu wirken hat, die rohe Leistung angeben, die 1 Kilogramm (2 Zollpfund) Kohlenstoff oder beste Steinkohle in sekundlichen Pferdeleistungen oder in Arbeitseinheiten von 75 Kilogrammmetern erzeugt. Diese ist in abgerundeten Zahlen ausgedrückt (nach Weisbach's Mechanik II.):

Bei der Atmosphären-spannung.	Bei Maschinen ohne Expansion		Bei Expansions-maschinen	
	ohne Condensation.	mit Condensation.	ohne Condensation.	mit Condensation.
1	0	1500	0	2300
2	850	1650	1000	3500
3	1200	1740	1750	4309
4	1400	1780	2300	4800
5	1500	1800	2700	5200
8	1700	1820	3600	6000

1. Beispiel. Welche Leistung müsste eine Maschine mit Expansion und Condensation haben, wenn sie mit 4 Atmosphären arbeitet und stündlich 20 Kilogramm beste Steinkohle verbraucht?

Verbrauch pro Sekunde $\frac{20}{60 \cdot 60} = \frac{1}{180}$ Kilogramm Kohle; Arbeit pro Kilogramm laut Tabelle 4800

Pferdeleistungen, also pro $\frac{1}{180}$ Kilogramm an sekundlichen Pferdeleistungen $4800 \cdot \frac{1}{180} = 26^4/_9$ oder: die Maschine müsste eine Rohleistung von reichlich 26 Pferdekräften, oder laut S. 531, da der Wirkungsgrad $= 0,36$ zu setzen, eine Effektivkraft von $0,36 \times 26 = 9$ Pferden haben. (Pro effektive Pferdekraft und Stunde also $\frac{20}{9} = 2^1/_4$ Kilogramm beste $= 2^3/_4$ bis 3 Kilogramm mittlere Steinkohle).

2. Beispiel. Wieviel müsste eine 20pferdige Hochdruckmaschine, die mit 5 Atmosphären und ohne Expans. u. Condensation arbeitet, stündlich an bester Steinkohle brauchen? Da die Rohkraft derselben circa das Doppelte, also $= 40$ Pferde, so hat man:

1500 sekundl. Pferdeleist. $=$ 1 Kilogramm Kohle;

1 » » » » » $= \frac{1}{1500}$ Kilogramm Kohle,

40 » » » » » $= \frac{1}{37}$ Kilogramm Kohle,

also per Stunde: $\frac{1}{37} \cdot 3600 = 96$ Kilogramm, was per effektive Pferdekraft und Stunde $\frac{96}{20} = 4^3/_4$ Kilogramm Steinkohle macht.

Dreissigstes Kapitel.

Wasser- und Wasserkrafts-Messung. (Hydrometrie.)

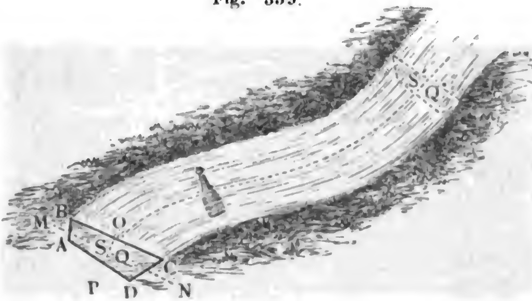
---

§. 393. Hydrometrische Bezeichnungen und Begriffe.

Querprofil oder Wasserprofil eines Gerinnes oder Baches heisst der gegen die Strömung rechtwinklig geführte Querschnitt Q; und Geschwindigkeit des Wassers: der Weg, den jedes seiner Theilchen in einer

Sekunde zurücklegt. Die Geschwindigkeit wird grösser und das Wasserprofil kleiner, wenn das Gefälle des Bachbettes zunimmt; auch ist erstere an der Oberfläche grösser als im Grunde, in der Mitte grösser, als am Ufer. Bei

Fig. 359.



den gewöhnlich vorkommenden Geschwindigkeiten und Wasserbetten, ist im Durchschnitte die mittlere Geschwindigkeit um $^1/_5$ kleiner als die der Oberfläche.

Wenn das Wasser durch eine Wand, z. B. eine Schützenöffnung, abfliesst, so nennt man dies

Ausfluss durch eine dünne Wand, sobald die Dicke der Wand nicht über 5 Centimeter (2 Zoll) und die kleinste Dimension der Oeffnung nicht kleiner als die Wanddicke ist; z. B. wenn bei einem zolldicken Brette die Ausflussöffnung mindestens 1 Zoll weit ist; dagegen

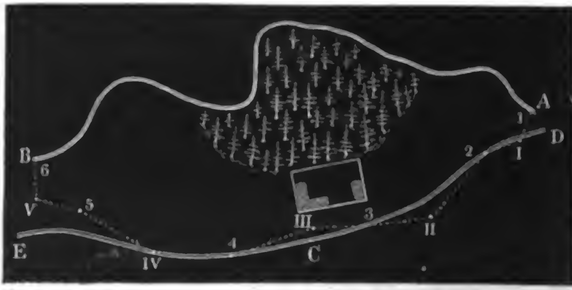
Ausfluss durch eine dicke Wand (oder mit Ansatzröhre), wenn die Wanddicke der Oeffnung mindestens $1^1/_2$mal so gross ist als die kleinste Weite der letzteren.

Druckhöhe des Wassers ist die lothrechte Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunkte der Ausflussöffnung, oder — wenn letztere eine symmetrische Figur ist — über dem Mittelpunkte derselben.

Rohes Gefälle: Das Gefälle, das ein Bach Fig. 360 oder dergleichen zwischen irgend zwei Punkten A und B seines Laufes wirklich besitzt; die Höhendifferenz zwischen dem Wasserspiegel A am Ober- und B am Unterpunkte.

Lebendiges Gefälle: was nach Abzug des nothwendigen Gefälles für den Obergraben (etwa $= \frac{1}{1000}$ der Länge) und den Untergraben (Abführgraben) noch für die Wassermaschine übrig bleibt.

Fig. 360.



Rohe Wasserkraft, auch absolute Wasserkraft: die nach Maassgabe des lebendigen Gefälles und des Aufschlagquantums (Wasserzufluss pro Sekunde) vom Wasser verrichtete Arbeit (subjektive Leistung, wirklich vorhandene Kraft).

Effektive Kraft; Nutzeffekt: derjenige Theil der wirklich vorhandenen Kraft, den das Wasserrad davon aufzunehmen vermag. Das Verhältniss der effektiven zur rohen Kraft heisst der Wirkungsgrad des Rades.

Der Nutzeffekt der besten Wasserkraftmaschinen beträgt 80 Proc. der absoluten Kraft, oder entspricht dem Wirkungsgrade $0{,}80 = \frac{4}{5}$.

Beispiel. Welche Kraft kann die Welle eines Wasserrades haben, dessen Wirkungsgrad 75 Hundertel ist, wenn die absolute Kraft der Betriebsmasse sich zu 80 Pferden ergiebt?

$80 \times 0{,}75 = 60$ Pferde effektive.

Kraftmaschine: der Apparat, welcher eine bewegende Kraft unmittelbar aufnimmt (Wasserrad, Dampfmaschine, Pferdegöpel).

Arbeitsmaschine: der Apparat, welcher die Kraft zu ihrer technischen Bestimmung **verwendet** (Mühle, Pochwerk, Drehmaschine).

Zwischenmaschine: der Apparat, welcher zwischen beiden ersten den nöthigen Umsatz an Richtung und Geschwindigkeit **vermittelt** (das Vorgelege bei Wassermühlen, die Leitungsapparate, Kuppelungen etc.)

§. 394. Die Kraftmaschinen für's Wasser sind entweder **vertikale** oder **horizontale** Wasserräder, oder **Wassersäulenmaschinen**; von denen die ersteren wieder in ober-, mittel- und unterschlägige unterschieden werden.

Fig. 361 zeigt die Einrichtung und Wirkungsweise der oberschlägigen Räder.

Fig. 361.

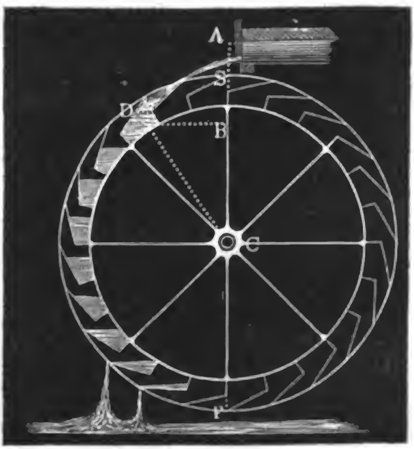


Fig. 362 a. f. S. zeigt das Karakteristische jener oberschlägigen Räder, bei denen man das Wasser nicht über das Rad hinwegführt, sondern die Beaufschlagung diesseits und zwischen Radmittel und Radscheitel bewirkt, und die man **rückenschlägige** nennt;

Fig. 363 a. f. S. verdeutlicht eine sehr ökonomische,

nämlich innere Beaufschlagung eines mittelschlägigen **Zellenrades** (dessen Speichen natürlich gegen den Zellenkranz etwas zurückliegen müssen, um vor dem Gerinn-Ende vorbeizukommen);

Fig. 362.

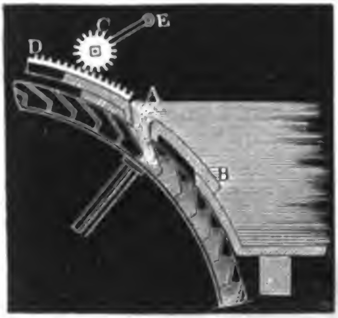


Fig 363.



während Fig. 364 und 365 zwei verschiedene Beaufschlagungen mittelschlägiger **Schaufelräder** mit anschliessendem oder **Kropfgerinne** zur Anschauung bringen.

Fig. 364.



Fig. 365.



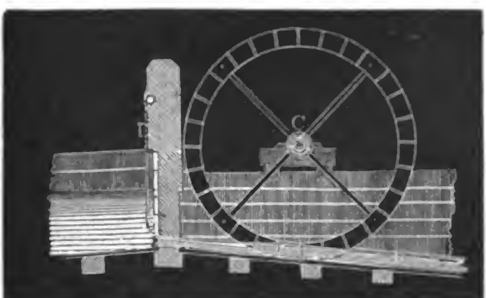
Fig. 366 und 367 zeigen die Arbeitsweise des Wassers an unterschlägigen Rädern, und zwar Fig. 367 im einfachen **Schnur-**, Fig. 366 im vortheilhafteren **gekröpften** Gerinne.

Fig. 368 stellt den Aufriss, Fig. 369 a. f. S. den Horizontaldurchschnitt (Grundriss) eines horizontalen Wasserrades (einer Turbine) nach Fourneyron'scher Construction dar, bei welcher das Wasser die seiner Druckhöhe und Aufschlagsmenge entsprechende mechanische Arbeit dadurch verrichtet, dass es am Boden des daselbst rings offnen Reservoirs und geführt von dem daselbst befindlichen Leitschaufel-Apparate *FF*, mit einer der Druckhöhe entsprechenden Geschwindigkeit gegen die krummen Schaufeln *A* der Turbine wirkt und seine Arbeitskraft an diese überträgt.

Fig. 366.

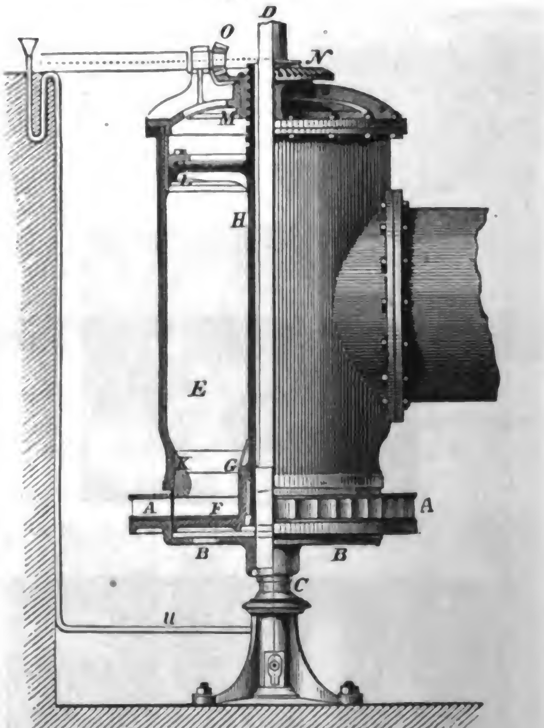


Fig. 367.



Endlich versinnlicht Fig. 370 den eigentlichen Kraftmechanismus einer doppeltwirkenden, d. h. auf beiden Seiten des Treibekolbens K' wirksamen, Wassersäulenma-

Fig. 368.



schine, in welcher das Wasser ähnlich wie in einer Dampfmaschine durch den Druck auf einen Treibekolben K' wirkt, (dessen Stange $K'D$ mittels ihres Armes DB am Ende des Hubes mittels des Ringes l_1 und Hebels fg die Steuerkolben s und s_1 herunterstösst, wodurch das Kraftwasser selbst den grösseren Kolben k der Hülfs- oder eigentlichen Steue-

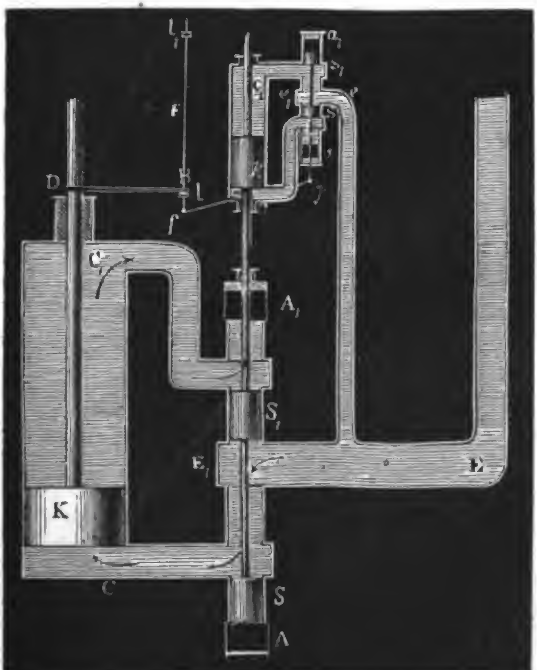
Fig. 369.



rungsmaschine in die Höhe treibt, und nun, über den Treibekolben tretend, denselben wieder hinunterdrückt, während das verbrauchte Arbeitswasser frei durch *A* abfliesst).

Der Nutzeffekt der besseren oberschlägigen Räder, der Turbinen und der Säulenmaschinen liegt zwischen 70 und 80 Procent, wäh-

Fig. 370.



rend der der besten mittel- und unterschlägigen (Kropfräder) selten 60 Procent übersteigt; bei Rädern ohne Kropf oft sogar bis 25 Procent herabsinkt.

§. 395. **Die mittlere Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers zu messen.**

Wenn die Wassertheilchen, um eine Strecke von 60 Fuss zu durchlaufen, 20 Sekunden brauchen, so ist natürlich pro Stunde ihr Weg, d. h., nach S. 495, ihre Geschwindigkeit $= \frac{60}{20} = 3$ Fuss; woraus denn mit Rücksicht auf S. 537 die Regel folgt:

a) Nimm einen hinlänglich tief eintauchenden Schwimmer, wozu sich am besten zwei abgerundete Holzstücken eignen, die durch eine entsprechend kurze Schnur verbunden sind und von denen das eine durch eingeschlagene Nägel und dergleichen schwerer als Wasser gemacht worden ist. — Beobachte hierauf mittels des Halbsekundenpendels (siehe Kapitel 25) die Anzahl Sekunden, die dieser Schwimmer braucht, um eine gewisse Strecke zu durchlaufen, und dividire damit in letztere.

1. Beispiel Ein sicher den Schritt zu 3 Fuss schreitender Mann hatte an einem Bache 10 Schritt abgemessen und beim Halbsekundenpendel 24 Schwingungen beobachtet während der Zeit, dass der Schwimmer den abgeschrittenen Raum zurücklegte; so war: Weg $= 30$ Fuss; Zeit $= 12$ Sekunden, Geschwindigkeit $= \frac{30}{12} = 2\frac{1}{2}$ Fuss.

b) **Beobachte nach voriger Methode, aber bloss mittels eines schwimmenden einfachen Holzstückes, die Oberflächengeschwindigkeit; und vermindere deren Grösse um ihr Fünftel.**

(Die mittlere Geschwindigkeit des Wasserprofils beträgt nämlich bei den gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen der Wasserbetten und Wassergeschwindigkeiten ziemlich nahe $\frac{4}{5}$ der Oberflächengeschwindigkeit.)

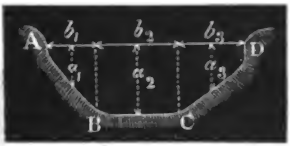
Bei sehr langsamen Wasserlaufe von $1-1\frac{1}{2}$ Fuss Geschwindigkeit bekommt man nach dieser Regel etwas zu wenig.

§. 396. Die Zuflussmenge eines Wassers zu messen.

(Erste Methode.)

Gesetzt, der Flächeninhalt des Wasserprofils Fig. 371 wäre = 10 □Fuss und die Geschwindigkeit allda 3 Fuss, so schöbe sich in jeder Sekunde durch diesen Querschnitt ein Wasserprisma von 10 □Fuss Grundfläche und 3 Fuss Länge, also, wie Kap. 17 lehrt, von 30 Kubikfuss Wassermasse; welche man das Aufschlagsquantum oder den Zufluss dieses Wassers nennt, und für dessen Messung sonach folgende Regel gilt:

Fig. 371.



In derjenigen Gegend, in welcher die Geschwindigkeit und in Folge dessen auch die Querprofilsgrösse besonders gleichförmig erscheinen, miss nach vorigem Paragraph die Geschwindigkeit und nach Kap. 14 die Fläche des Profils und multiplicire beide Zahlen mit einander.

Beispiel. Auf einer Strecke von 30 Schritt = 90 Fuss brauchte der Schwimmer 25 Sekunden, während die Berechnung des Querprofils demselben 20 □Fuss beilegte. Sonach war die Geschwindigkeit $= \frac{90}{25} = 3\frac{3}{5}$ Fuss und der Zufluss $20 \times 3\frac{3}{5} = 72$ Kubikfuss (pro Sekunde).

§. 397. Die Zuflussmenge eines Wassers zu messen.

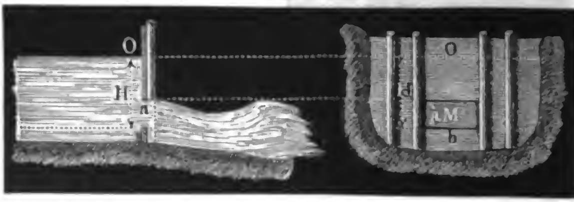
(Zweite Methode).

Das Bett sei durch eine Querwand, z. B. ein Schutzbrett, vollständig abgedämmt, und in letzterem eine horizon-

tal gestellte rechteckige Oeffnung von der Breite *b* und Höhe, *a* (Fusse) also von der Fläche $F = ab$ □Fusse befindlich, durch welche alles Wasser fliessen muss. Dabei wird sich vor dem Schutze das Wasser anstauen und immer höher und höher steigen und dadurch das Wasser mit immer grösserer Geschwindigkeit durch die Oeffnung treiben, bis endlich der Ausfluss mit dem Zuflusse sich in's Gleichgewicht gesetzt hat.

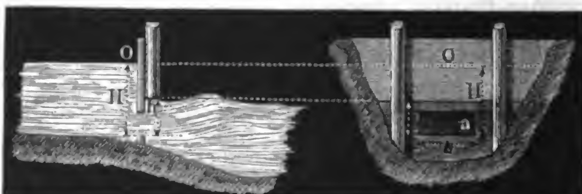
Es ist nothwendig, hierbei folgende drei Fälle zu unterscheiden.

Fig. 372.



1. Die Oeffnung ist rings begrenzt und mündet in die freie Luft, indem das abfliessende Wasser keinen Rückstau ausüben kann; Fig. 372.
2. Die Oeffnung ist rings begrenzt und vollständig unter-

Fig. 373.

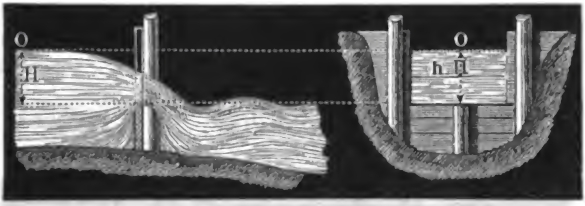


getaucht, indem das Abflusswasser noch über der oberen Seite der Oeffnung steht; Fig. 373.
3. Die Oeffnung ist oben nicht begrenzt; ein Ueberfall; Fig. 374.

Würden die Wasserstrahlen beim Durchflusse sich gegenseitig nicht hemmen und stören, so würde nach Grund-

sätzen der Hydraulik das (theoretische) Ausflussquantum Q pro Sekunde betragen:

Fig. 374.



im Falle (1) $Q = a b \sqrt{2 g \left(H - \frac{a}{2}\right)}$
» » (2) $Q = a b \sqrt{2 g (H-h)}$
» » (3) $Q = \frac{2}{3} b H \sqrt{2 g H}$

deren Grössen ihrer Bedeutung nach aus den beistehenden Figuren zu ersehen sind und worin g die Beschleunigung der Schwere = 9,81 Meter bedeutet, die in den Fussen anderer Länder ausgedrückt, nach der a-Tabelle sich ergiebt, wie folgt:

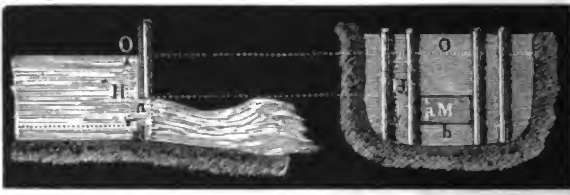
Oesterreich.	Preussen	Baiern.	Sachsen.	Hannover.	Würtemberg.	Baden.	Darmstadt.	England.	Paris.
31,03	31¼	33,65	34,63	33,58	34,24	32,70	39,24	32,18	30,2

Weil aber die Wasserfäden beim Ausflusse sich gegenseitig durchkreuzen, zieht sich der ganze Strahl in einen kleineren Querschnitt zusammen, so dass durch diese Contraction statt jener vollen theoretischen Ausflussmengen etwa nur 70 Procent derselben, unter ungünstigen Umständen gar nur 57 Procent ausfliessen. Dieser Contractionscoëfficient wird nämlich um so kleiner, je grösser die Höhe a der Oeffnung und je kleiner die Höhe H des Wasserstandes und je mehr die Lage der Oeffnung das Durchkreuzen der Wasserfäden, die Bildung eines Strudels in ihr, begünstigt.

Ist nun der eingezogene oder schon vorhandene Schutz so, dass nach Art der gewöhnlichen Schützenöffnungen die Sohle derselben ziemlich nahe am Boden ist, so hat man:

a. Wenn die Schutzwand senkrecht steht, die wirkliche Ausflussmenge $=$ 0,62 der theoretischen sub 1 oder 2, also $0{,}62\ ab\sqrt{2g\left(H-\frac{a}{2}\right)}$ bei nicht untergetauchter

Fig. 375. Fig. 376.



und $0{,}62\ ab\sqrt{2g(H-h)}$ bei untergetauchter Abfluss-

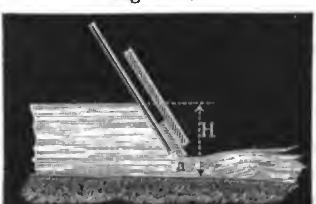
Fig. 377. Fig. 378.

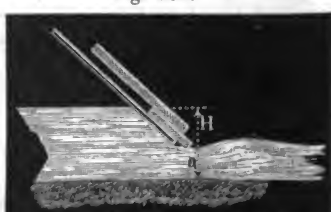


öffnung.

b. Wenn die Schutzwand so geneigt ist, dass die Basis

Fig. 379. Fig. 380.

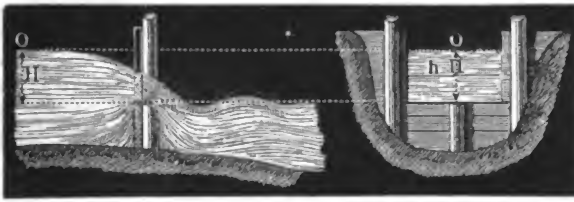




des Neigungsdreiecks halb so gross als seine Höhe, Fig. 379, so steigt der Contractionscoëfficient (0,62) auf 0,74; und, wenn die Basis gleich der Höhe, Fig. 380, a. v. S. also die Neigung im halbrechten Winkel stattfindet, auf 0,80.

c. Ist die Oeffnung aber ein Ueberfall, so hat man, wenn die Breite b desselben kleiner als die des Gerinnes ist, Fig. 381 und 382, das wirkliche Quantum,

Fig. 381. Fig. 382.



wenn man statt der theoretischen Formel $\frac{2}{3}\, b\, H \sqrt{2\, g\, H}$ setzt: $0{,}40\ b\, H \sqrt{2\, g\, H}.$

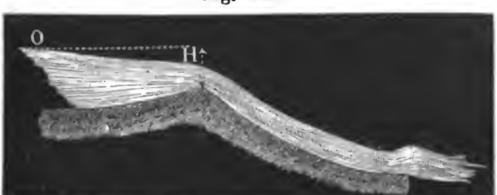
d. Wenn der Ueberfall die nämliche Breite wie der Zuleitungskanal hat:

$$Q = 0{,}44\ b\, H \sqrt{2\, g\, H}.$$

e. Wenn endlich, wie bei den gewöhnlichen Wehren, die Abflussöffnung dieselbe Breite und Tiefe hat, wie oberhalb der Bach, also fast gar keine Contraction statt hat, Fig. 383, so ist:

$$Q = 0{,}57\ b\, H \sqrt{2\, g\, H}.$$

Fig. 383.



Und es bedeutet immer a die Höhe, b die Breite der Abflussöffnung, g die oben angegebene Beschleunigung der Schwerkraft, H die Höhe des Oberwasserspiegels und h die des Unterwasserspiegels über der Sohle der Abflussöffnung. Da der Oberwasserspiegel sich nach dem Abflusse zu senkt, so muss man seine Höhe dort (O) messen, wo noch keine Senkung statt hat.

Aus alle dem bildet sich nun folgende

Praktische Vorschrift der Wassermessung: Wenn ein Schutz irgend einer der obgedachten Arten nicht vorhanden ist, so bilde einen solchen so einfach als möglich aus Brettstücken etc., miss die von der betreffenden Formel verlangten Dimensionen (b und H oder auch noch a und h) nach Fussen mittels zweier Maassstäbe, und zwar die Wasserhöhen am einfachsten durch Aufstellung des Messknechts als Niveau und Anvisiren der einmal auf die Sohle und einmal auf den Wasserspiegel aufgestellten Ziellatte (s. Kap. 9), und setze die gefundenen Werthe in die dem Falle entsprechende Formel.

§. 398. Beispiele von Wassermessungen nach der zweiten Methode.

1. Beispiel. Um die Zuflussmenge eines Baches zu messen, ward ein Brett senkrecht eingeschützt, welches nahe am Boden eine Oeffnung von $1\frac{1}{2}$ Fuss Höhe (a) und $2\frac{1}{2}$ Fuss Breite (b) liess. Der Spiegel des Oberwassers stellte sich nach und nach auf eine constante Höhe und der als Nivellirwage aufgestellte Knecht (s. Kap. 9) gab beim Aufstellen der Ziellatte auf der Sohle B der Oeffnung die Lattenhöhe 8 Fuss 3 Zoll und beim Aufstellen der Latte auf den Spiegel des O Oberwassers 2 Fuss 3 Zoll. Wenn nun ferner das Unterwasser so schnell verläuft, dass der Ausfluss als in die freie Luft stattfindend anzunehmen ist, wieviel Kubikfuss Wasser führte hiernach der Bach pro Sekunde zu, Alles als preussisches Maass angenommen?

Formel: $Q = 0{,}62\, ab \sqrt{2g\left(H - \frac{a}{2}\right)}$.

Es ist aber $a = 1{,}5'$; also $\frac{a}{2} = 0{,}75'$; $b = 2{,}5'$; $g = 31\frac{1}{4}'$; (s. S. 547); und $H = 8'3'' - 2'3'' = 6'$, also $H - \frac{a}{2} = 5{,}25$, mithin

$Q = 0{,}62 \,.\, 1{,}5 \,.\, 2{,}5 \sqrt{62{,}5 \,.\, 5{,}25} = 2{,}32 \sqrt{328{,}1} = 2{,}32 \times 18{,}1 = 42$ Kubikfuss pro Sekunde.

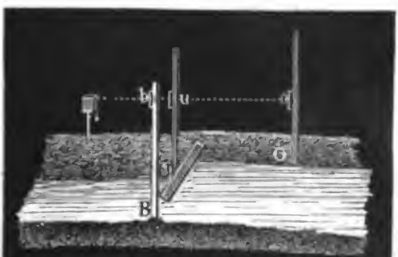
2. **Beispiel.** Das eingelegte Schutzbrett des vorigen Beispiels war im halbrechten Winkel geneigt; die Beobachtung aber geschah in Oesterreich und ergab dieselben Zahlen. Wieviel österreichische Kubikfuss liefert also sekundlich dies Wasser?

Formel: $Q = 0{,}80\; ab \sqrt{2g\left(H - \frac{a}{2}\right)}$,

wo wiederum $a = 1\frac{1}{2}$; $b = 2\frac{1}{2}$; $H = 6$; $H - \frac{a}{2} = 5\frac{1}{4}$, dagegen $g = 31$ zu setzen (s. S. 547), so dass $Q = 0{,}8 \,.\, \frac{3}{2} \,.\, \frac{5}{2} \sqrt{62 \,.\, 5\frac{1}{4}} = 3 \sqrt{325{,}5} = 3 \times 18 = 54$ Kubikfuss.

3. **Beispiel.** Die Messung geschah in Sachsen. Das Schutzbrett war senkrecht eingespannt (also nicht wie Fig. 384) und liess über seiner Schwelle oder Sohle eine 6 Zoll hohe und 3 Fuss breite Oeffnung. Nachdem das Wasser sich soweit angestaut, dass es nicht weiter stieg, ergab der am Ufer als Nivellirer aufgestellte Messknecht die Zielhöhe u der auf den Unterspiegel U aufgesetzten Latte = 8 Fuss, die Zielhöhe b (von der Sohle B der Oeffnung an) = 10

Fig. 384.

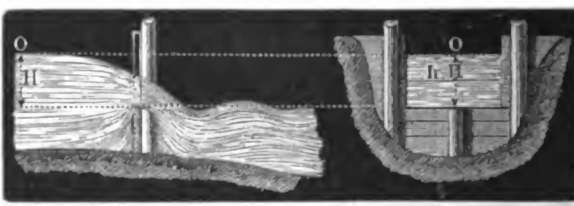


Fuss und die O (vom Oberspiegel an) = 5 Fuss. Dabei war die Schutzöffnung vollständig untergetaucht. Wie gross hiernach der Wasserzufluss?

Nach S. 547 ist theoretischer $= a\,b \sqrt{2\,g\,(H-h)}$, der Contractionscoëfficient aber in diesem Falle (bei senkrechtem Schutzbrett), nach a S. 548 = 0,62; folglich $Q = 0{,}62\,a\,b\,\sqrt{2\,g\,(H-h)}$, und es ist hierbei $a = 6$ Zoll $= \frac{1}{2}'$; $b = 3'$; $g = 34{,}63$ (wie S. 547 sagt); endlich H, die Höhe des Oberwassers über der Oeffnungssohle, = Zielhöhe b — Zielhöhe o = 10 — 5 = 5 Fuss; und h, die Höhe des Unterwassers über der Oeffnungssohle, = Zielhöhe b — Zielhöhe u = 10 — 8 = 2 Fuss, so dass man in Zahlen hat: $Q = 0{,}62 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 3 \sqrt{69{,}26\;(5-2)} =$ $0{,}93 \sqrt{207{,}78} = 0{,}93 \times 14{,}4 = 13{,}4$ Kubikfuss Wasserzufluss.

4. Beispiel. Das Querprofil und der ganze Lauf eines Baches in Baiern war so unregelmässig, dass die S. 545 angeführte Messungsmethode unstatthaft erschien. Es ward deshalb ein Schutzbrett mit Ueberfallöffnung von 4 Fuss Breite und $2\frac{1}{2}$ Fuss Tiefe nach Fig. 385 angesetzt. Der als Nivellirer am Ufer aufgestellte

Fig. 385.



Messknecht beobachtete beim Aufstellen der Ziellatte auf der Sohle S des Einschnitts 5 Fuss Lattenhöhe, und beim Aufstellen der Latte auf dem Wasserspiegel, dort, wo derselbe noch keine Senkung erlitten hatte, etwa in O die Zielhöhe 3 Fuss. Welches Quantum pro Sekunde an Zufluss?

Für Ueberfälle dieser Art giebt S. 549 die Formel:

$$Q = 0{,}40\ b\ \sqrt{2\,gH};$$

und es ist $b = 4$ Fuss; g in baierischen Zahlen, nach S. 547, 33,65 und $H = 5 - 3 = 2$ Fuss; also $Q = 0{,}4 \times 4\ \sqrt{67{,}3 \times 2} = 1{,}6\ \sqrt{134{,}6} = 1{,}6 \times 11{,}6 = 18\tfrac{1}{2}$ Kubikfuss.

§. 399. **Messung einer Wasserkraft.** (Begriff.)

Gesetzt, das Gerinne lieferte einem Wasserrade pro Sekunde und in preussischen Maassen 100 Kubikfuss Wasser, und die Höhe des Oberwasser- über dem Unterwasser-Spiegel, Fig. 386, wäre $H = 12$ Fuss (d. h. das lebendige Gefälle ist $= 12$ Fuss, s. S. 537), so fallen also jede Sekunde an der einen Seite des Rades 100 Kubikfuss Wasser 12 Fuss tief, oder 6600 Pfund 12 Fuss tief. Wenn kein Wasserverlust stattfände und die Wellenzapfen durch ihre Reibung keine Kraft absorbirten, müsste sonach das Rad auf der anderen Seite in jeder Sekunde auch 6600 Pfund 12 Fuss hoch fördern, d. h. eine mechanische Arbeit (s. S. 510) von 79200 Fusspfund verrichten können. Nun ist aber 510 Fusspfund mechanische Arbeit pro Sekunde gleich einer Pferdekraft (in preussischen Zahlen, s. S. 513), folglich die rohe Kraft dieses Wassers in Pferden ausgedrückt $= \frac{79200}{510} = 155$ Pferdekräften.

Fig. 386.



Und angenommen, die Kraftmaschine wäre eine Turbine (horizontales Wasserrad) mit 75 Proc. Nutzeffekt, so wäre die effektive Kraft dieses Wasserwerkes $= 155 \times 0{,}75 = 116$ Pferden.

§. 400. **Messung einer Wasserkraft.** (Verfahren.)

Aus dem eben Dargestellten bildet sich nun Jeder gewiss leicht selbst die

praktische Regel zur Bestimmung einer rohen Wasserkraft:

a. **Ermittele** (nach §. 396 oder §. 397) **das Quantum des Aufschlagewassers pro Sekunde.**

b. Desgleichen durch Nivelliren (nach S. 171) das zum Betriebe benutzbare totale Gefälle des Baches, und daraus **das lebendige** (durch Abzug des für das Gerinne des Ober- und Untergrabens nöthigen Gefälles).

c. Multiplicire das Aufschlagsquantum (q) mit der Wasserdichtigkeit (δ) (Gewicht von 1 Kubikfuss Wasser, siehe Mittelfeld) und dem **lebendigen** Gefälle (l) und dividire dies Produkt durch die Grösse einer Pferdekraft (p) $\left(\text{in Buchstaben } K = \frac{q \,.\, \delta \,.\, l}{p}\right)$.

Beispiel. Bei einer Mühle in Sachsen ergab das Nivellement des Ober- und Unterwasserspiegels ein lebendiges Gefälle von 20 Fuss und die Beobachtung im Obergraben einen Wasserzufluss von 10 Kubikfuss pro Sekunde. Wie gross die rohe Kraft dieser Mühle?

Nach S. 466 und 513 wird

$$K = \frac{10 \,.\, 48{,}5 \,.\, 20}{550} = \frac{194}{11} = 17\,\frac{7}{11} \text{ Pferde.}$$

§. 401. **Specialregel zur Berechnung der Wasserkraft.**

Da die Werthe d und p für irgend ein Maasssystem constant bleiben, so kann sich Jeder durch Einsetzung dieser Werthe für sein Maass die Formel ganz einfach machen, z. B.:

a. Für Oesterreich: $K = \frac{q \,.\, 56{,}3 \,.\, l}{424} = 0{,}133\; q \,.\, l$

$= \frac{2\,q\,l}{15}$ Pferde; d. h. multiplicire den doppelten Wasserzufluss mit dem lebendigen Gefälle und dividire mit 15.

b. Für Preussen: $K = \frac{q \,.\, 66 \,.\, l}{510} = 0{,}13\; q\,l$ Pferde;

d. h. multiplicire das Product aus Wasserzufluss und Gefälle mit 13 Hundertel.

c. Für Sachsen: $K = \frac{q \cdot 48,5 \cdot l}{550} = 0,088\, q\, l$, beinahe $= \frac{1}{11}\, q\, l$, oder: dividire das (knappe) Produkt aus Wassermenge und Gefäll durch 11.

Beispiel. Die Weisseritz bei Tharand hat bei mittlerem Wasserstande mindestens 15 bis 16 Kubikfuss Zufluss; also für jeden Fuss lebendiges Gefälle eine rohe Kraft von $\frac{15 \text{ bis } 16}{11} = 1\frac{1}{2}$ Pferden.

§. 402. Schätzung der effektiven Kraft einer Radwelle.

Der Wirkungsgrad der Wasserräder ist verschieden, je nach dem mehr oder minder vollkommenen Zustande ihrer Construction und ihrer Pflege, namentlich der der Zapfen und ihrer Lager. Im Mittel hat man dafür folgende Werthe:

A. Oberschlägige Wasserräder			
hohe (über 30 Fuss hoch) . .	70 — 80	Proc.	Nutzeffekt
mittlere (20 — 30 Fuss hoch) .	60 — 70	»	»
kleine (8 — 20 Fuss hoch) . .	50 — 60	»	»
B. Mittelschlägige und rückenschlägige mit Leitschaufeln oder Ueberfallschützen . .	60 — 70	Proc.	Nutzeffekt
Kropfräder mit Spannschützen .	40 — 50	»	»
C. Unterschlägige.			
Poncelet'sche Druckräder (mit krummen Schaufeln) . . .	50 — 60	»	»
Kropfräder mit Spannschützen .	40 — 50	»	»
Gemeine	30 — 40	»	»
D. Horizontale Räder.			
Turbinen	70 — 80	»	»

Um also die effektive Kraft eines Wasserwerkes zu schätzen, beachte man folgende Regel:

Ermittle durch Messung oder Schätzung nach §. 400 die rohe Wasserkraft; schätze nach Maassgabe der vorfindlichen Einrichtung den Wirkungsgrad der Kraftmaschine

nach obigen Erfahrungszahlen und multiplicire ihn mit der rohen Kraft.

Beispiel. Eine Spinnerei hat ein grosses rückenschlägiges Rad in sehr guter Construction und Haltung; das Gefälle beträgt 20 Fuss. Das Obergerinne ist circa 6 Fuss breit und 3 Fuss tief und hat eine Geschwindigkeit von 2 Fuss. Man soll nach diesen Schätzungszahlen in sächsischen Maassen gleich im Kopfe die effektive Kraft dieses Werkes taxiren.

Man rechne: Wasserprofil $= 6 \times 3 = 18$ □Fuss; also Zufluss: $18 \times 2 = 36$ Kubikfuss (siehe §. 396); also rohe Kraft $\frac{36 \,.\, 20}{11} = \frac{720}{11} = 65$ Pferde (s. §. 401); den Wirkungsgrad zu 75 Proc. oder $^3/_4$ veranschlagt, macht, da $^1/_4$ circa $= 16$ Pferde giebt: 48 Pferdekraft.

Die **Messung** der effektiven Kraft der Arbeitswelle eines Wasserrades geschieht mittels eines Bremsdynamometers. (Siehe Seite 563.)

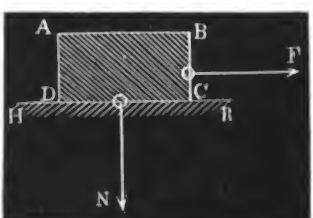
Einunddreissigstes Kapitel.

Reibungslehre.

1. Gleitende Reibung.

§. 403. Wäre *DB* ein 100 Pfund schwerer Klotz von Holz mit ebenen, aber nicht geglätteten Flächen, *HR* eine dergleichen horizontale Unterlage oder Bahn, so würde man zur Fortbewegung einer Last *DB*, welche eine Pressung, einen Normal-

Fig. 211.



druck N auf ihre Unterlage ausübt und auf letztere gleiten muss, eine Zugkraft F nöthig haben:

a. wenn die Fasern beider parallel sind (Symbol: ‖) 45 Pfund $= 0{,}45\,N$;

b. wenn die Fasern sich rechtwinklig kreuzen (Symbol: +) 35 Pfund $= 0{,}35\,N$;

c. wenn sich Hirnholz auf Langholz in der Richtung der Längsfasern des letzteren bewegt (Symbol: ⊥) 19 Pfund $= 0{,}19\,N$.

Die Mechanik drückt diese Thatsachen also aus:

Der Reibungskoëfficient von Eiche auf Eiche ist während der Bewegung 0,45 bei ‖ ; 0,35 bei + und 0,19 bei ⊥; und für diese drei Fälle die Grösse der Reibung (oder Friction) bei einem Drucke N:

$F\,(\parallel) = 0{,}45\,N;\; F\,(+) = 0{,}35\,N;\; F\,(\perp) = 0{,}19\,N.$

Der Reibungskoëfficient ist sonach ein ächter Bruch, welcher angiebt, den wievielten Theil der Pressung man für Ueberwindung des dadurch bewirkten Reibungswiderstandes an Kraft braucht; und deshalb ist auch

Reibungskoëffic. × Druck = Reibungswiderstand.

Beispiel. Der Reibungskoëfficient von Holz auf glatter Schneebahn ist $\frac{1}{40}$; daher auf horizontaler Bahn die zur Fortbewegung eines Schlittens nöthige Kraft gleich dem vierzigsten Theile der Schlittenlast. Oder da ein Pferd bei mittlerer Arbeitsgeschwindigkeit (Schritt; 4 Fuss per Sekunde) und täglicher Arbeitszeit von 8 bis 10 Stunden 120 Pfund Zugkraft ausüben kann, kann man ihm auf horizontaler guter Schlittenbahn $120 \times 40 = 4800$ Pfund oder 48 Centner Last in dem Schlitten aufbürden.

Setzen wir den Frictionskoëfficienten $= f$; und bezeichnet Q die Pressung und F die Reibungsgrösse, so ist also immer:

$$F = f\,Q;\ \text{mithin}\ Q = \frac{F}{f};\ f = \frac{F}{Q}.$$

§. 404. Die gleitende Reibung ist

1) am Anfange der Bewegung immer etwas, bei län-

gerer Ruhe oft bedeutend, grösser, sonst aber von der Geschwindigkeit ziemlich unabhängig.

2) Desgleichen unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche. (Ob der obige Eichenklotz auf der breiten oder schmalen Seitenfläche liegt und mit 4 Fuss oder 20 Fuss Geschwindigkeit fortgezogen würde, immer sind bei ‖ Bewegung 45 Pfund Zugkraft erforderlich.)

3) Wachsend im Verhältnisse der Pressung.

Auf erwähnten Eichenklotz noch 900 Pfund aufgeladen, giebt eine 10mal so grosse Pressung (1000 Pfund) und auch eine 10mal so grosse Reibung:

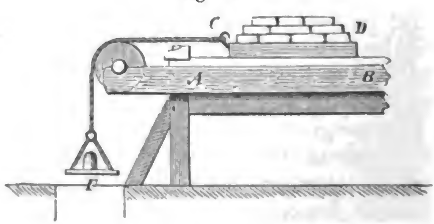
$45 \times 10 = 450$ Pfund oder $0{,}45\ Q = 0{,}45 \times 1000 = 45$ Pfund.

4) Sehr verschieden zwischen verschiedenen Körpern.

5) Bei denselben Körpern sehr abhängig von dem Zustande ihrer Oberflächen, und ob diese trocken oder wasserfeucht oder fettfeucht (geschmiert) sind.

Der Apparat Fig. 387 veranschaulicht, wie man durch Versuche zu diesen Erfahrungssätzen gelangen konnte.

Fig. 387.



§. 405. Die Tafel der **„Reibungs-Procente"**,

die das obere Mittelfeld des Messknechtes enthält, wird durch die beiden vorstehenden Paragraphen ihrem Wesen und ihrer Anwendung nach, wenigstens in Bezug auf die »gleitende Reibung« erklärt. Wir lesen z.B. in ihr: Wenn man Holz auf hölzerner Unterlage fortschleifen muss und die Fasern beider reibenden Flächen parallel und trocken sind, so ist im Anfange der Bewegung die Reibung 55 Hundertel, in der Bewegung nur 45 Hundertel (der Pressung auf die Unterlage); während, wenn die Längsfasern der einen

Fläche die der anderen überkreuzen, der Reibungscoëfficient der Ruhe zwar ebenfalls 55, der Bewegung dagegen nur 35; und wenn die eine Reibungsfläche Hirnholz ist, die letztere gar nur 19 Hundertel beträgt. Schmiert man die Flächen mit trockner Seife, so hat man, wenn die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper geschieht, während der Bewegung nur 16 Procent des Druckes, zu Anfang derselben aber 45 Procent zu überwinden. Benetzung der Flächen mit Wasser macht dagegen die Reibung der Ruhe zu 71, und die der Bewegung zu 25 Proc., ziemlich ohne Unterschied, ob die Fasern || oder + gehen.

Alles das sagen uns die ersten drei kleinen Zeilen durch ihre leicht verständliche Symbolik. Und es wird nun Jeder leicht im Stande sein, sich in gleicher Weise die anderen Zeilen jenes Tabellchens, wenigstens bis zum Abschnitte »Zapfenreibung« zu übersetzen.

(Der wichtige Reibungskoëfficient für die Hanftaue scheint der Tabelle abzugehen; derselbe ist aber mit dem der Gurte ziemlich gleich.)

1. Beispiel. Ein auf hölzernem Kufen stehendes Wasserreservoir enthält 30 sächsische Kubikfuss Wasser. Wieviel Kraft gehört dazu, dasselbe auf harter Chaussee oder Pflaster-Strasse fortzuziehen?

   Man kann hier nehmen Holz auf rauhem Stein: a. 65, b. 40. Zwar gilt dies laut Tabelle nur für Hirnholz, indess gross kann der Unterschied nicht sein. Sonach, da 30 Kubikfuss laut n-Tabelle $=$ 1362 Pfd. Zollgewicht, folgt: im Anfange $= 1362 \times 0{,}65 = 885$ Pfund; während der Bewegung $= 1362 \times 0{,}4 = 535$ Pfund.

2. Beispiel. Ein unter Wasser befindlicher Schutz von Eichenholz hat in preussischem Maasse 12 □Fuss Fläche; das Wasser steht 6 Fuss über seinem Mittelpunkte, so dass, nach Sätzen der Hydrostatik (S. 500), die Pressung auf ihn $= 12 \times 6 \times$ Wasserdichtigkeit $= 12 \,.\, 6 \,.\, 66 = 4752$ Pfund. Welche Kraft zum Aufzuge ist nöthig a. beim Anfange, b. während des Aufziehens? Für ersteren Fall ist (Eiche auf Eiche nass) $f = 0{,}71$,

für letzteren 0,25, also im Anfang die nöthige Zugkraft 4752 × 0,71 = 3374 Pfund,
und dann 4752 × 0,25 = 1188 Pfund.

2. Zapfenreibung.

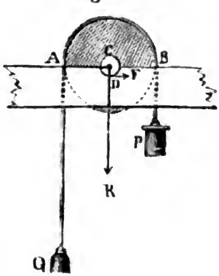
§. 406. **Die Reibung von Zapfen, die sich in Lagern bewegen** (so z. B. auch die Reibung der Wagenachsen in den Naben), ist eine eigenthümliche Art von gleitender Reibung und aus leicht erklärlichen Ursachen bedeutend kleiner als die gemeine gleitende Reibung.

Unter der Aufschrift »Zapfenreibung« sagt uns die Reibungstabelle des Knechtes in selbstverständlicher Weise: Wenn ein eiserner Zapfen, z. B. eines Mühlrades, in eisernen (gusseisernen) Lagern geht, so beträgt der Reibungswiderstand am Zapfenumfange 14 Hundertel des Zapfendruckes, wenn der Zapfen nur schlechtweg fettig gehalten wird; dagegen nur 7 — 8 Hundertel des Zapfendruckes bei gewöhnlicher guter Schmierung; sowie: dass hinzutretendes Wasser keinen nachtheiligen Einfluss hat. (Schmierung und nass = 8.)

Am Ende dieses Satzes zeigt sie uns aber, dass bei ganz sorgfältiger oder **fortwährender** Schmierung, dieser Reibungswiderstand bis auf $4\frac{1}{2}$ Procent des Druckes verringert werden kann, und dabei das Metall, ob Eisen oder Bronze, gleichgültig ist.

1. **Beispiel.** Ein Zapfen *C* habe knapp 4 Zoll Durchmesser oder 1 Fuss Umfang, und einen Druck von 1000 Pfd. auszuhalten. Wie gross ist bei bronzenem Lager der Reibungswiderstand am Umfange 1) beim blossen Fettighalten, 2) bei fortwährender Schmierung?

Fig. 388.



Ad 1. = 1000 × 0,16 = 160 Pfund.

Ad 2. = 1000 × 0,05 = 50 Pfund.

2. **Beispiel.** Wie gross ist die **mechanische Arbeit**, die nach den Zahlen des vorigen Beispiels zur Ueberwindung der Zapfenreibung nöthig ist, oder wieviel der Leistung des Rades geht durch letztere verloren, wenn dasselbe in der Minute 40 Umdrehungen macht?

Der Zapfen macht in 60 Sekunden 40 Umdrehungen, also in 1 Sekunde $^2/_3$ Umdrehung; sein Umfang, = 1 Fuss, legt also pro Sekunde $^2/_3 \times 1$ Fuss = $^2/_3$ Fuss Weg zurück. An seinem Umfange wirkt fortwährend im ersteren Falle ein Widerstand von 160 Pfund. Er hat also gleichsam pro Sekunde einen Widerstand, eine Last von 160 Pfund $^2/_3$ Fuss weit zu bewegen, was gleichkommt einer Arbeit von 160 Pfund $\times$ $^2/_3$ Fuss = 107 Fusspfund oder circa $^1/_5$ Pferdekraft. Bei vollständig immerwährender Schmierung ist dieser Arbeitsverlust nur $^1/_8$ des eben Berechneten.

3. **Beispiel.** Die horizontalen Wellzapfen einer Maschine sind von Gusseisen und 2 Zoll stark ($2 \times 3^1/_7 = 6^2/_7$" Umfang); ihr Druck auf die bronzenen Lager = 1000 Pfd.; die Zahl ihrer Umdrehungen pro Minute 100; also pro Sekunde $\frac{100}{60} = {}^5/_3$. Wieviel mechanische Arbeit verzehrt an dieser Maschine die Zapfenreibung wenn

a. der Zapfen in vorzüglicher Schmiere, und

b. wenn er wenig fettig erhalten wird?

Im letzteren Falle ist der Widerstand am Zapfenumfang = 0,20 $\times$ 1000 = 200 Pfund; sein Weg pro Sekunde = $6^2/_7 \times {}^5/_3$ = 10,5 Zoll = 0,88 Fuss; also die Arbeit, die er verzehrt, 200 $\times$ 0,88 = 176 Fusspfund pro Sekunde oder $^1/_3$ Pferdekraft; während bei voller Schmiere der Koëfficient und also auch die verzehrte Kraft das Viertel der vorigen beträgt.

§. 407. Der Gang der vorstehenden Berechnungen lehrt gleichzeitig, dass die **Zapfenreibung abnimmt** a) im Verhältniss des Reibungskoëfficienten und b) im Verhältniss der **Zapfendicke**; und dass, wenn *d* die Zapfendicke

in Metern (oder Fussen), u die Zahl der Umdrehungen per Minute, P die Zapfenpressung in Kilogrammen (oder Pfunden) und f den Reibungskoëfficienten (als Decimalbruch) bedeutet, die von der Zapfenreibung verzehrte Kraftleistung L sich findet durch die Formel:

$$L = \frac{22}{7}\, d \times \frac{u}{60} \times P \times f = \text{Kilogrmtr. (oder Fusspfund)},$$

$$\text{woraus } L = \frac{d\,u\,P\,f}{19}.$$

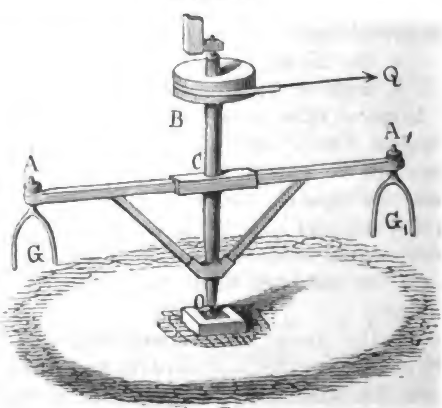
Z. B. Nach dem 3. Beispiele des vorigen Paragraphen ist $d = 2$ Zoll $= \frac{1}{6}$ Fuss; $u = 100$; $f = 20$ Hundertel; $P = 1000$; also

$$L = \frac{\frac{1}{6}\ .\ 100\ .\ 1000\ .\ 0{,}20}{19} = 176 \text{ Fusspfund.}$$

§. 408. Die Reibungsgrösse **stehender** Zapfen ist nach den Koëfficienten der gleitenden Reibung zu bemessen, und wird hinlänglich genau gefunden, wenn man ihren Hebelarm, an dem man sie sich wirkend vorstellt, $= \frac{2}{3}$ des Zapfenradius ($= \frac{1}{3}$ der Zapfenstärke) nimmt.

Zum Beispiel. Der Stift des senkrechten Wellbaumes eines preuss. Pferdegöpels sei 2 Zoll stark; der Druck auf

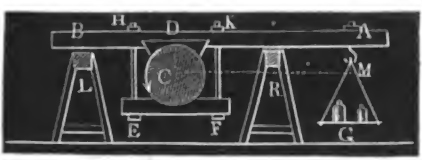
Fig. 389.



seine Pfanne oder des Göpels Gewicht = 3000 Pfd; seine Umdrehungsgeschwindigkeit: 2 Umgänge pro Minute oder $\frac{1}{30}$ Umgang pro Sekunde. Der Frictionskoëfficient ist hier etwa = 0,15 zu setzen; also die Grösse der Reibung = 3000 × 0,15 = 450 Pfund, ein Widerstand, wirkend am Hebelarm $\frac{2}{3}$ Zoll, also bei jeder Umdrehung einen Weg machend von circa $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} = 4$ Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuss; also Weg pro Sekunde $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{90}$ Fuss, also mechanische Arbeit = 450 Pfund × $\frac{1}{90}$ Fuss = 5 Fusspfund, welche dieser Widerstand pro Sekunde absorbirt. In Pferden ausgedrückt, wäre sonach die Grösse dieser Zapfenreibung = $\frac{5}{510}$ oder nahe 0,01 Pferdekraft; während bei doppelt so dickem Zapfen auch das Doppelte an Kraft, nämlich $\frac{1}{50}$ Pferdekraft, verloren ginge.

§. 409. Die Leistungsgrösse einer Arbeitswelle, die derselben nach Abzug der Zapfenreibung noch übrig bleibt (die effektive Kraft der Welle), misst und berechnet man ebenfalls nach S. 561, indem man ihre ganze Arbeitskraft dazu verwendet, einen künstlich erzeugten messbaren Reibungswiderstand zu überwinden. Fig. 390

Fig. 390.



zeigt die am häufigsten angewendete (Prony'sche) Construction des hierzu nöthigen Bremsdynamometers. Wenn die von aller Arbeit befreite Welle C (z. B. eines Wasserrades) mittels der Schrauben H und K so gebremst wird, dass die Reibung zwischen ihr und den Bremsbacken D und EF stark genug wird, den Hebel DA mit dem Regulirungsgewichte G in der Schwebe zu erhalten, d. h. sein fortwährendes Niedersinken durch fortwährendes Emporheben auszugleichen, so muss dabei die Welle ganz

die gleiche Anstrengung empfinden, als wenn sie mit einem Seilrade vom Halbmesser CM umgeben wäre und in M eine Last G emporförderte. (Die Böcke L und R sichern zugleich gegen das Niederfallen wie gegen das Fortführen des Hebels.) Sind nun Bremsung und Belastung im Gleichgewichte und beide der Art, dass, während, das Dynamometer in der Schwebe bleibt, die Welle eine geforderte Geschwindigkeit von u Umdrehungen pro Minute annimmt, und ist die Hebellänge $CM = l$, so ist die Geschwindigkeit der Last G pro Sekunde = Umkreis von $CM \times \frac{u}{60} = \frac{\frac{22}{7} . 2\, l . u}{60} = \frac{\frac{22}{7}\, l\, u}{30}$, also die gefragte Arbeit oder Wellenleistung $= \frac{22\, lu}{7 . 30}\, G$ $= 0{,}105\; u\, l\, G$.

Zusatz. Genauer genommen, ist unter G nicht allein das aufgelegte Gewicht, sondern auch noch das auf den Punkt A reducirte Uebergewicht des Hebels BA sammt Wagschale zu verstehen. Wenn man diesen Hebel mit D auf eine Schneide legt und A an eine Federwage hängt, so zeigt letztere dies Uebergewicht.

Beispiel. Um die effektive Leistung eines Wasserrades bei einer vorschriftsmässigen Umdrehungszahl 5 pro Minute zu messen, ward das Bremsdynamometer umgelegt, das bei einem Hebelarme $l = 3$ Meter eine Belastung von $G = 300$ Kilogramm und dem gemässe Bremsung verlangte, ehe das Rad die verlangte Geschwindigkeit annahm. Wie gross ist hiernach die Leistung desselben?

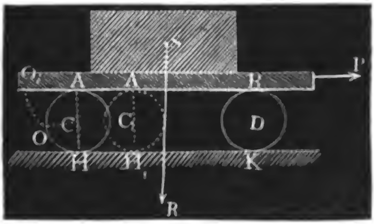
Sekundliche Leistung $= 0{,}105 \times 5 \times 3$ Meter $\times$ 300 Kilogramm = 472,5 Kilogrammmeter $= \frac{472{,}5}{75} = 6{,}3$ Pferdekraft.

3. Rollende Reibung. Fuhrwerks-Widerstand.

§. 410. Die gewöhnlich durch walzenförmige Körper vermittelte rollende oder walzende Reibung ist bedeutend geringer als jede Art der gleitenden. Sie ist zwischen har-

ten und glatten Körpern so klein, dass sie da oft ausser Berechnung bleiben kann. Uebrigens wächst auch sie pro-

Fig. 391.



portional mit dem Drucke, nimmt aber ebenso ab, wie die Durchmesser der Rollen oder Walzen zunehmen.

Bei den Fuhrwerken ist Zapfenreibung (an den Achsen) und rollende Reibung (am Radkranze) gleichzeitig vorhanden. Welchen Einfluss die erstere hat, geht z. B. daraus hervor, dass ein gut geschmierter Wagen auf demselben Wege sich bedeutend leichter fährt als ein ungeschmierter. Ihr Widerstand nimmt laut §. 407 im Verhältniss der Achsenstärke ab. Doppelt so dicke Achsen haben doppelt so grosse Achsenreibung zur Folge. — Den Einfluss der Reibung am Radkranze kann man sich verdeutlichen, wenn man bedenkt, dass derselbe Wagen, der auf guter Chaussee $1/_{30}$ seines Gewichts Widerstand leistet, also bei 30 Centner Last 1 Centner Zugkraft erfordert, auf der Eisenbahn etwa $1/_{300}$, also 10mal weniger Widerstand ausübt, und sonach nur $1/_{10}$ Centner Zugkraft erheischt.

Bei gut geschmiertem Zustande der Achsen ist die zur Ueberwindung der Achsenreibung nöthige mechanische Arbeit im Verhältniss zu der durch den Widerstand am Radkranze erforderlichen sehr unbedeutend und oft ausser Acht zu lassen.

Ist f der Widerstandskoëfficient, P die Kraft, Q die Last, so hat man wieder $P = fQ$ oder $Q = \frac{P}{f} = \frac{1}{f} P$.

§. 411. Bezeichnet w_1 den Widerstand eines Wagens,

dessen Achsendurchmesser d_1, Raddurchmesser D_1 ist, w_2 den eines anderen von d_2 Achsenstärke und D_2 Radhöhe; w den eines dritten, welcher die Achsenstärke des ersten (d_1) und die Radhöhe des zweiten (D_2) besitzt, so hat man vorigem Paragraph gemäss die Proportionen:

$$\left.\begin{array}{lrcl} & w_1 : w & = & D_2 : D_1 \\ \text{und} & w : w_2 & = & d_1 : d_2 \\ \hline \text{daraus} & w_1 : w_2 & = & D_2 \,.\, d_1 : D_1 \,.\, d_2, \end{array}\right\}$$

(die Widerstände sind umgekehrt proportionirt den Radhöhen und gerade proportionirt den Achsenstärken),

und wenn man das letztere Verhältniss durch $D_1\ D_2$ dividirt $w_1 : w_2 = \frac{d_1}{D_1} : \frac{d_2}{D_2}$, d. h. es sind (bei gleichem Koëfficient der Achsenreibung) die Widerstände der Wagen proportionirt dem Verhältnisse der Achsenstärke zur Radhöhe.

1. Beispiel. Ein Wagen hat 2 Zoll starke Achsen und 4 Fuss hohe Räder; ein anderer 3 Zoll starke Achsen und 5 Fuss hohe Räder; wie fahren sich beide im Verhältnisse zu einander?

Ihre Widerstände sind wie $\frac{2}{4\,.\,12} : \frac{3}{5\,.\,12}$ oder wie $^2/_4$ zu $^3/_5$ oder wie 0,5 zu 0,6 oder wie 5 zu 6 oder wie 1 zu 1,2 oder wie 100 zu 120; der letztere geht also 20 Procent schlechter als der erstere.

2. Beispiel. Bei einem Wagen mit kleinen Rädern und eisernen Achsen war die Radhöhe 20mal so gross als die Achsenstärke; bei einem anderen mit hölzernen Achsen und grösseren Rädern fand dasselbe Verhältniss statt. Bei beiden ist also $\frac{d}{D} = {}^1/_{20}$ und daher arbeiten beide mit gleichem Widerstande, wenn der Koëfficient der Achsenreibung durch gute Schmierung in beiden Fällen auf dieselbe Grösse (laut Reibungstafel des Knechtes auf 7 Hundertel) gebracht wird.

3. Beispiel. Die Achsenstärke der Fuhrwerke, durch die relative Festigkeit des Materials bedingt, hat ihre ziemlich bestimmte Grösse, und beträgt beim Fracht-

fuhrwerke mit eisernen Achsen im Mittel 7 Centimeter ($2\frac{1}{2}$ preuss. Zoll), und dabei die Radhöhe 1,2 bis 1,4 Meter. Die in Holland gebräuchlichen (zweiräderigen) Karren haben nicht selten eine Radhöhe von 2 Metern. In welchem Verhältnisse fahren diese sich leichter, als solche von 1,3 Meter Höhe, bei gleicher Achsenstärke?

Auflösung. Den Widerstand der letzteren = 100 und den der fraglichen = x gesetzt, hat man:
100 : x wie umgekehrt die Radhöhen, d. h. wie 2,0 : 1,3, woraus $x = \frac{1,3 \times 100}{2,0} = 65$; der Widerstand des hochrädrigen Karrens ist also nur 65 Procent von dem des anderen.

§. 412. Um die auf Strassenförderung bezüglichen Messungen und Berechnungen auszuführen, bedarf man der Kenntniss der entsprechenden Widerstandszahlen. Das Tabellchen der Reibungs-Procente auf der Messknechtsvorderseite giebt uns dieselben in ihren durchschnittlichen Grenzwerthen, für ein Mittelverhältniss der Achsen- und Raddurchmesser $\frac{d}{D} = \frac{1}{20}$ und für gute Schmierung.

Diesem nach ist
bei bester, ebener und glatter Chaussee:
der Widerstand = 2 Hundertel = $1/50$;
bei mittelmässiger, schon verfahrener, mit Gleisen und Koth:
der Widerstand = 5 Procent oder $1/20$;
bei sehr schlechter und zerfahrener, mit tiefen Gleisen und Koth:
der Widerstand = 8 Proc. oder $1/13 - 1/12$;
bei Wegen ohne Beschotterung (Erddamm) geht im besten (harten und glatten) Zustande der Widerstand bis auf 4 Proc. herab und steigt in schlechtem (kothigem und gleisigem) bis 12 Proc. Dass er im schlech-

testen Falle bis zur Unfahrbarkeit steigen kann, ist bekannt.

Die letztere Bemerkung gilt auch für den ungebahnten Schnee, der bei der gewöhnlich noch fahrbaren Beschaffenheit die Widerstandszahl 7 Hundertel hat, während dieselbe

auf Eisenbahnen (für die bestconstruirten Wagen) gar nur bis zu $\frac{1}{4}$ Procent = $\frac{1}{400}$ herunter gebracht werden kann.

§. 413. Fast in demselben Verhältnisse, als die Räder höher oder der Bruch $\frac{d}{D}$ kleiner wird, wird es auch der Widerstand.

Wenn $d = 2$ Zoll und $D = 5$ Fuss $= 60$ Zoll, also $\frac{d}{D} = \frac{1}{30}$, so findet sich für solch ein Fahrzeug der Widerstand x bei bester Chaussee durch die Proportionen $\frac{1}{20} : \frac{1}{30} = 2$ Procent : x Procent,

oder: $30 : 20 = 2 : x$, woraus $x = \frac{4}{3}$, oder da $\frac{4}{3}$ Hundertel $= \frac{4}{300} = \frac{1}{75}$.

Beispiel. Welche Last inclusive Wagen bringt ein Pferd bei der gewöhnlichen mittleren Zugkraft auf horizontalen Strecken bei verschiedener Beschaffenheit des Weges fort?

Laut Krafttabelle des Messknechts ist die mittlere Zugkraft $P = 60\ k$ (= 120 Zollpfund = 1,2 Centner) und es fördert dieselbe, da $Q = \frac{P}{f}$:

1) auf schlechtem Erddammwege ($f = 12$ Proc. $= \frac{1}{8}$ ca.) die Last $Q = 8 \cdot 1{,}20 = 9{,}6$ Zollcentner;
2) auf bestem Erddammwege ($f = 4$ Proc. $= \frac{1}{25}$) die Last $Q = 25 \times 1{,}2 = 30$ Zollcentner;
3) auf schlechtester Schotterstrasse ($f = 8$ Proc. $= \frac{1}{12}$) die Last $Q = 12 \times 1{,}2 = 14{,}4$ Zollcentner;

4) auf mittelmässiger Schotterstrasse ($f = \frac{1}{20}$)
die Last $Q = 20 \times 1{,}2 = 24$ Zollcentner;

5) auf bester Schotterstrasse ($f = \frac{1}{50}$)
die Last $Q = 50 \times 1{,}2 = 60$ Zollcentner;

6) auf Schlitten und glatter Schneebahn ($f = \frac{3}{100} = \frac{1}{33}$)
die Last $Q = 33 \times 1{,}2 = 40$ Zollcentner;

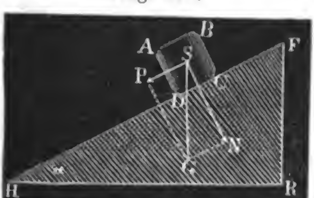
7) auf Eisenbahn mit bestem Fahrzeuge ($f = \frac{1}{400}$)
die Last $Q = 400 \times 1{,}2 = 480$ Zollcentner.

Obgleich man im praktischen Leben nach diesen Zahlen selten laden kann, weil aushaltend horizontale Strassen sich selten finden, und bei Steigungen sich der Widerstand ausserordentlich mehrt, so gewähren sie dessenungeachtet gar nützliche Winke für den Wegebau und die Strassenförderung. — Vollständig und praktisch werden sie aber erst durch die nachfolgenden Gesetze.

§. 414. Förderung auf schiefer Ebene ohne Rücksicht auf Reibung.

Wenn α den Neigungswinkel der Strasse oder Ebene, und die Linie SG die Grösse des vertikalabwärts wirkenden Gewichts G der Last bedeutet, so repräsentirt die Linie SN die Grösse des Normaldrucks N auf die Unterlage HF und SP die Grösse des Abwärtstriebes P. Bei der Aufwärtsförderung auf dieser Bahn ist also ausser dem Reibungswiderstand ($= fN$) auch noch dieser Abwärtstrieb zu überwinden. Aus dem mit HFR gleichwinklichen Dreiecke SGN oder SGP folgt aber leicht

Fig. 392.



a) die Grösse des Abwärtstriebes $= G \sin. \alpha =$ der sinuirten Last,

b) » » » Normaldrucks $= G \cos. \alpha =$ der cosinuirten Last.

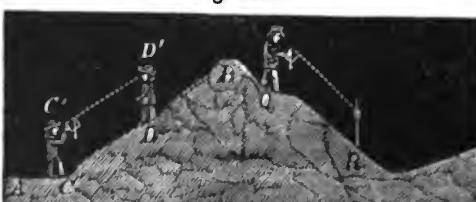
Die Abwärtstriebe auf verschieden geneigten Strassen verhalten sich also wie die Sinusse derselben.

Da bei Winkeln bis zu 10 Grad die Sinusse und Tangenten bis auf das Hunderttheilchen übereinstimmen und die Strassen selten diesen Winkel übersteigen, so kann man auch sagen: **Der Abwärtstrieb, der bei dem Fuhrwerke ausser der Reibung zu überwinden ist, steht im Verhältnisse der Tangenten der Neigungswinkel.**

Beispiel. Beim einfachen Visiren nach der Strassenneigung spielte in der einen Strecke das Pendel auf die Zahl 10 der Tangentenskala, in einer anderen auf die Zahl 15. Wie ist's auf beiden Strecken mit dem Abwärtstriebe beschaffen?

Derselbe verhält sich wie 10 zu 15 oder 2 zu 3 (oder 100 : 150), ist also im letzteren Falle 50 Procent grösser als im ersteren. Und da man mit den Zahlen 10 und 15 gleich die Tangenten, und hinläng-

Fig. 393.



lich genau, bei Winkeln von solcher Kleinheit auch die Sinusse damit gewonnen hat, so ist die wirkliche Grösse des Abwärtstriebes, wenn es z. B. einen $G = 50$ Centner schweren Wagen beträfe, $= 50 \times 10$ Hundertel $= 5$ Centner in dem einen, und $50 \times 0{,}15 = 7\frac{1}{2}$ Centner im anderen Falle.

Wirkt die Zugkraft der Pferde parallel mit der Strasse, so hätten dieselben also ausser dem auf der horizontalen, wo blos der Reibungswiderstand zu überwinden war, nöthigen Kraftaufwand (der bei bester Chaussee $= \frac{1}{50} \times 50$ Ctr.

= 1 Centner beträgt) annoch ein Mehr von 5 Centnern, also im Ganzen das Sechsfache an Zugkraft aufzuwenden, sobald der Messknecht das Steigungsprocent (die Steigungstangente) = 10 oder, wie die Winkelskala sogleich zeigt, den Steigungswinkel $5\frac{1}{2}$ Grad angiebt.

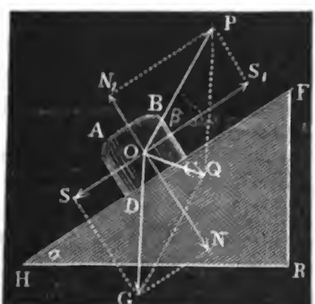
Streng genommen verringert sich aber auf der schiefen Ebene der Reibungswiderstand, weil auf der Horizontalen die Normalpressung = G, auf der schiefen α dagegen nur $G \cos. \alpha$ ist; im obigen Beispiele also statt 50 Ctr. nur 50 Ctr. $\times \cos. 5\frac{1}{2}^{0} = 50 \times 0{,}995 = 49{,}55$ Centner beträgt, was des Knechtes Pendel eben auch gleich beim Visiren mit angegeben hätte.

§. 415. Fortsetzung.

Wirkt die Zugkraft unter einem Winkel β ($= \angle POS_1$) aufwärts, so erhöht sich ihre Grösse zur Ueberwindung des blossen Abwärtstriebes auf $G \dfrac{\sin. \alpha}{\cos. \beta}$, während dabei der Normaldruck sich vermindert auf $G \dfrac{\cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta}$.

Und wenn sie horizontal zieht wie Q, muss sie sein $= G\ tg.\ \alpha =$ der tangentirten Last, während der Normaldruck sich auf $G\ sec.\ \alpha$ erhöht. Bei horizontaler Richtung des Zuges (die beim Fuhrwerke wohl als die gewöhnliche anzusehen) wächst also die zu Ueberwindung des Abwärtstriebes nöthige Zugkraft genau wie die Tangente der Steigung (Vgl. S. 570).

Fig. 394.



§. 416. Willst du also den durch eine Steigung erhöhten Widerstand des Fuhrwerks wissen, so visire mit dem Knechte die Neigung ein und

multiplicire die vom Pendel angezeigte Tangente mit der Schwere des Fuhrwerks.

1. Beispiel. Das Fuhrwerk wiegt 30 Centner; der Messknecht visirt die Tangente der Strassenneigung zu 5 Hundertel; also ist der durch die Steigung erzeugte Widerstand $= 30 \times 0{,}05 = 1{,}5$ Centner, der zu dem auf der Horizontalstrasse vorhandenen noch dazu kommt.

2. Beispiel. Es habe eine Bahn eine Steigung von 11 Grad und die Reibung eines auf ihr fortzubewegenden Körpers sei so gering, dass sie gleich Null zu achten, wie es z. B. beinahe der Fall ist, bei einem rollenden Fasse, oder bei einem gut geschmierten Wagen auf eisglatt gefrorener Chaussee. Wenn nun das Gewicht dieses Körpers $= 100$ (Pfund, Centner) gesetzt wird, wie gross ist a. der Normaldruck auf die Unterlage, und b. der Abwärtstrieb oder die zu seiner Aufhebung nöthige Kraft?

1. Der Normaldruck ist das cosinuirte Gewicht. Fragen wir den Knecht nach dem Cosinus von 11°, so sagt uns die *COS.*-Spalte 98 Hundertel; also ist $N = 100 \times 0{,}98 = 98$ (Pfund oder Centner). Der Abwärtstrieb ist das sinuirte Gewicht. Den Sinus von 11° giebt der Knecht zu 19 (Hundertel); also $A = 100 \times 0{,}19 = 19$ (Pfund oder Centner). Wenn also die Zugkraft P parallel zur Schiefe der Bahn wirkt, so ist ihre Grösse 19 Procent und der Normaldruck 98 Procent (der Last).

2. Wirkt die Zugkraft aber horizontal, dem Abtriebe also nicht gerade entgegengesetzt und darum weniger vortheilhaft, so muss sie etwas grösser sein, nämlich = der tangentirten Last $= G\ tg.\ \alpha$. Fragen wir den Knecht nach der Tangente von 11°, so antwortet uns die *TANG.*-Spalte mit $19\frac{1}{2}$; also die nöthige Zugkraft 19,5 Procent der Last, und der durch diese Richtung der Zugkraft vermehrte Normaldruck $N = \frac{100}{cos.\ 11^0} = \frac{100}{0{,}98} = 102$ Procent der Last.

3. Macht die Richtung der Zugkraft zur Bahn (z. B. die der Stränge zur Deichsel) einen Winkel von 10° aufwärts (β), so ist die nöthige Zugkraft

$$P = G \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \beta} = 100 \frac{sin.\ 11^0}{cos.\ 10^0} = 100 \frac{19,1}{98,5}$$

$$= \frac{1910}{98,5} = 19,4;$$ und der Normaldruck, der durch die aufwärts gerichtete Kraft natürlich etwas verringert ist,

$$N = G \frac{cos.\ (\alpha + \beta)}{cos.\ \beta} = 100 \frac{cos.\ 21}{cos.\ 10} = 100 \frac{93,4}{98,5} =$$

$$\frac{9340}{98,5} = 95.$$

Zusatz. Man sieht, die Differenzen in den Resultaten 1, 2 und 3 sind nicht erheblich, trotzdem, dass die Schiefe (11°) und die Zugrichtung (10°) so bedeutend angenommen wurden, wie sie bei der Strassenförderung äusserst selten vorkommen; daher man denn auch in gewöhnlichen Fällen der letzteren diese Verschiedenheiten vernachlässigen kann.

§. 417. Förderung auf schiefer Ebene mit Rücksicht auf Reibung.

Die Reibungsgrösse F ist immer gleich dem Normaldrucke, multiplicirt mit dem Reibungskoëfficienten f (s. S. 557). Auf der schiefen Ebene, wo ersterer $N = G\ cos.\ \alpha$, muss also sein $F = G\ cos.\ \alpha\ .\ f$; daher

1) das Streben zum Abwärtsgleiten (Abwärtstrieb minus Reibungsgrösse) oder die betreffende Verhinderungskraft

$$(1) \quad A = (sin.\ \alpha - f\ cos.\ \alpha)\ G;$$

2) die zur Aufwärtsbewegung nöthige Kraft

$$(2) \quad P = (sin.\ \alpha + f\ cos.\ \alpha)\ G,$$

welche beide Werthe, wie voriges Beispiel zeigte, sich um eine in Fällen der Strassenförderung zu vernachlässigende Kleinigkeit verändern, je nachdem die Zugkraft aufwärts oder horizontal, statt — wie hier angenommen —

parallel zur Bahn wirkt. Auch kann man für Winkel unter 10° setzen $sin.\ \alpha = tg.\ \alpha$ und $cos.\ \alpha = 1$, also $P = (f + tg.\ \alpha)\ G$.

Zusatz. Bei horizontaler Zugrichtung muss sein nach §. 415:

$P = G\ tg.\ \alpha + f\ .\ G\ .\ sec.\ \alpha = (tg.\ \alpha + f\ sec.\ \alpha)\ G$, wofür man, bei kleineren Winkeln $sec.\ \alpha = 1$ setzend, ebenfalls hat: $P = (f + tg.\ \alpha)\ G$.

§. 418. Wenn es heisst: eine Strasse steigt 1 auf 100, oder 1 auf 10, so ist zugleich damit auch die Tangente ihrer Schiefe ausgedrückt (s. S. 409), die also im ersteren Falle $1/_{100}$, im anderen $1/_{10}$ ist, letztere entspricht, wie die Tangentenskala des Knechtes zeigt, einer Schiefe von etwa $5^3/_4$ Graden, welche, leider selbst bei Chausseen, häufig vorkommt.

Man soll nun angeben, wieviel, gegenüber der Horizontalförderung eines Pferdes, an Kraft mehr gebraucht wird, wenn eine Eisenbahn ($f = 1/_{300}$) die Steigung $1/_{100}$, eine mittelgute Chaussee ($f = 1/_{30}$) die Steigung $1/_{10}$ annimmt?

1. Auflösung. Die Horizontalförderung eines Pferdes (von 120 Pfund = 1,2 Centner Zugkraft) auf Eisenbahn ist $= 1{,}2 \times 300 = 360$ Centner; die (horizontale oder auch parallele) Zugkraft, um bei der Steigung $1/_{100}$ ($= tg.\ \alpha$) den Abwärtstrieb dieser Last zu verhindern, noch $P = G\ tg.\ \alpha = 160\ .\ 1/_{100} = 3{,}6$ Centner oder das 3fache einer Pferdezugkraft von 1,2 Centner; so dass also bei dieser so geringen Steigung der 4fache Kraftaufwand nöthig wird.

Bei guter Chaussee mit dem Reibungscoëfficienten $1/_{30}$ beträgt dagegen die zu fördernde Last $= 1{,}2 \times 30 = 26$ Centr.; und daher die Vermehrung der nöthigen Zugkraft bei Steigung 1 auf $100 = 36$ Centr. $\times\ 1/_{100} = 0{,}36$ Centner $= 1/_3$ Pferd (pro Pferd);

bei Steigung 1 auf $10 = 36 \times 1/_{10} = 3{,}6$ Centner $= 3$ Pferde (pro Pferd).

2. Auflös. Kürzer nach Formel $P = (sin.\ \alpha + f cos.\ \alpha)\ G$;

und es ist hier für die Eisenbahn *sin.* α = *tg.* α = $1/_{100}$; *cos.* α (wie der Knecht deutlich zeigt, wenn man das Pendel auf die Tangente = $1/_{100}$ stellt) = 100 (Hundertel) oder 1 zu setzen, $f = 1/_{300}$; $G = 360$ und darum $P = (1/_{100} + 1/_{300})\ 360 = (3{,}6 + 1{,}2)$ Centner.

Und für die Chaussee = *tg.* $\alpha = 1/_{10} = 10/_{100}$, wozu der Knecht $\alpha = 5^3/_4{}^0$, und *cos.* $\alpha = 0{,}994$ oder *sin.* α $= 0{,}10$; $f = 1/_{30}$; $G = 36$ Centner; also $P = (0{,}10 + 1/_{30} \cdot 0{,}994)\ 36 = 3{,}6 + 1{,}2$ Centner = 3 Pferde + 1 Pferd.

§. 419. Die Tharand-Freiberger Chaussee hat im Zeisiggrunde auffallend grosse Steigung. Durch mehrmaliges Anvisiren der Augenhöhe einesdie Strasse daher kommenden Menschen ergab sich unzweifelhaft an der steilsten Stelle eine Schiefe zwischen $8^1/_4$ und $8^1/_2$ Grad, und indem man statt des Gradmaasses gleich die Tangente (15) ablas, eine Steigung von 0,15 oder 15 auf 100 oder $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$. Die Vermehrung des Widerstandes und also auch der benöthigten Zugkraft beträgt also $\frac{3}{20}$ der Ladung. Besteht diese nun wegen schlechter Beschaffenheit der ganzen Strasse auch nur in 20 Centner pro Pferd, so wäre die benöthigte Vorspannkraft immer $20 \times \frac{3}{20} = 3$ Centner oder fast 3 Pferde pro 1 Pferd oder in Summa 4 Pferde pro 20 Centner Last. Muthet man aber, wie es gestattet ist (S. 499), hier den Thieren die doppelte Anstrengung zu, so kommt man natürlich mit $\frac{4}{2} = 2$ Pferde, also mit einem Pferde Vorspann für jedes Pferd aus.

Ohne Vorspann aber würde man den Thieren bei 20 Centner Last pro Pferd das Vierfache ihrer mittleren Kraftanstrengung zumuthen müssen.

Wäre die Strasse sehr gut, ihr Reibungscoëfficient etwa $1/_{40}$, so würde bei voller Ladung für die Horizontale (pro Pferd $1{,}2 \times 40 = 48$ Centner) das Verhältniss sich noch viel ungünstiger gestalten, indem

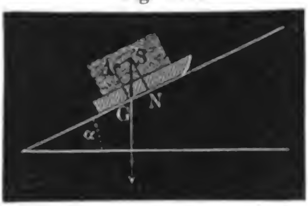
die Widerstandsvermehrung dann $= 48 \cdot \frac{3}{20} = 7{,}20$ Ctr., und also bei mittlerer Anstrengung von einem Centner Zugkraft pro Pferd auf eine 7fache Vorspannung, bei doppelter Anstrengung immerhin auf eine mindestens 3fache hinzeigen würde.

Je besser also die Strassen, desto nachtheiliger für den vortheilhaften Fuhrwerksbetrieb die Steilheit der Steigungen.

§. 420. Der Reibungswinkel.

Wenn der Abwärtstrieb $A = G \sin. \alpha$, der Reibungsgrösse $f \cdot N = f \times G \cos. \alpha$ gerade gleich ist, so muss bei dem geringsten Anstosse oder bei der geringsten Vergrösserung der Bahnschiefe α Bewegung erfolgen und der Körper dann von selbst abwärts gleiten. Die Schiefe α, bei welcher dieser Fall statt hat, heisst der Reibungs- oder Ruhewinkel und ist natürlich abhängig von dem Reibungskoëfficienten, und mit diesem wachsend und abnehmend.

Fig. 395.



Bezeichnen wir diesen Winkel durch φ (das griechische f, sprich fi), so hat man also die Gleichung

$$f \cdot G \cos. \varphi = G \sin. \varphi \text{ und daraus } f = tg. \varphi,$$

d. h. die Tangente des Reibungswinkels, oder des Winkels, bei welchem ein Körper von selbst herabzugleiten oder zu rollen beginnt, ist zugleich auch der Reibungskoëfficient.

Bringt man also ein Fuhrwerk auf einer geneigten Strasse an eine solche Stelle, dass es eben von selbst abwärts zu gehen strebt, aber noch mit der geringsten Kraft erhalten werden kann, und visirt mittels des Messknechts die Strassenneigung ein, so giebt das Pendel in der Tangentenskala sofort den Rei-

bungscoëffcienten in Procenten für diese Wege- und Wagenbauart an. Z. B. das Pendel spielt auf 5 Hun-

Fig. 396.



dertel ein, so ist der Reibungskoëfficient $= {}^5/_{100} = {}^1/_{20}$ und der Reibungswinkel, wie die *COS.*-Skala zeigt, fast 3 Grad.

§. 421. Absteckung der vortheilhaftesten Bergwege.

Der Widerstand auf horizontaler Bahn ist $= f \,.\, G$ (s. S. 565) und auf einer Bahn von der Schiefe α $= (f + tg.\,\alpha)\; G$; er wächst also in dem Verhältnisse f zu $f + tg.\,\alpha$; oder verhält sich wie der Reibungskoëfficient f allein zu seinem um die natürliche Tangente vermehrten Werthe.

Beispiel. Die Anfangsstrecke der Dresden-Radeberger Section der Schlesischen Eisenbahn hat die Steigung 1 auf 55 (oder knapp 1,8 Procent, oder wie das Pendel des Knechts, auf 1,8 der Tangentenskala gestellt, uns belehrt, 1 Grad Steigungswinkel); wie verhält sich die auf dieser Strecke nöthige Betriebskraft zu der auf der Horizontalen?

Der Reibungskoëfficient ist laut Messknechtstafel auf Eisenbahnen zwischen $^1/_3$ und $^1/_4$ Procent, oder zwischen 0,33 und 0,25 Procent. Nehmen wir bloss ersteren Werth, also $f = {}^1/_3$ Procent; die Tangente des Neigungswinkels ist = 1,8 Proc., also das fragliche Widerstandsverhältniss wie 0,33 zu 0,33 + 1,8 d i. 0,33 : 2,13, etwa wie 1 zu $6^1/_2$.

§. 422. In dem Falle aber, wo die Schiefe α dem Reibungswinkel φ gleich wird, also $tg.\;\alpha = tg.\;\varphi = f$, geht das Verhältniss

$f : f + tg. \alpha$ über in 1 : 2. Es ist also in diesem Falle der Widerstand oder die zu seiner Ueberwindung nöthige Zugkraft doppelt so gross.

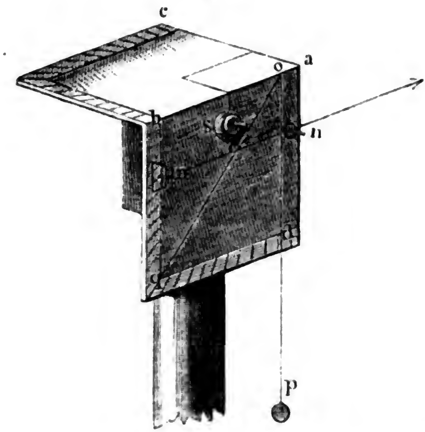
Nun hat aber die Erfahrung gelehrt, (vergl. Kap. 29) dass der Nutzeffekt der täglichen Leistung der Zugpferde erheblich verringert wird, sobald man ihnen Anstrengungen zumuthet, die das Doppelte ihrer mittleren Zugkraft überschreiten; dass man dies Doppelte ihnen aber zeitweise recht gut zumuthen kann, und dass daher bei Förderung von Lasten auf Höhen die tägliche Leistung ein Grösstes wird, und für gewöhnliche Ladung Vorspann nicht nöthig ist, sobald die Steigung des Weges jener Bedingung entspricht. Wie wir eben sahen, wird aber der Widerstand ein doppelter, sobald die horizontale Strasse in ihrem Reibungswinkel steigt, d. h. eine Schiefe annimmt, deren Tangente ihrem Reibungskoëfficienten gleich ist. Der letztere ist aber bei mittelmässiger Chaussee laut Messknechtstafel 5 Hundertel, bei bester 2 Hundertel, und also um so geringer, je besser die Strasse ist, woraus denn folgt, dass die Strassen in dem Maasse als sie glatter sind, auch weniger Steigung haben dürfen, und dass, wenn man ihnen das Steigungsprocent giebt, welches die Ziffern des Fuhrwerkswiderstandes auf der Messknechtstafel angeben, man noch mit voller Ladung ohne Vorspann weite Strecken fahren kann.

Stellt man also den Knecht so, dass der Pendelfaden in der Tangentenskala auf den nach Procenten ausgedrückten Reibungskoëfficienten einspielt, so zielt die Visirkante die zweckmässigste Strassensteigung ein.

1. Beispiel. Der Messknecht soll nach hochgelegenen Aussenfeldern einen zu beschotternden Wirthschaftsweg für die vortheilhafteste Pferdeleistung abstecken. Nach Maassgabe der Tabelle wird man das Reibungsprocent oder die Tangente des Reibungswinkels hier = 5 setzen müssen. Der Knecht wird demgemäss an

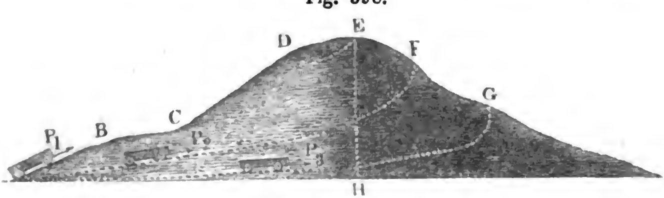
einen Stock geschraubt (S. 156) und so gestellt, dass das Pendel in der Tangentenspalte auf 5 oder auf knapp 3 Grad der Winkelspalte einspielt. Die Visirkante giebt dann die Steigung des nach S. 190 abzusteckenden Weges an.

Fig. 397.



2 Beispiel. Auf welchen Punkt der Winkelskala muss das Pendel einspielen, wenn man gleich vom Hofe aus einen Wirthschaftsweg der gewöhnlichsten Art ($f = {}^1/_{20}$)

Fig. 398.



so steil anlegen will, dass man das für Horizontalwege volle zweispännige Fuder mit 4 Pferden auf dem kürzesten Wege in die Höhe bringt?

Bei der erlaubten Annahme, dass jedes Pferd während der Steigung die doppelte Anstrengung ausüben soll, hat man eine 8pferdige Zugkraft; es kann also der 2pferdige Widerstand auf den 8pferdigen, d. i. auf das Vierfache steigen; folglich ist $(f) : (f + tg.\,\alpha) = 1 : 4$ oder $1 : (1 + 3)$, woraus dann sofort folgt, dass $tg.\,\alpha$ 3mal so gross als f, also $3 \times 5 = 15$ Hundertel sein muss. Der Tangente 15 Hundertel gehört aber, wie der Knecht zeigt, das Gradmaass knapp $8\frac{1}{2}$ Grad zu, auf welchen Punkt das Pendel also einspielen muss, wenn des Knechts Visirkante die Steigung des Weges angeben soll.

Zweiunddreissigstes Kapitel.

Festigkeitslehre.

---

§. 423. Für die Haus-, Brücken-, Berg-, Maschinen- und sonstige Bautechnik ist es ein Gegenstand von ganz erheblicher Bedeutung, dass die zum Tragen und Widerstehen dienenden Körper immer in einer solchen Stärke verwendet werden, welche einerseits vollkommene Sicherheit ein-, und andrerseits unnöthige Verschwendung ausschliesst. Um diesem technischen und ökonomischen Gesetze gemäss zu bauen, muss man von der Festigkeit der fraglichen Materialien die nöthigen Kenntnisse und Zahlen bei der Hand haben.

Die Festigkeit eines und desselben Stoffes ist aber eine andere, je nachdem dieselbe Widerstand zu leisten hat einer Kraft, die den Stoff a) zu zerreissen, oder b) zu zerbrechen, und c) zu zerdrücken oder d) zu zerdrehen strebt. Man hat sonach gleichsam 4 Arten von Widerstandsfähigkeit ins Auge zu fassen, die man übereingekommen ist, durch die Beiwörter a) absolute, b) relative,

c) rückwirkende oder respektive, und d) Drehungs- oder Torsions-Festigkeit zu bezeichnen.

Die rechte Hälfte des unteren Mittelfeldes der Vorderseite des Knechtes enthält die wichtigeren Moduls (Maasszahlen), welche in Bezug auf die Festigkeitstechnik maassgebend sind und deren Gebrauchserklärung der Zweck dieses Kapitels sein soll.

a. Absolute Festigkeit. Zerreissungsmodul.

§. 424. Wenn ein Holzstab von 1 □Millimeter*) Querschnitt zerrissen werden soll, gehört im grossen Durchschnitte eine Zugkraft von 9 Kilogramm dazu; Eisendraht von gleicher Querfläche (gleichviel ob ein oder mehre Drahtfäden dazu nöthig) verlangt dagegen zu seinem Zerreissen 62 Kilogramm Zugkraft oder trägt eine 7mal grössere angehängte Last. Das heisst: der absolute Festigkeitsmodul ist: für Holz 9 Kilogramm, für Eisendraht 62 Kilogramm.

Fig 399.



Es ist anzunehmen und stimmt auch mit der Erfahrung überein, dass die Gestalt des Querschnitts, wenn wir ganz ungewöhnliche Formen ausnehmen, keinen Einfluss auf die absolute Festigkeit hat, wohl aber, dass dieselbe im Verhältnisse seiner Grösse wächst. Wesen und Anwendung der in der zweiten Rubrik des genannten Messknechtsfeldes enthaltenen Maasszahlen (Moduls) ergeben sich hierdurch von selbst. Doch ist dabei noch Folgendes zu bemerken.

*) Die Grösse eines □Millimeters bringt der in der Mitte des Knechts befindliche Metermaassstab zur unmittelbaren Anschauung. Die kleinen Quadratchen der Untereintheilung sind □Millimeter. Die nachbarliche 0-Tabelle lehrt andrerseits, wieviele solcher □Millimeter auf 1 österreichischen, preussischen, baierischen etc. Quadratzoll gehen.

§. 425. Es ist auffallend, dass die verschiedenen Holzarten in der absoluten Festigkeit als gleich erscheinen. In der Wirklichkeit wird die Art des Holzes allerdings, noch mehr aber die Art des Wuchses, nicht ohne Einfluss, z. B. zwischen frech und porös gewachsener und unreifer Fichte gegenüber normal gewachsener ein grösserer Unterschied sein als zwischen Fichte und Eiche. Auch ist es von demselben Baume verschieden, je nachdem es vom Kern oder Splint, vom Aste oder Stamme geschnitten.

Alle diese Moduls sind daher, wie beim Holze so auch bei den übrigen Materialien, nur als grosse Durchschnittswerthe anzusehen. Dessenungeachtet haben sie einen ganz namhaften Gebrauchswerth. Sie gestatten erstens die allgemeine Festigkeits-Vergleichung der verschiedenen Stoffe, und zweitens bei Anwendung gehöriger Vorsicht die Beurtheilung der Tragkraft, die einer bestimmten Stärke, und die Berechnung der Dimensionen, die einer verlangten Tragkraft zukommen. Diese Vorsicht gebietet aber, zu bedenken, dass nicht selten im Holze, Metalle, Steine etc. schadhafte, unganze, morsche Stellen vorkommen; dass mit der Zeit durch Rost, Verwitterung etc. die Festigkeit sich verringert, und dass zum Aushalten etwaiger Stösse immer eine bei weitem grössere Tragfähigkeit vorhanden sein muss, als zum ruhigen Tragen nöthig ist; sowie auch, dass jede dem Tragvermögen nahekommende Belastung stets eine die Festigkeit nothwendig verringernde und auch sonst wohl noch bedenkliche Ausdehnung bewirken muss. In gehöriger verhältnissmässiger Würdigung dieser Momente nimmt man bei den Berechnungen von der Festigkeitszahl nur $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ dessen, was ihr Durchschnittswerth beträgt. Man sagt: es wird eine 3-, 6-, 10-, 20fache Sicherheit genommen.

§. 426. Nach der desfallsigen Notiz auf der Messknechtstafel nimmt man für die gewöhnliche Sicherheit bei Metallen, bei Drahtseilen z. B, $\frac{1}{6}$ des Moduls; statt 62 also nur 10 Kilogrm. Wäre aber das Seil ungewöhnlichen Stössen ausgesetzt, so würde man auch ungewöhnliche, vielleicht 10fache, Sicherheit annehmen müssen.

Für $n$fache Sicherheit, und wenn F die Querfläche, m den absoluten Festigkeitsmodul, P die entsprechende Last oder Kraft bedeutet, hat man $P = \frac{m}{n} F$.

1. **Beispiel.** In welchem Verhältnisse ist ein eisernes Drahtseil fester als ein hanfnes von gleicher Dicke?
Bei Seilen unter 1 Zoll Stärke in dem Verhältnisse
62 zu 6,5 oder fast wie 10 zu 1;
bei Seilen über 1 Zoll Stärke in dem Verhältnisse
62 zu 5,0 oder fast von 12 zu 1.

2. **Beispiel.** Welche Spannung vermag ein Treibriemen von 60 Millimeter Breite und 4 Millimeter Dicke eben noch auszuhalten?
Querschnitt = 240 □Millimeter; Modul 0,6 Kilogramm.
Widerstandsfähigkeit = 0,6 × 240 = 144 Kilogramm Spannung.

3. **Beispiel.** Wie stark müsste man ein Hanfseil machen, das mit der nöthigen Sicherheit einen Kübel von 200 Zollpfunden (= 100 Kilogramm) zu fördern hat?
Den Modul = 6,0, also bei $1/3$ Sicherheit = 2,0 genommen, hat man:

Zu $2{,}0^k$ Last gehört 1 □Millim. Seilquerschnitt,
» $1{,}0^k$ » » $1/2$ » »
» 100^k » » $\frac{100}{2}$ □Millim. = 50 □Millimeter Seilquerschnitt.

Ein Kreis von 50 □Millimeter Fläche hat aber, wie uns die K-Spalte zeigt, 8 Millimeter Durchmesser = Seilstärke. Nach preussischen Zollen ausgedrückt, hat man laut a-Tabelle 314 Millimeter = 1 Fuss, also 26 Millimeter = 1 Zoll, 8 Millimeter = $\frac{8}{26}$ Zoll = 0,31 Zoll.

4. **Beispiel.** Eine Hängesäule eines Dachwerks hat 5 Zoll Dicke und 6 Zoll Breite. Welche Last könnte man ihr anhängen: a) ehe sie zerreisst, und b) wenn man die gewöhnliche Sicherheit haben will?
Auflösung. Nehmen wir an, es sei österreichisches

Maass, so hat man 5 × 6 = 30 □Zoll, und nach der 0-Tabelle = 30 × 694 = 20820 □Millimeter, welche die absolute Festigkeit dieses Holzstückes = 20820 × 9ᵏ = 187380 Kilogramm, oder laut *h*-Tabelle = 187380 × 1,79 österreichische Pfund = 337 Tausend österreichische Pfunde; also bei gewöhnlicher Sicherheit = 337 × 1/10 = 33 bis 34 Tausend Pfund ergeben.

5. **Beispiel.** Mit welcher Sicherheit hat der Baumeister einen eisernen Bolzen von 0,8 preussischem Zoll Durchmesser verwendet, an dem eine Last von 8000 preussischen Pfunden hängt?

Der Kreis von 0,8″ Durchmesser hat laut Strich 0,8 der *K*-Spalte einen Querschnitt von 0,5 □Zoll. (Oder, da 0,8″ = 0,8 × 12 = 9,6 Linien, laut 9,6 der *Kr.*-Spalte 0,503 □Zoll.) Laut 0-Tabelle sind 0,5 □″ preussische = 684 × 0,5 = 342 □Millimeter; also, da Schmiedeeisen den Modul 42 hat, äusserste Tragkraft = 342 × 42 = 14364ᵏ, laut *h*-Tabelle = 14364 × 2,14 preussische Pfund = 30700 Pfund.

Die Sicherheit ist also eine $\frac{30700}{8000} = 3{,}8$ oder noch nicht 4fache.

b. Elasticitäts- und Tragbarkeitsmodul.

§. 427. Im Falle der Fig. 400 erstrebt die Kraft eine Ausdehnung, im Falle der Fig. 401 eine Zusammendrückung, und in dem der Fig. 402 eine Biegung, d. h. an der oberen, konvexen, Seite ebenfalls eine Ausdehnung, an der unteren, konkaven, aber eine Zusammendrückung, jedenfalls immer eine Volumveränderung. Wenn diese so weit getrieben wird, dass der Körper nicht wieder vollkommen in die ursprüngliche Form zurückgeht, sondern eine Formveränderung behält, so sagt man: es habe derselbe die **Elasticitätsgrenze** überschritten.

Bei sehr unvollkommen elastischen, z. B. weichen Körpern gehört nur eine geringe Kraft und Volumveränderung dazu, um die Elasticitätsgrenze zu überschreiten.

Lehm z. B. kann nicht die geringste Ausdehnung oder Zusammendrückung erdulden, ohne in seiner Form bleibend davon zu leiden; Tannenholz kann um $1/_{600}$ seiner Länge ausgedehnt oder zusammengepresst werden, ehe es

Fig. 400.



Fig. 401.

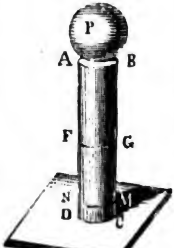
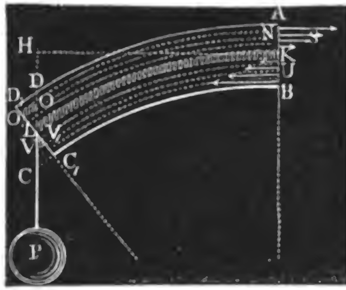


Fig. 402.



seine Elasticität, d. h. die Fähigkeit verliert, die erlittene Formveränderung nach Entfernung der Kraft wieder aufzuheben.

Das Ausdehnungsverhältniss für die Elasticitätsgrenze (beim Tannenholze also der Bruch $1/_{600}$) heisst auch die relative Ausdehnung.

Innerhalb der Elasticitätsgrenze ist die Ausdehnung oder Zusammendrückung ziemlich proportional der aufgewandten Kraft. Wenn eine Tannensäule von 10 □Zoll Querschnitt durch 300 Centner bis zu ihrer Elasticitätsgrenze (die nach oben bei $1/_{600}$ Längenveränderung erfolgt) ausgedehnt wird, so bewirken 150 Centner oder die halbe Last auch nur $1/_{1200}$ oder die halbe Ausdehnung. Jenseits der Elasticitätsgrenze aber nimmt die Volumveränderung und die Annäherung an den Zerstörungspunkt in der Regel sehr schnell zu.

§. 428. Daher soll man tragende Körper über jene von ihrer Elasticität vorgeschriebene Grenze hinaus nie belasten, wenn sie auf die Dauer Sicherheit gewähren sollen; und daher nennt man jene Kraft, die erfahrungsmässig ein Stoff pro

Flächeneinheit, hier □Millimeter, seines Querschnitts erträgt, um bis zur Elasticitätsgrenze gespannt zu werden, seinen Tragbarkeitsmodul.

Wird dieser Modul mit m, die Querfläche mit F, die der Elasticitätsgrenze entsprechende Last oder Kraft mit P bezeichnet, so gilt: $P = F . m$. Des Messknechts Vorderseite sagt uns demgemäss, dass des Holzes Tragmodul (2,2) fast gerade $^1/_4$ von dessen absolutem Festigkeitsmodul ($= 9$) ist, was die 4fache Sicherheit (S. 582) giebt, während beim Gusseisen ($m_F = 14$, $m_T = 10$) der Festigkeitsmodul nur dem $1^1/_2$fachen Tragmodul, letzterer also nur der anderthalbfachen Sicherheit entspricht. Wo keine Stösse, Verwitterung und dergleichen zu befürchten wären, würde also die S. 582 verlangte 6fache Sicherheit unnöthig sein.

Beispiel. Welchen Durchmesser mindestens soll man einem cylindrischen Hängeeisen geben, das dauernd 45 Zollcentner Belastung aushalten soll?

Gegeben $P = 4500$ Zollpfund $= 2250$ Kilogramm; m laut Messknecht $= 12$ Kilogramm; gesucht F. Weil $F . m = P$, folgt $F = \frac{P}{m} = \frac{2250}{12} = 187$ □Millimeter, welche nach der K-Spalte den Durchmesser 15,4 Millimeter verlangen; oder nach der a-Tabelle in preuss. Maass verwandelt $= \frac{15,4}{314}$ Fuss $= \frac{184,8}{314}$ Zoll $= 0,6$ Zoll.

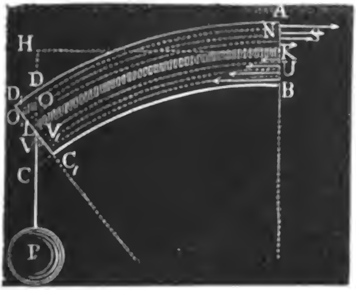
Wollte man indess eine 6fache Sicherheit haben, müsste man nach S. 583 statt m setzen $\frac{m}{6} = \frac{42}{6} = 7$, also $F = \frac{2250}{7} = 323$ □Millimeter $= 3,23$ □Centimeter, wozu laut K-Spalte der Durchmesser $= 2,05$ Centimeter $= 20,5$ Millimeter $= 0,8$ Zoll.

c. Relative Festigkeit. Brechungsmodul.

§. 429. Die auf die Längenausdehnung eines Körpers recht- (oder auch schief-) winklig gerichteten Kräfte er-

streben zunächst eine Biegung desselben, Fig. 403, wodurch oberhalb der (immer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden, »neutralen«) Achse *LK* eine Verlängerung, unterhalb eine Verkürzung des Körpers bewirkt wird; während die dazwischen liegende neutrale Achsenschicht weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung, also auch keinen Angriff auf ihre absolute und rückwirkende Festigkeit erleidet. Sobald aber durch die Biegung eine einzige Faserschicht bis zur Elasticitätsgrenze (S. 584) gespannt wird, hat der Körper die Grenze seines Tragvermögens erreicht. Denn die äusserste, gespannteste Schicht nähert sich nun mit rascheren Schritten ihrem Zerreissen; und das Zerreissen einer einzigen Faser muss sofort den weiteren Bruch befördern.

Fig. 403.



§. 430. Die Kraft, mit der ein an einem Ende befestigter, z. B. eingemauerter und am anderen Ende belasteter Körper jener zulässigen äussersten Biegung, oder auch dem Bruche, widersteht, ist aber abhängig

a) von der Festigkeit des Stoffes; specieller: von der Kraft (in Kilogrammen), mit der jedes □Millimeter Querschnitt der am meisten gespannten (äussersten oder innersten) Schicht *AD* oder BC_1 ausgedehnt respektive zusammengepresst werden muss, ehe ein Zerreissen dieser äussersten Schichten stattfindet; welche Kraft man den **Brechungsmodul** (m) nennt. (S. S. 590).

b) Von der Länge l des Körpers; indem bei doppelter Länge dieselbe Belastung P in Bezug auf den Brechpunkt K auch die doppelte Wirkung erhält; oder allgemeiner, indem die Tragkraft sich umgekehrt wie die Länge verhält.

c) Von der Breite *b*; indem z. B., wenn ein Tragkörper gegen einen anderen desselben Stoffes, Fig. 404 bis 405,

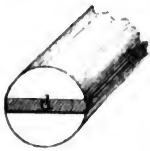
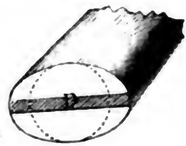


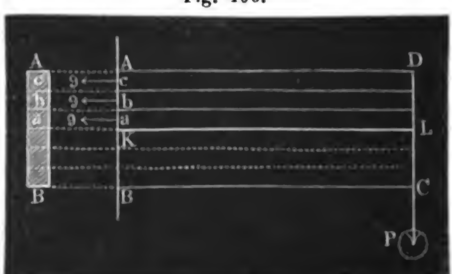
Fig. 404.


Fig. 405.

von gleicher Länge und Höhe, aber in allen gleichliegenden Horizontalschichten von doppelter Breite ist, auch jede dieser Schichten, z. B. *D* doppelt soviel □Millimeter enthält und also auch doppelt soviel Widerstand leistet, als die korrespondirende *d*; der ganze Querschnitt oder Körper also die doppelte Festigkeit besitzt.

d) Von der Höhe *h*; indem, wie der Calkül zeigt und die Erfahrung bestätigt, bei gleicher Länge und Breite ein in allen Vertikalschichten 2mal oder 3mal so hoher Balken (oder Querschnitt) die 2 × 2 = 4 (respektive 3 × 3 = 9) fache Festigkeit hat. Wäre z. B. *K* der Brechpunkt, Fig. 406, *KL* die neutrale Achse, *a* das erste □Millimeter, b) das darüberliegende zweite und c das dritte, und es gehörte zum einfachen

Fig. 406.



Zerreissen eines □Millimeters eine Zugkraft von 9 Kilogramm, so wirkte also a mit einem Widerstande oder einer Gegenkraft von 9^k, b desgleichen, c desgleichen. Es ist nun gerade so, als wenn am Winkelhebel AKL am kurzen Arme AK wirkten:

die Widerstandskraft

$a = 9^k$	am Hebelsarme $aK = 1$	od. mit dem Momente	$1 . 9$
$b = 9^k$	» » $bK = 3$	» » » »	$3 . 9$
$c = 9^k$	» » $cK = 5$	» » » »	$5 . 9$

das □Millimeter a allein leistet also den Widerstand $1 . 9^k$
der 1. und 2. a und b zusammen: $1 . 9 + 3 . 9 = 4 . 9$
der 1., 2. u. 3., od. a, b u. c » $1 . 9 + 3 . 9 + 5 . 9 = 9 . 9$

d. h. jede Schicht von doppelter Höhe leistet den 4fachen,
» » » » 3facher » » » 9fachen,
» » » » $n$fachen » » » n^2fachen

Widerstand. Und was oberhalb der neutralen Achse in Bezug auf die Streckung, gilt gerade so unterhalb in Bezug auf die Pressung.

Die Breitenverhältnisse tragen also in einfacher, die Höhenverhältnisse aber in potenzirter (und zwar quadratischer) Weise zur relativen Festigkeit bei.

Die Form des Querschnitts muss sonach einen sehr bedeutenden Einfluss auf diese Festigkeit haben, und ebenso auch bei gleicher Form die Lage desselben, indem z. B. der Balken mit elliptischer Querfläche mehr Tragkraft haben muss, wenn er so gelegt wird, dass der grosse Durchmesser D die Höhe und nicht die Breite bildet, da im ersteren Falle die grösseren Dimensionen des Querschnittes, im anderen die kleineren mit quadratischem Einflusse zu der Festigkeit beitragen.

Fig. 407.

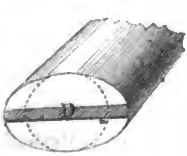
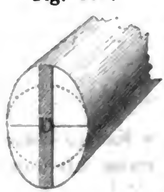


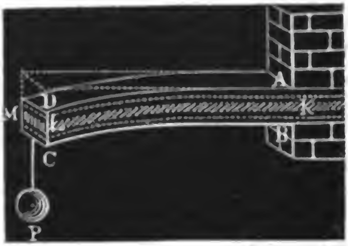
Fig. 408.



§. 431. Wenn ein Körper, Fig. 409, durch ein Gewicht am Ende so belastet wird, bis er bricht, so lässt sich aus der Kraft P in Verbindung mit der stattgehabten

Biegung die Ausdehnung und die Spannung ableiten, welche die äusserste, am stärksten ausgedehnte Faser erlitt, ehe sie zerriss oder zerbrach. Diese Spannung pro □Millimeter ist nun eben das, was in der dritten Rubrik der kleinen Festigkeitstabelle des Knechtes als Brechungsmodul aufgeführt ist. Da das Zerbrechen, streng genommen, eine Art Zerreissen ist, so sollte man glauben, dass der Modul der relativen Festigkeit dem der absoluten sehr nahe kommen müsste. Es findet indess beim Zerbrechen sowohl Ausdehnung als auch Zusammendrückung und überhaupt doch ein etwas anderer als einfacher Zerreissungsvorgang statt, daher es erklärlich wird, dass genanntes Täfelchen die Moduls des Zerbrechens anders giebt als die des Zerreissens. Es belehrt uns z. B., dass die Spannung, die das Holz beim Brechen aushält, gegenüber dem einfachen Zerreissen im Allgemeinen um $\frac{1}{3}$ geringer ist (6 gegen 9) und während in Bezug aufs einfache Zerreissen die technisch wichtigeren Holzarten keinen wesentlichen Festigkeitsunterschied zeigen (= 9), bewährt sich gegen das Zerbrechen (also beim Lasttragen als Gebälke) die Eiche und Buche im Mittel mit $\frac{7 + 17}{2} = 12$ gegen die Fichte mit $\frac{5 + 10}{3} = 7\frac{1}{2}$ durchschnittlich um 60 Procent fester.

Fig. 409.



Auch ist das Holz des Kernes fester als das des Splintes, das vom Wurzelende fester als vom Wipfel etc., weshalb in einer und derselben Holzart, wie z. B. Kiefer, der Modul zwischen 5 und 12 schwanken kann.

Wir lesen ferner, dass gusseiserne Balken (17 bis 40) durchschnittlich 3mal so fest als hölzerne sind, und dass im

Gusseisen eine Verschiedenheit wie 17 zu 40 oder 1 zu $2\frac{1}{3}$ vorzukommen vermag.

Ueber die anderen Metalle sind gar keine Zahlen vorhanden; hauptsächlich weil ihre Dehnsamkeit und Elasticität zu gross ist, um ein zu weiteren Nutzanwendungen geeignetes Zerbrechen derselben beobachten zu können. Auch werden diese Stoffe, eben jener Eigenschaften wegen, als erheblich belastete Träger nicht verwendet.

Der Brechungsmodul des Sandsteines ist mindestens 0,4; der des Holzes mindestens 5; beide verhalten sich also wie 4 zu 50 oder wie 1 zu 12, d. h. ein hölzerner Fenster- oder Thürsturz trägt 12mal soviel als ein sandsteinerner.

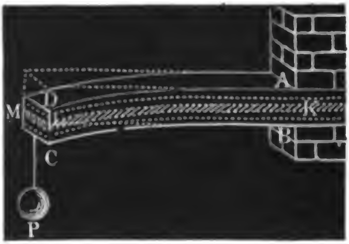
§. 432. Kommt es nicht bloss darauf an, die relativen Festigkeiten mit einander zu vergleichen, wie eben geschah, sondern für einen Körper vom Brechungsmodul m und der Länge l die zum Zerbrechen gehörige Belastung P wirklich anzugeben, so müssen begreiflich in dem Ausdrucke für dies P die Dimensionen des Querschnittes eine bedeutende Rolle spielen (§. 430).

Denkt man sich z. B. beim Balken von b Millimeter Breite und h Millimeter Höhe den rechteckigen Querschnitt in unendlich viele Horizontalschichten zerlegt, und berechnet von jeder dieser Schichten die ihr zukommende Widerstandskraft nach Maassgabe ihrer Breite (Fläche) und ihrer Entfernung von der neutralen Achse, ähnlich wie Seite 589 an einem einfachen Beispiele gezeigt wurde, und indem man die Spannung (oder Widerstandskraft), die die äusserste Schicht AD oder CB, Fig. 409, kurz vor dem Zerbrechen pro □Millimeter aushielt (oder entgegenstellte), mit m (Brechungsmodul), so erhält man als Summe sämmtlicher Widerstände im Brechungs querschnitte ober- und unterhalb der neutralen Achse nach Sätzen der Algebra und Mechanik den Ausdruck $\frac{1}{6}\, b\, h^2\, m$, während die am Hebelsarm l wirkende Brechungskraft P den Ausdruck $P \,.\, l$ für ihre Wirkung erhält, wonach man die Gleichung $P\, l = \frac{1}{6}\, b\, h^2\, m$ hat, und aus derselben

$$P = \frac{1}{6} \frac{b h^2}{l} m$$

als die Kraft, die zum Zerbrechen eines rechteckigen Balkens gehört, wenn Befestigung- und Kraftangriff wie in Fig. 410 stattfinden.

Fig. 410.



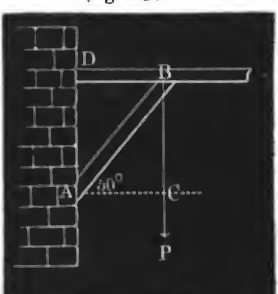
Soll das eigene Gewicht G des Balkens mit berücksichtigt werden, so bedenke man, dass, da dasselbe im Schwerpunkte, d. h. am Hebelsarme $\frac{1}{2}$ l wirkt, für seine Wirkung den Ausdruck $\frac{G \cdot l}{2} = \frac{G}{2} l$, im Ganzen also die Brechungsgleichung

$$\left(P + \frac{G}{2}\right) l = \frac{1}{6} b h^2 m \text{ oder}$$

$$P + \frac{G}{2} = \frac{1}{6} \frac{b h^2}{l} m \text{ gilt.}$$

1. Beispiel. Der Strebebaum AB, Fig. 411, sei 5 Meter lang, sein Querschnitt ein Rechteck von 10 Centimeter Breite und 15 Centimeter Höhe, sein Elevationswinkel 50°. Welche in B senkrecht wirkende Last wird ihn zerbrechen, wenn er von sehr gesundem Fichtenholze ist, und sein eigenes Gewicht unberücksichtigt bleibt?

Fig. 411.



Gegeben $b = 100$ Millimeter; $h = 150$ Millimeter; Hebelsarm l der Last $=$ 5000 Millimeter $\times$ *cos.* 50°, was laut *COS.*-Spalte $=$ 3200 Millimeter.

Endlich ist laut Messknechtstafel der Brechungsmodul

$m = 8$ Kilogramm zu setzen, so dass man hat

$$P = \frac{1}{6} \frac{100 \cdot 150 \cdot 150}{3200} \cdot 8 = 940 \text{ Kilogramm.}$$

2. Beispiel. Der Balken AD, Fig. 410, sei von mittlerem Fichtenholze (Brechungsmodul $= \frac{6 + 9}{2} = 7\frac{1}{2}$ Kilogramm pro □Millimeter) und habe zum Querschnitte ein Rechteck von 10 Zoll und 8 Zoll Seite. preussisches Maass. Wie viele Zollpfunde muss die Last P betragen, wenn sie den Balken zerbrechen soll a) sobald derselbe auf die breite Seite, wie die Figur darstellt, b) sobald er auf die Höhe gestellt ist?

1. Auflösung. $7\frac{1}{2}^k$ pro □Millimeter sind laut 0-Tabelle $= 684 \times 7\frac{1}{2} = 5130^k$ pro preussischen □Zoll, und laut h-Tabelle $= 5130 \times 2 = 10260$ Zollpfund $= 102$ Centner, ferner $l = 10 \cdot 12 = 120$ Zoll, $b = 10$, $h = 8$ Zoll, also $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 \cdot 64}{120} \cdot 102$ $= 90$ Centner.

2. Auflösung. Wenn $h = 10$ und $b = 8$.

$$P = \frac{1}{6} \frac{8 \cdot 100}{120} \cdot 102 = 113 \text{ Centner}$$

oder in dem Verhältnisse $10 \cdot 8^2$ zu $8 \cdot 10^2$, d. i. wie 4 zu 5 mehr.

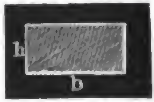
§. 433. Nach der im vorigen Paragraph u. S. 589 angedeuteten Weise hat man nun jene interessanten Formeln entwickelt, welche zur Vergleichung und zur Berechnung der Tragkraft der verschiedenen Querschnittsgestalten dienen. Wir wollen diese Brechungsformeln für den am einen Ende eingemauerten, am anderen Ende belasteten Balken, von denen die wichtigeren nachfolgend hier aufgeführt sind, die Grundwerthe der relativen Festigkeit nennen; und ist dabei noch zu bemerken, dass die Brechungskraft P, streng genommen, immer um das halbe Gewicht des Balkens geringer anzunehmen ist; sowie dass

neben der Formel stehende Figur die Dimensionen und Lage des Balkenquerschnitts veranschaulichen soll.

Fig. 412.

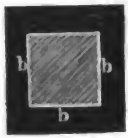


Fig. 413.



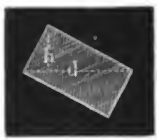
$$P = \frac{1}{6} \frac{b h^2}{l} m.$$

Fig. 414.



$$P = \frac{1}{6} \frac{b^3}{l} m.$$

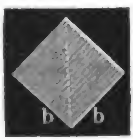
Fig. 415.



$$P = \frac{1}{6} \frac{d h^2}{l} m,$$

darum für

Fig. 416.



$$P = \frac{1}{12} \frac{b^3 \sqrt{2}}{l} m.$$

Fig. 417.

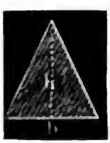
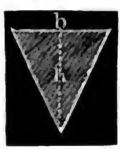
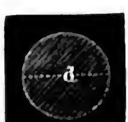


Fig. 418.



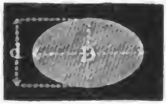
$$P = \frac{1}{24} \frac{b h^2}{l} m.$$

Fig. 419.



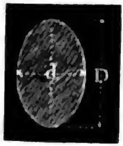
$$P = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{l} m.$$

Fig. 420.



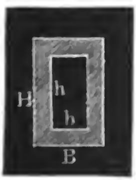
$$P = \frac{\pi}{32} \frac{D d^2}{l} m.$$

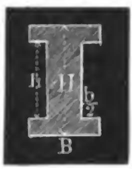
Fig. 421.



$$P = \frac{\pi}{32} \frac{d D^2}{l} m.$$

Fig. 422. Fig. 423.

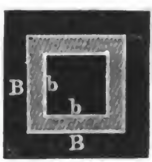




$$P = \frac{1}{6} \frac{B H^3 - b h^3}{H l} m;$$

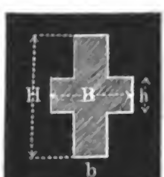
und darum für

Fig. 424.



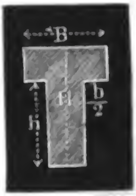
$$P = \frac{1}{6} \frac{B^4 - b^4}{B l} m.$$

Fig. 425.



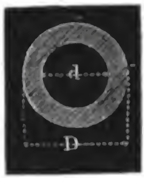
$$P = \frac{1}{6} \frac{B H^3 + b h^3}{H l} m.$$

Fig. 426.



$$P = \frac{1}{6} \frac{(BH^2 - bh^2)^2 - 4Bb\,Hh\,(H-h)^2}{BH^2 - bh^2}\, m.$$

Fig. 427.



$$P = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{Dl}\, m.$$

Fig. 428.



$$P = \frac{1}{24} \frac{BH^3 - bh^3}{Hl}\, m,$$

darum für

Fig. 429.

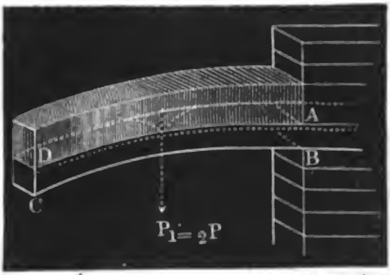


$$P = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{B^4 - b^4}{Bl}\, m.$$

§. 434. Sobald indess die Kraft nicht am freien Ende, sondern gleichförmig in allen Punkten der ganzen Länge

wirkt, Fig. 430, wie wenn der Balken eine gleichförmig auf ihn verbreitete Last zu tragen hat, so ist der Hebelsarm (des Schwerpunktes) dieser Last = der halben Länge des Balkens. Es wäre also $\frac{1}{2}$ l statt l in die obigen Formeln zu setzen. Das heisst: Ist die Last auf dem ein-endig befestigten Balken über dessen Länge l gleichförmig verbreitet, so kann sie das Doppelte des Grundwerthes, d. h. der obigen Formelwerthe, betragen.

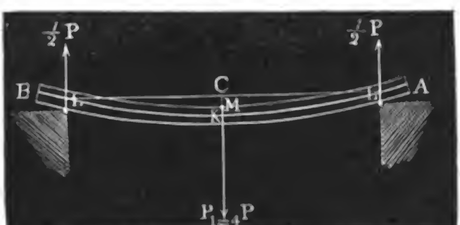
Fig. 430.



§. 435. Wenn der Balken von der Länge l an beiden Enden frei aufliegt und

a) nur in der Mitte M die Last P tragen soll, so bricht er in der Mitte M, gleichsam als wenn 2 Balken von der Länge $\frac{1}{2}$ l in M befestigt wären, und am Ende A oder B eine Kraft aufwärts wirkte, die natürlich = $\frac{1}{2}$ P ist. Man hätte sonach in die Grundformeln $\frac{1}{2}$ P statt P

Fig. 431.

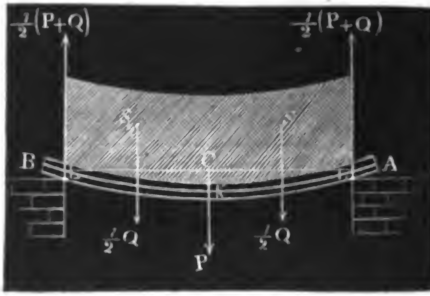


und $\frac{1}{2} l$ statt l zu setzen, was z. B. die erste verwandeln würde in $\frac{1}{2} P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b\,h^2}{\frac{1}{2}\,l}\,m$, woraus $P = \frac{4}{6}\,\frac{b\,h^2}{l}\,m$, d. h.: es bricht der Balken erst beim Vierfachen des

Grundwerthes, oder er hat 4mal so viel Tragvermögen als der ein-endig befestigte.

b) Trägt dagegen der beid-endig aufliegende Balken die Last gleichförmig über seine ganze Länge vertheilt, so ist der Hebelsarm (des Schwerpunktes) je-

Fig. 432.



der Lasthälfte $\frac{Q}{2}$ die Hälfte des vorigen, also $= \frac{l}{4}$, die Last kann oder muss sonach doppelt so gross als die vorige sein, das heisst: es bricht der Balken erst beim Achtfachen des Grundwerthes von §. 433.

§. 436. Wenn der Balken an einem Ende A fest eingesteckt (z. B. eingemauert ist), am anderen frei aufliegt, Fig. 433 u. 434 so dass er zwei Brüche in A und M erhalten muss, so findet sich durch ähnliche Betrachtungen:

a. bei der Mittenbelastung bricht der Balken beim 6fachen
b. bei gleichförmig vertheilter Last bricht der Balken beim 12fachen

} des Grundwerthes (des §. 433).

§. 437. Und wenn der Balken an beiden Enden fest einsteckt, z. B. beid-endig eingemauert ist, beim Brechen demnach an 3 Punkten auf Stücken gehen müsste, die Brechungskraft in der Mitte P sich also in zwei Hälften vertheilen muss, deren jede am Hebelsarme $\frac{l}{4}$, also nur mit dem Momente $\frac{Pl}{8}$ wirkt, so folgt:

Fig. 433.

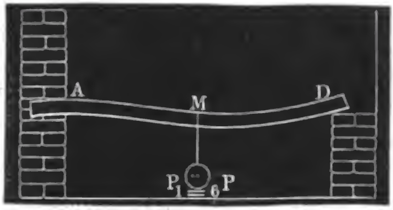
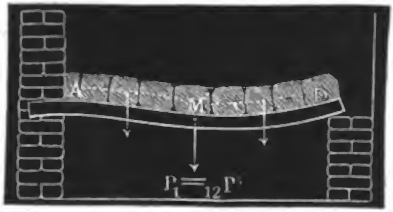


Fig. 434.



a. bei der Mittenbelastung bricht der Balken beim 8fachen
b. bei der gleichförmig vertheilten Last beim 16fachen
} des Grundwerthes. (§. 433).

Er hat also die doppelte Tragkraft dessen, der an beiden Enden bloss aufliegt.

Fig. 435.

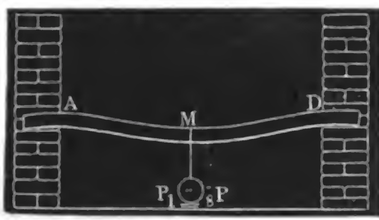
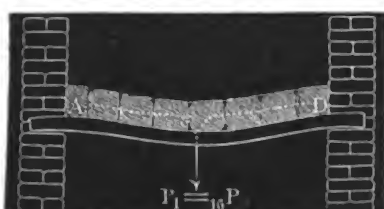


Fig. 436.



§. 438. Sicherheit.

Aus denselben Gründen, wie bei den Berechnungen der absoluten, nimmt man auch bei den der relativen Festigkeit zur nöthigen Sicherung namentlich für dauernde Belastung den relativen Tragmodul bedeutend kleiner als den relativen Festigkeits- (den Zerbrechungs-)modul; bei Stein, Metall und solchem Holze, das vor dem Verstocken und Verwittern geschützt ist, gewöhnlich $\frac{1}{6}$; ausserdem beim Holz aber $\frac{1}{10}$.

Nimmt man für Metall circa die 6fache, für Holz etwa die 10fache Sicherheit, so kann man in der Anwendung setzen den relativen Tragmodul

für Holz	$m = 0{,}9$	Kilogramm,
für Gusseisen	$m = 4{,}4$	»
für Schmiedeeisen	$m = 3{,}6$	»

Wo aber bedeutendere Erschütterungen zu riskiren, desgleichen wo jede Einbiegung zu vermeiden ist, wird man noch etwas weniger nehmen müssen.

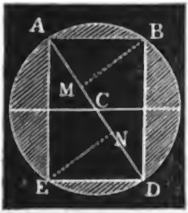
§. 439. Anwendungen.

Die in den vorstehenden Paragraphen aufgeführten Lehren gewähren eine erhebliche Menge interessanter Nutzanwendungen, die theils in Vergleichung der Tragkraft der verschiedenen Querschnittsformen nach deren Grundformeln in §. 433, theils in wirklichen Berechnungen der Dimensionen bei gegebener Belastung, oder der Lasten bei gegebenen Dimensionen, bestehen. Als zum Beispiel:

1. Haben zwei Balken einerlei Querfläche, der eine aber ein Quadrat, der andere einen Kreis zur Querschnittsform, so ist die Festigkeit des letzteren 15 Proc. geringer als die des ersteren.
2. Wird der Balken mit quadratischem Querschnitte so gelegt, dass statt zweier Seiten eine Diagonale wagrecht kommt, so wird seine Tragkraft fast 30 Procent kleiner.
3. Wird aus einem runden Stamm ein vollkantig quadratischer Balken gehauen, so verliert er 40 Procent an Tragkraft.

4. Unter allen vierkantigen Balken, die aus einem Baumstamme gehauen werden können, hat derjenige die grösste Tragkraft, dessen Breite und Höhe das Verhältniss 1 : $\sqrt{2}$ oder 1 zu 1,414 hat (und dessen Querschnitt sich sehr leicht konstruirt, indem man den Durchmesser in 3 Theile theilt und in jedem Theilpunkte M und N ein Hülfsperpendikel errichtet. Ein Balken dieser Art mit vollkantigem Querschnitte $EABD$ hat trotzdem nur 65 Procent der Festigkeit des ursprünglichen Stammes. (Um solchen Verlust von 35 Procent zu vermindern, beschlägt man die Balken, wo sie nicht scharfkantig sein müssen, breiter und höher, d. h. man lässt ihnen etwas Baumkante.

Fig. 437.



5. Ein hohler quadratischer Balken, dessen Wanddicke $\frac{1}{10}$ der Aussenseite, hat gegen einen massiven Balken von gleich grossem Massenquerschnitte 170 Proc. mehr Tragkraft oder fast das Dreifache.

6. Ein hohler Cylinder, dessen Wanddicke $= \frac{1}{10}$ des grösseren Durchmessers, hat gegen einen massiven von gleichem Massenquerschnitte oder Inhalte ebenfalls 170 Procent mehr Festigkeit.

Und bei der Wandstärke $\frac{1}{20}\,D$ wäre sie gar 320 Proc. höher, also $= 420$, wenn jene $= 100$; also mehr als das Vierfache.

7. Die Kraft P, Fig. 438 a. f. S., hat in Bezug auf den entferntesten Querschnitt AC die grösste Hebelkraft, weshalb bei gleicher Breite und Höhe des Balkens derselbe in AC zerbricht. Soll er aber eben so leicht in jedem anderen Querschnitte NL zerbrechen (soll er ein Balken von gleichem Widerstande sein), so muss der letztere bei gleichbleibender Breite natürlich niedriger sein, und zwar bei näherer Untersuchung in dem Verhältnisse, dass $(AB)^2 : (ML)^2 =$

OE : *VE*, d. h. (nach S. 257): d a s L ä n g e n p r o f i l *BEA* m u s s p a r a b o l i s c h g e k r ü m m t s e i n.

8. Aus denselben Gründen müssen Träger, die die Fig. 439 dargestellte Function haben, die Gestalt zweier zusammenstossender Parabeln erhalten, wenn sie in allen Längspunkten einerlei Festigkeit gegen das Zerbrechen besitzen sollen. — Und eben deshalb erhalten auch Balanciers von Dampfmaschinen oder ähnlich arbeitende Hebel die Gestalt Fig. 440.

9. Wenn aber bei g l e i c h f ö r m i g v e r t h e i l t e r L a s t,

Fig. 438.

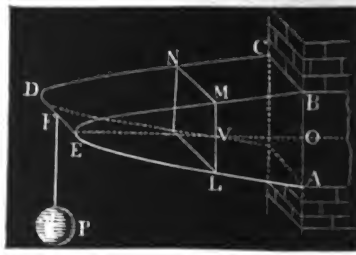


Fig. 439.

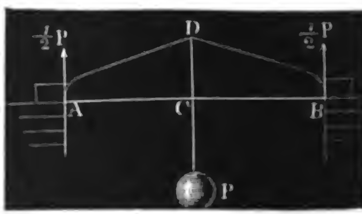


Fig. 440.

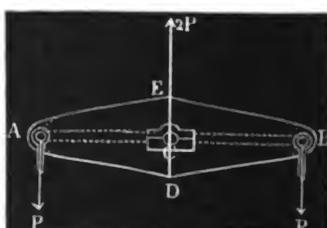
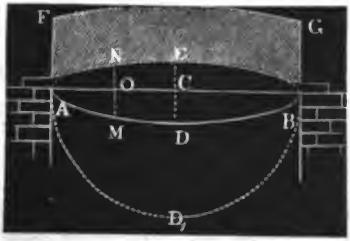


Fig. 441, die Zerbrechungskraft in allen Querschnitten *ED*, *MN* gleichen Widerstand finden soll, so müssen sich (bei einerlei Breite) die halben Höhen *CE* und *ON* wie die Ordinaten einer Ellipse verhalten, die Längenprofile also elliptisch sein.

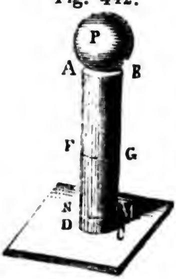
Fig. 441.



d. Rückwirkende Festigkeit. Zerdrückungs- und Zerknickungsmodul.

§. 440. Die letzte Spalte der kleinen Festigkeitstabelle giebt für die betreffenden Stoffe die Grösse des Druckes nach Kilogrammen, den ein prismatischer Körper pro □Millimeter seines Horizontalquerschnitts zu ertragen vermag, ehe er zermalmt wird.

Fig. 442.



Diese Zahlen des (metrischen) Zerdrückungsmoduls sagen uns z. B., dass Säulen und Pfeiler, deren Höhe noch nicht das 12fache der Stärke beträgt, Fig. 442, zum Zerdrücken eine Belastung verlangen pro □Millm. von 2 bis 5 Kilogr., wenn sie von Buche oder Eiche; von 5 bis 6 Kilogramm, wenn sie von Fichte; dagegen von noch nicht 2 Kilogramm, wenn sie von Tannenholz sind; u. s. w.

Das Holz zerspaltet zunächst dabei oder formt sich in Wulsten, während die Steine zersplittern.

§. 441. Diese respektive oder rückwirkende Festigkeit ist bei regelmässigen und mehr kompendiösen Querschnitten etwas grösser als bei unregelmässigen und zerdehnten; daher beim Kreise am grössten. Sie ist ferner bei ähnlichen Querschnitten den Inhalten derselben proportional; und,

wenn die Länge oder Höhe nicht so gross ist, dass eine Biegung und Knickung erfolgt, von dieser Dimension ziemlich unabhängig.

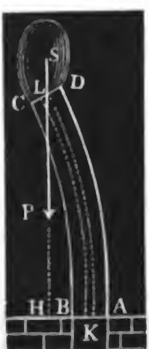
Beispiel. Ein Trocknen-Schuppen soll 5—7 Fuss über dem Terrain auf vier freistehenden Eckpfeilern von behauenen festen Sandsteinen und 2 preussische Fuss ins Quadrat aufgebaut werden. Welche Last kann jeder der 4 Pfeiler mit Sicherheit tragen?

Die Grundfläche = 24^2 □Zoll = 576 □Zoll; der Zerdrückungsmodul für schlechte, mergelige Steine freilich nur 1 Kilogramm, während der für die besten, quarzigen 9 Kilogramm beträgt. Nehmen wir 6 Kilogramm, also pro □Zoll nach der *o*-Tabelle 684 . 6 = 4104 Kilogramm = 8208 Zollpfund = 82 Centner, so folgt daraus die Zerdrückungslast = 82 × 576 = 47232 Centner.

Die Tabelle sagt aber ferner am Grunde, dass man für die gewöhnliche Sicherheit nur $\frac{1}{6}$ vom Modul nimmt, woraus denn auch die statthafte Belastung nur $\frac{47232}{6}$ = 7872 oder circa 8000 Centner.

§. 442. Gleichzeitig sagt uns aber des Messknechts Festigkeitstabelle, dass man den Zerdrückungsmodul um $\frac{1}{6}$ geringer anzunehmen hat, sobald die Höhe das 12fache der Dicke und um $\frac{2}{6}$, wenn jene das 24fache derselben erreicht. Denn da bei dem hier leicht eintretenden Biegen die Last *P* einen Hebelsarm *H A* für ihre Wirkung und dadurch auch Gewalt zum Zerbrechen erlangt, muss die Festigkeit eine geringere sein. Man kann den nach genannter Vorschrift verringerten Modul den Zerknickungsmodul nennen.

Fig. 443.



Bei einer fichtenen Säule von 9 Zoll und 5 Zoll Breite (also durchschnittlich 7 Zoll Dicke) und 10 Fuss Höhe dürfte man also nur

$4\frac{1}{2}$ als Modul, und wenn man 10fache Sicherheit haben will, natürlich nur $\frac{4\frac{1}{2}}{10} = 0{,}45$ Kilogramm, für obige Säule demnach, wenn das Maass österreichisch ist, laut *o*-Tabelle eine Belastung statuiren von nur 45 □Zoll $\times$ 694 $\times$ 0,45 Kilogramm $=$ 14000 Kilogramm.

§. 443. Untersucht man die beim Zerknicken nothwendig stattfindenden Vorgänge genauer, so findet sich übrigens, dass die respektive Festigkeit, bei rechteckigem Querschnitte der Säule, zunimmt, mit der grösseren Seite (der Breite) einfach, mit der kleineren (der Dicke) im Kubus, mit der Höhe umgekehrt. Bei cylindrischem Querschnitte wächst die Tragkraft wie die vierte Potenz des Durchmessers. Bei einerlei viereckigem Querschnitte hoher Säulen ist also die 3mal so lange $\frac{1}{3}$ so fest; bei einerlei Höhe und Breite die 3mal so dicke 3^3 oder 27mal so fest. Und eine dem Zerknicken ausgesetzte cylindrische Säule wird, wenn sie um $\frac{1}{10}$ oder 10 Procent im Durchmesser stärker gewählt wird, in dem Verhältnisse 1^4 zu $1{,}1^4$, d. i. wie 1 zu 1,46 oder $=$ 100 : 146, d. h. um 46 Procent tragkräftiger.

Sechstes Buch.

Holzmesskunst

oder

der Messknecht

als:

33) Holzkubirer.

34) Baum-Massenschätzer.

35) Baum-Zuwachsschätzer.

36) Wald-Dichtheitsschätzer.

37) Wald-Massenschätzer.

38) Wald-Zuwachsschätzer.

Vorbemerkung.

Der Messknecht und sein Praktikum ist dem grossen oder ganzen Publikum gleichmässig zu dienen bestimmt. Er giebt daher in diesem Buche der Holzmesskunst von dem forstlichen Materiale seiner Theorie und Praxis in gedrängtem Satze und Wesen eben nur das, was allen den vielen bei der Production und Consumtion des Holzes technisch oder finanziell mehr oder weniger betheiligten bürgerlichen Geschäftskreisen besonders nöthig oder nützlich erscheint.

Zugleich ist dies Buch aber auch von allgemeinem Interesse für alle Leute und Schulen, die den Gebrauch der rechnenden und messenden Mathematik zu üben und zu pflegen besonderen Beruf haben; denn es zeigt, wie der Wald, der doch fast überall leicht zu haben und im Sommer wie im Winter gangbar ist, ein treffliches Terrain für die mannigfachsten, das Augenmaass und die Gewandtheit in theorëtischer wie praktischer Beziehung besonders bildenden arithmetischen, planimetrischen, stereometrischen und physikalisch-mathematischen Uebungen darbietet. Ihnen ist der Knecht in seiner Eigenschaft als messender und rechnender Forstmann ein konkreter Turnapparat, der Wald ein besonderer Turnplatz, dies ganze sechste Buch eine konkrete Turnschule zur Erlangung der nöthigen praktisch-mathematischen Ausbildung im Allgemeinen.

Wer, wie der forst- und waldbesitzende Landwirth, Ursache hat, sich die Theorie und Praxis der im Nachfolgenden aufgestellten, zum bei weitem grössten Theile dem Verfasser eigenthümlichen Sätze, Methoden und Hülfsmittel in vollständigerer und noch kultivirterer Weise anzueignen, wolle sich einstweilen mit dem hier Gegebenen möglichst vertraut machen, bis der Verfasser im Stande sein wird, den Knecht durch ein specifisch forstliches Supplementwerkchen in gedachtem Sinne zu ergänzen.

Dreiunddreissigstes Kapitel.

Der Holzkubirer.

§. 444. Der nothwendig und voraussichtlich immer mehr steigende Preis der Hölzer macht es für den Producenten wie Consumenten gleich wichtig, dass er im Besitze der nöthigen Kenntnisse und Hülfsmittel sei, um den Gehalt der aufbereiteten Hölzer leicht und sicher zu ermitteln. Man bedient sich zu diesem Zwecke, namentlich behufs der Stammkubirung, noch sehr häufig selbst in kultivirten Forsthaushalten, solcher Methoden und Hülfsmittel, welche, als auf irrigen Ansichten beruhend und ungehörige Fehler zulassend, verworfen werden müssen.

§. 445. Naturgemäss zerfällt jedes Baumes Holzmasse in die drei Sortimente: Stamm oder Schaft, Krone und Wurzelstock. Die Wirthschaft unterscheidet aber anders: Sie theilt des Baumes Gesammtmasse zunächst in Derbholz und Reisig, und versteht dann unter ersterem gewöhnlich alles Holz, das über 3 Zoll (Durchmesser) Stärke hat. Begreift man unter Derbholz nur oberirdisches, so ist noch als weiterer Gegensatz das Wurzelholz hinzuzufügen. Der in wirthschaftlicher Hinsicht ausserdem gemachte Unterschied zwischen Brennholz und Nutzholz ist selbstverständlich. Letzteres liefert der Wald zumeist als Bauholz in ganzen oder entwipfelten Stämmen oder als Brettklötzer (Blochstücke) in 14—24 Fuss langen Stammstücken; ersteres als Klafterholz entweder in Rollklaftern (Prügel- oder Knüppelklaftern; Rundstücke von 3 bis 6 Zoll Stärke) oder in Scheitklaftern (aus gespaltenen Stammstücken); sowie in Reisigwellen, Reisigbunden (zweckmässiger in Reisighaufen) und in Wurzelklaftern. (Wenn das Knüppelholz nicht mit zum Derbholze gerechnet werden soll, ist unter letzterem alles über ½ Fuss starke zu verstehen.)

Wird der Stamm nicht am Wurzelansatze (Wurzelhalse), sondern 1—2 Fuss oberhalb desselben abgeschnitten und der so am Wurzelhalse belassene Stammtheil (Stock) mit ihm zugleich aufgeklaftert, so giebt dies die gewöhnlichen Stock-

klaftern; und wenn man den Stock von der Wurzel getrennt für sich aufklaftert, die sogenannten Stockschmatzen.

Knüppelklaftern aus dem Astholze nennt man häufig auch Zackenklaftern.

Das Klaftermaass ist ein Parallelepipedum, das zur Länge und Höhe gewöhnlich 6 Fuss und zur Breite die Scheitlänge (2, 3, 4 Fuss), also je nach letzterer einen Rauminhalt von 72, 108, 144 Kubikfuss, und 40 — 80 Procent dieses Raumes an Holzmasse, hat.

Wir behandeln zunächst die Natur- und dann die Wirthschafts-Sortimente.

1. Die Natur-Sortimente.

A. Das Stammholz.

§. 446. Der am Wurzelhalse abgetrennte unentwipfelte (Voll-) Stamm ist einem der im 3. Buche betrachteten konischen Grundkörper selten so ähnlich, dass man ihn wie jene, aus Höhe und Grundstärke oder Höhe und Mittelstärke nach den dort gegebenen Regeln kubiren dürfte; dagegen stark (d. h. bei $\frac{1}{3}$ bis höchstens $\frac{1}{4}$ der unteren Stärke) entwipfelte Stämme gar wohl dem Stutze eines jener drei Körper vergleichbar werden.

Die bei weitem grösste Mehrzahl der Baumstämme („Schäfte") hat, etwa mit Ausnahme des Stockendes, ausgebauchte Seiten. Nur die jüngeren mit noch kräftigem Höhenwuchse sind der gemeinen (gestreckten) Kegelform ziemlich nahe, selten aber ihr ganz gleich. Die Ausbauchung der Seiten ist in der Regel um so grösser (der Stamm ist um so „vollschaftiger" oder: der Schaft um so „vollholziger"), je älter, um so geringer oder gestreckter (abschäftiger, abholziger), je jünger der Baum ist. Im Durchschnitte ist sie ziemlich annähernd parabolisch; bei sehr vollholzigen Schaften selbst der elliptischen Form (S. 397) vergleichbar.

§. 447. Die Stammquerflächen sind indess selten wirkliche Kreise; und um so weniger, je weiter nach dem untersten Ende des Schaftes (dem Wurzelhalse) hin man den Querschnitt misst. Nimmt man zur Ermittlung der Stammdurchmesser (Stammstärken) das Gabelmaass (die Kluppe), so nehme man 2 Stärken über Kreuz, und daraus das Mittel, sobald man sich vor Fehlern von 4 — 8 Procent sichern will. Bedient man sich aber des allerdings viel führlichern Messbandes, so fasse und lege man dasselbe, wie Fig. 444 zeigt, und verkürze es nach Maassgabe der Unkreisförmigkeit und Rindenrauhheit des Stammumfanges dadurch, dass man den einen Daumennagel vom anderen, den Nullpunkt festhaltenden, in entsprechendem Abstande lässt. Die bisher stets üblich

Fig. 444.



gewesene Nichtberücksichtigung dieser Correction ist Ursache, dass man mit dem Bande die Stärken fast immer zu gross gemessen hat.

Als Anhalt hierzu kann folgende Regel dienen, die der Verfasser auf Grund vieler genommenen Querschnittsberechnungen (nach S. 260) für die mittlere Correction der Nadelholz-Stammstärken aufzustellen sich veranlasst sah *). Sie heisst:

Der eine Daumen bleibe vom anderen (oder Nullpunkte des Bandes) entfernt bei

sehr schwachen Stämmen (unter $\frac{1}{2}$ Fuss Durchmesser) um $\frac{1}{2}$ Zoll,
schwachen Stämmen ($\frac{1}{2}$ — 1 Fuss Durchm.) um 1 Zoll,
mittleren „ (1 — 2 Fuss Durchm.) um $1\frac{1}{2}$ Zoll,
starken „ (2 — 3 Fuss Durchm.) um 2—$2\frac{1}{2}$ Zoll,
sehr starken „ (über 3 Fuss) um 3 Zoll,

oder: bei mittleren (1—2 Fuss) starken Stämmen um $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{3}$ Zehntel des Umfanges; bei schwächeren um $\frac{1}{2}$ Zehntel, bei stärkeren um $\frac{1}{4}$ Zehntel.

Das Messband, Fig. 445 a. f. S., ist übrigens stets auch mit der Durchmessertheilung zu versehen (s. S. 245); denn es ist ganz verwerflich und in mehr als einer Hinsicht unpassend, als Ausdruck einer, immer doch geradlinig vorstellbaren, Stärken-Dimension den Umfang zu gebrauchen, wo man so leicht zur eigentlichen Stärke, zum Durchmesser, gelangen kann. Der sonderbare und unnatürliche Gebrauch, die Stammstärken durch den Stammumfang zu bezeichnen, wird nur dadurch erklärlich, dass man sich auf jene einfache Durchmessertheilung gar nicht besonnen zu haben scheint.

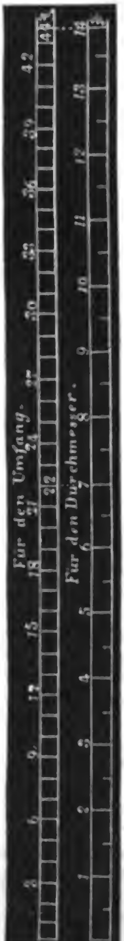
§. 448. Die wirthschaftlich einfachste und empfehlenswertheste Methode der Stammkubirung wird, den vorstehenden Paragraphen gemäss, daher diejenige sein, welche, indem sie des Schaftes Ausbauchung parabolisch annimmt, seinen Inhalt gleich dem seiner Mittenwalze setzt (S. 374) oder (in der Messknechtssprache) nach der Regel kubirt:

---

*) Siehe Tharander Jahrbuch, 9. Bd. S. 12.

Miss die (Achsen-) Länge nach Fussen und in der Mitte derselben die Stärke des Stammes nach Zollen und multiplicire die zu letzterer gehörige durch die *Kr.*- oder *K*-Spalte gesuchte Stärkenfläche mit der Länge (s. S. 376).

Fig. 445.



Im Allgemeinen giebt diese Regel den Inhalt um so richtiger, je stärker der, am Wipfelende gemeiniglich fürs Paraboloid zu jäh abfallende, Stamm entwipfelt ist; daher man unentwipfelte oder sehr lang entwipfelte Stämme nach 2 Sectionen oder nach der Regel kubiren soll: Suche die Länge; bei $\frac{1}{4}$ derselben von oben wie von unten herein die Stärken; zu diesen (mittels des Knechtes Kreisspalten) die Flächen, und multiplicire die Summe beider mit der halben Länge.

Bei solcher Verfahrungsweise wird man selten einen Fehler bis zur Höhe von 3 Procent begehen, während die Cotta'sche Methode (Taf. I. u. III.) Fehler bis 20 Procent (s. S. 616 u. 617) und darüber zulässt. Bei ganz abschäftig gewachsenen Hölzern giebt indess jene Mittelwalze den Inhalt stets etwas zu klein. (S. S. 344.)

§. 449. Aus beiden Endstärken (d und D) wird man Baumschäfte nur dann genau genug kubiren, wenn sie einer der im dritten Buche betrachteten Kegelarten hinlänglich nahe kommen, in welchem Falle man die dort gegebenen Kubirungsregeln zu befolgen hat. — In der Messknechtssymbolik a) bei gestreckter oder gemeiner Kegelform: $(Sx_d + Sx_D + Sx_{d+D})\, l$; b) bei parabolisch vollholziger Form: $(Kr_d + Kr_D)\frac{l}{2}$. — Da aber am Stockende der Stamm die unregelmässigste Querfläche hat, kann in der Mehrzahl der Fälle die untere Stärke nicht genau genug abgenommen werden. Zudem variirt die Gestalt der Stammseiten vielfach zwischen den genannten Grenzen — der geraden Linie und der Parabel — und geht sogar nicht selten über beide hinaus. Bei derselben Länge und denselben Endflächen sind daher sehr verschiedene Stamminhalte möglich. Um sich

sonach bei der Kubirung aus den Endstärken in allen Einzelfällen der Wahrheit möglichst zu nähern, müsste man den Stamm stets als Kegelstutz berechnen und den so erhaltenen Inhalt durch eine erfahrungsmässig festgestellte, für jede Holz- und Wuchsart besondere, Formzahl entsprechend erhöhen.

Begnügt man sich aber mit der möglichsten Annäherung nur im grossen Durchschnitte oder in summarischer Hinsicht, so kann man eine brauchbare allgemeine Kubirung und Kubirungstafel dadurch herstellen, dass man, ausser bei Jung- und Stangenhölzern, den durch eine mittlere Formzahl modificirten Kegelstutzgehalt zu Grunde legt, wie Cotta in seinen weitverbreiteten Tafeln beabsichtigte.

Anmerkung. Dass die Cotta'sche Stangenkubirung nach Cotta's Taf. I. und Stammkubirung nach Cotta's Taf. III. dennoch, wie schon bemerkt ward, fehlerhaft arbeitet, hat seinen Grund darin: 1) in Bezug auf Tafel I., für unentwipfelte Stämme (Junghölzer), dass diese Tafel letztereals gemeine Vollkegel kubirt, wodurch, da sie Kegelstutze, in der Regel sogar etwas ausgebauchte Kegelstutze sind, ihr Inhalt von dieser Tafel viel zu gering angegeben wird (s. S. 615 u. 616); und 2) in Bezug auf Tafel III. für entwipfelte Stämme (der stärkeren Art), dass dieser Tafel eine unrichtige Kegelstutzberechnung zu Grunde liegt, welche ausser anderen praktisch bedenklichen Unzuträglichkeiten zur Folge hat, dass diese Tafel oft zwei bedeutend verschiedene Resultate giebt, wenn man einen Stamm in zwei Hälften und wenn man ihn im Ganzen berechnet; sowie, dass sie den höher oder schwächer entwipfelten Stamm *) nur wenig oder gar nicht inhaltsreicher, sehr häufig sogar kleiner angiebt, als das untere Stück desselben! (s. S. 617 u. 618.)

§. 450. Um aus zwei Stärken überhaupt den Inhalt der Stämme möglichst genau und consequent abzuleiten, muss man statt der unteren Endstärke die Stärke D in der Drittelshöhe und den Inhalt nach der Regel $(Kr_d + 3Kr_D)\frac{l}{4}$ ermitteln (S. 376). Diese schon von Hossfeld, neuerdings auch von Rieke **) empfohlene Methode giebt selbst für fei-

*) Von 0,6 der unteren Stärke an. Siehe des Verfassers Aufsatz über rationelle Holzkubirung im nächsten Tharander Jahrbuche 1854.

**) Rieke, Ueber die Berechnung unbeschlagener Baumstämme. Stuttgart 1849.

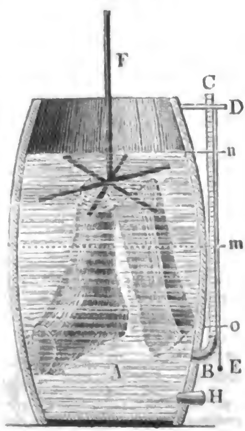
nere Wirthschaftszwecke den Inhalt genau genug, gleichviel, ob der Stamm abholzig oder mehr und weniger vollholzig ist, und verdient sonach selbst vor der Methode der Mittenwalze (§. 448) den Vorzug.

§. 451. Aus drei gemessenen Stärken — den beiden Endstärken d und D und der Mittenstärke δ — wird man aber allerdings nach den auf S. 384 erläuterten Wahrheiten mittels der Formel $(Sx_d + 4\,Sx_\delta + Sx_D)\,l$ den wahren Inhalt noch genauer treffen, einmal weil ein etwaiger Fehler in der Stärkenmessung sich eher compensirt, dann aber auch, weil diese Regel selbst die hohlseitige Stammform trifft.

§. 452. Wo es sich aber um die genaueste geometrische Kubirung, etwa zur Prüfung irgend einer (wirthschaftlich eingeführten) Stammberechnungsmethode handelt. wird man stets die S. 401 erläuterte Simpson'sche Körperregel unter Zugrundelegung von 4—10fussigen Sectionen anzuwenden haben. Denn die bisher gewöhnlich befolgte Specialkubirung, wobei die Sectionen als Walzen ihrer Mittenstärke berechnet wurden, giebt nur ein hinlänglich richtiges Resultat, wenn sämmtliche Sectionen vollholzig (ausgebaucht), dagegen ein stets zu kleines, wenn sie eingebaucht oder auch selbst bloss gestreckt sind. (S. S. 364.)

§. 453. Noch sicherer arbeitet jedoch die mechanische Methode der Wasseraichung; namentlich weil sie frei von etwaigen Fehlern der Stärkemessung ist. Es muss das Holz dabei freilich zerschnitten werden. Am einfachsten und zweckmässigsten baut man sich seinen Aichapparat wie beistehende Figur veranschaulicht, wo A ein Gefäss von 4 bis 6 Decimeter Weite und $1\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{4}$ Meter Höhe; B ein im Viertel der Höhe eingesetztes hohles Knie von Blech, BC eine wasserdicht darin befestigte Glasröhre, DE ein Pendel, H eine mit Hahn oder mit Stöpsel verschlossene Oeffnung (zum Auslassen des Wassers) bedeutet. Längs der Glasröhre wird auf der einen Seite ein Papierstreifen angeklebt, der, sobald die Kubikfussskala darauf getragen ist,

Fig. 446.



mit Lack überzogen wird. Die Skala erhält man wie folgt: Es wird ein Eimer oder sonstiges Schöpfgefäss sehr genau gewogen; dann mit reinem Fluss- oder Regenwasser so weit gefüllt, dass das Wasser genau die Hälfte dessen wiegt, was die *n*-Tabelle des Messknechts (s. S. 24) besagt; und dabei der Wasserstand mittels eines deutlichen Zeichens markirt. So hat man nun ein Maass für den halben Kubikfuss. — Das Aichfass wird dann so aufgestellt, dass die Röhre mit dem Pendel parallel steht, hierauf soweit mit Wasser gefüllt, bis dasselbe bei 0 in der Röhre zur Erscheinung kommt, und dieser unterste Stand mit Strich und Null bezeichnet. Wird nun immer ein halber Kubikfuss nach dem anderen hinzugegossen, und der Wasserstand bei jedem mittels Striches am Papierstreifen angemerkt, und jeder ganze Kubikfuss mit der ihm zugehörigen Ziffer 1, 2, 3 . . . . bezeichnet, so hat man eine Skala, an der man leicht jeden Stand bis auf $^1/_{10}$ Kubikfuss und genauer noch ablesen kann.

Der Gebrauch ist selbstverständlich. Wird das Fass auf dem Versuchsplatze so aufgestellt, dass die Röhre gegen das Pendel wiederum correkt steht, und etwa zur reichlichen Hälfte mit Wasser gefüllt; dann vor und nach dem jedesmaligen Untertauchen eines Holzstückes der Wasserstand (m u. n) abgelesen, so giebt die Differenz der beiden Ablesungen (m u. n) begreiflich das Volumen jeder eingetauchten Partie. — Am besten ist es wohl, statt des Fasses einen Cylinder aus (Zink-) Blech und zum Untertauchen einen Quirl F aus dünnen Eisenstäben zu nehmen.

§. 454. Beispiele aus dem Tharander Praktikum.

1. **Beispiel.** Das Probeexemplar eines Stangensortimentes hatte 40 Fuss Länge, $D = 4$ Zoll untere, $d = 1$ Zoll obere und $\delta = 2^1/_2$ Zoll mittlere Stärke, also gemeine Kegelform; $\left(\text{weil } \delta = \frac{D + d}{2}\right)$. Sonach ihr Inhalt, wenn die Zolle a) Decimalzolle, b) Duodecimalzolle sind?

a) Als Mittelwalze kubirt: $K_{2^1/_2} \times 40 = 0{,}049 \times 40 = 1{,}96$ Kubikfuss.

Als Kegelstumpf (nach S. 365) und also richtiger:

$$(S_1 + S_4 + S_5)\ 40 = \left.\begin{matrix}0{,}001\\ 21\\ 33\end{matrix}\right\} \times 40$$
$$= 0{,}055 \times 40 = 2{,}2 \text{ Kubikf.}$$

b) Nach Duodecimalmaass im ersteren Falle: $Kr_{2^1/_2} \times 40 = 0{,}034 \times 40 = 1{,}36$;

Im anderen Falle:

$$(Sx_1 + Sx_4 + Sx_5)\ 40 = \begin{array}{r} 0{,}001 \\ 0{,}015 \\ \underline{0{,}022} \\ 0{,}038 \times 40 = 1{,}52. \end{array}$$

Die Cotta'sche Tafel (III.) giebt 1,48 Kubikfuss. Dagegen die in Sachsen für Stangen vorschriftsmässige Tafel I. nur 1,16 Kubikfuss.

2. Beispiel. Um wieviel Procent giebt die Cotta'sche Tafel I. den Inhalt zweizölliger Stangen zu klein, wenn man die häufig $^3/_4$ Zoll betragende Wipfelstärke im Durchschnitte zu $^1/_2$ Zoll und die Seiten ganz gestreckt annimmt. — Da auf die Länge hierbei nichts ankommt, setze man $l = 10$; dann ist nach Cotta der Inhalt = 0,073; in Wahrheit aber $= (Sx_{^1/_2} + Sx_2 + Sx_{2^1/_2})\ 10 =$ 0,095 *), und zwar mindestens, weil häufig etwas Ausbauchung vorhanden ist. Die Tafel I. giebt also den Inhalt solcher Stangen um 24 Proc. zu klein an.

3. Beispiel. Ein 90 Fuss langer Tannenstamm des Tharander Waldes hatte am Stockende 27, am Zopfende 4 und in der Mitte 21 Zoll, also (da die geglichene Stärke $= 15^1/$) eine bedeutend ausgebauchte Form. — In 2 gleich lange Sectionen zertheilt gedacht, ergab sich die Mittelstärke der unteren zu 24 und die der oberen zu $15^3/_4$ Zoll. — Bei der Theilung aber in Sectionen von 10 zu 10 Fuss ergab die Messung für die ersten 8 Sectionen die 9 Stärken: 27, 26, $24^1/_2$, $23^3/_4$, $22^1/_2$, $20^1/_2$, $20^1/_4$, $13^1/_4$, $11^1/_2$, und für die (laut S. 402) gesondert zu kubirende 9te Section die Endstärken $11^1/_2$ und 4 und die Mittelstärke 7 Zoll. — Welche Zahl giebt des Stammes Inhalt am genauesten, und welche Zahlen geben die besprochenen Methoden?

a. Genaue Kubirung nach Simpson's Regel (s. S. 402).

Sextantenflächen

der ersten u. letzten	der übrigen ungeradstelligen	der geradstelligen Stärken.
$Sx_{11^1/_2} = 0{,}12$	$Sx_{20^1/_4} = 0{,}374$	$Sx_{13^1/_4} = 0{,}16$
„ $27 = 0{,}663$	„ $22^1/_2 = 0{,}46$	„ $20^1/_2 = 0{,}381$
Summa = 0,783	„ $24^1/_2 = 0{,}546$	„ $23^3/_4 = 0{,}515$
	Sa. = 1,380	„ $26 = 0{,}614$
	2,760 (2	Sa. = 1,670
		6,680 (4

*) Man nehme alle Stärken 10fach (s. S. 248).

Spitze $= 10 (Sx_4 + 4\,Sx_7 + Sx_{11 1/2}) = 10 (0{,}015 + 0{,}178 + 0{,}12)$
$= 3{,}13.$

Gesammt-Inhalt $= (0{,}78 + 2{,}76 + 6{,}68)\,20 +$ Spitze $= 204{,}4 + 3{,}1 = 207{,}5$ Kubikfuss.

b. Nach der Methode der Mittenwalze:
$90 \times Kr_{21} = 90 \times 2{,}405 = 216{,}5$ Kubikfuss.

c. Nach der Methode der Mittenwalze aus 2 Sectionen.
$(Kr_{15 3/4} + Kr_{24})\,45 = (1{,}353 + 3{,}142)\,45 = 202{,}3$ Kubikfss.

d. Aus beiden Endstärken nach der Cotta'schen Taf. III. aus dem Ganzen.
Zu $4 + 27 = 31$ Zoll sagt diese Tafel $64{,}5 \times 2 = 129$ Kbkf. (!)

e. Nach derselben Tafel in 2 Sectionen:

Obere Section
$4 + 21 = 25$ Zoll summ. Stärke, bei 45 Fss Länge $= 42$ Kbf.

Untere Section
$21 + 27 = 48$ Zll. summ. Stärke, bei 45 Fss. Länge $= 155$ „

Summa 197 Kbfss.

f. Nach der Hossfeld'schen Methode: aus der Stärke am Zopfende (9″) und der in Drittelshöhe (23³/₄″):

$$\frac{Kr_9 + 3\,Kr_{23 3/4}}{4}\,90 = \frac{0{,}44 + 9{,}22}{4}\,90 = 217$$

Kubikfuss.

g. Aus der Zopf-, Mitten- und Grund-Stärke nach Simpson's Regel:
$(Sx_4 + 4\,Sx_{21} + Sx_{27})\,90 = (0{,}015 + 1{,}604 + 0{,}663)\,90$
$= 205{,}4$ Kubikfuss.

Fig. 447.



4. Beispiel. Ein Fichtenschaft an der Köhlerhütte im Breitengrunde hatte am Grunde und von 5 zu 5 Fuss Länge gemessen die Stärken:

9,5; 8,0; 7,5; 7,2; 6,9; 6,6; 6,2; 5,8; 5,3; 4,8; 4,2; 3,6; 3;
(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13).

Wie gross sein Inhalt bei der Entwipfelung 4,2 u. 3″
a) nach den Cotta'schen Tafeln. b) nach der Mittenwalze. c. Nach der Simpson'schen Regel aus 3 Stärken. d) nach derselben Regel in Sectionen?

a. Nach der Cotta'schen Tafel hat das 50 Fuss lange Schaftstück von $9{,}5 + 4{,}2 = 13{,}7$ Zoll summar. End-

stärke 12,7 + 1,4 = 14,1 Kubikfuss; und das 60 Fuss lange von 9,5 + 3 = 12½ Zoll summar. Endstärke 10,8 + 1,3 = 12,1 Kubikfuss, also 2 Kubikfuss oder 14 Procent weniger! (Das nur 35 Fuss lange Stammstück von 9½ und 5,8 Zoll Endstärke kubirten diese Tafeln ebenfalls als 12,1 Kubikfuss!)

b. Nach der Mittenwalze ist der bei 4,2 Zoll entwipfelte 50 Fuss lange Stamm = $Kr_{6,8} \times 50 = 0{,}237 \times 50$ = 11,85 Kubikfuss, und das bei 3 Zoll entwipfelte 60 Fuss lange = $Kr_{6,2} \times 60 = 0{,}21 \times 60 = 12{,}6$ Kubikfuss.

c. Aus 3 Stärken = $(Sx_{4,2} + 4\ Sx_{6,6} + Sx_{9,5})\ 50 = (0{,}017 + 0{,}16 + 0{,}082)\ 50 = 12{,}9$ Kubikfuss; das andere: $(Sx_3 + 4\ Sx_{6,2} + Sx_{9,5})\ 60 = (0{,}008 + 0{,}14 + 0{,}082)\ 60 = 13{,}8$ Kubikfuss.

d. Nach der Simpson'schen Regel in Sectionen, das erstere $= [(Sx_{9,5} + Sx_{4,2}) + 2\,(Sx_{7,5} + Sx_{6,9} + Sx_{5,2} + Sx_{5,3}) + 4\,(Sx_8 + Sx_{7,2} + Sx_{6,6} + Sx_{5,8} + Sx_{4,8})]\ 10 = 1{,}193 \times 10 = 11{,}93$ Kubikf.; und das andere $= 11{,}93 + (Sx_{4,2} + 4\ Sx_{3,5} + Sx)\ 10 = 11{,}93 + 0{,}72 = 12{,}65$ Kubikfuss.

e. Die Wasseraichung ergab für den 50 Fuss langen Stamm 12,01 Kubikfuss, und für den 60 Fuss langen 12,85 Kubikfuss.

f. Die Mittenwalzen-Methode also gab jenen um 1½ Procent, diesen um 2 Procent falsch; während die Cotta'sche Methode, von den unzulässigen Widersprüchen abgesehen, für jenen einen Fehler von 16 Procent, für diesen von 7 Procent zuliess.

B. Das Kronenholz.

§. 455. Dass eine rein geometrische Kubirung der Astmasse unthunlich ist, scheint selbstverständlich. Sobald nicht der allerdings bequemste und sicherste Weg eingeschlagen werden kann, das Volumen dieser regellosen Massen auf dem rein mechanischen Wege der Aichung nach S. 614 zu ermitteln, muss man sich der im 27. Kapitel abgehandelten physikalisch-geometrischen Methoden bedienen und deshalb gestatten, dass der Knecht sich in der Gestalt einer guten Federwage eine Gehülfin beilege. Mit dieser im Bunde kann er dann nach folgenden Regeln arbeiten.

§. 456. Erste Methode. Mittels der allgemeinen Dichtigkeitszahlen (Specif.-Gew.-Methode). Scheide das Derbholz *) vom Reisigholze **) und

---

*) Nach unserer Auffassung: Alles Holz über 3 Zoll stark.

**) 3 Zoll stark und darunter.

wäge jedes dieser Sortimente. Ermittle hierauf von einem jeden derselben mittels der Spec.-Gewichts- und der Wasserdichtigkeits-Tabelle des Messknechts die Dichtigkeitszahl und dividire damit in das gefundene zugehörige Gewicht. (Zur Motivirung dieser Regel vergleiche S. 466 etc.).

Zusatz. In solchen Einzelfällen, wo das specif. Gewicht von dem, das der Messknecht angiebt, wesentlich abweicht, wird man hiernach ungenaue Resultate erhalten; im Durchschnitte dagegen immer richtig genug arbeiten.

Beispiel. Die Aeste einer sächs. Erle gaben im grünen Zustande 50 (Zoll-) Pfund Derb- und 58 Pfund Reisigholz. Wie gross wird hiernach der kubische Gehalt dieser Erlenkrone sein?

Laut rechter Oberecke der Vorderseite ist das
specif. Gew. des Erlenderbholzes grün $s = 0{,}82$
" " " " reisigholzes " $s_1 = 0{,}69$;
und laut n-Tabelle die sächs. Wasserdichtigkeit $= \delta = 45{,}4$ Zollpfund;
also Dichtigkeit d des Derbholzes
$= s\,\delta = 0{,}82 \,.\, 45{,}4 = 37{,}3$ Pfund,
Dichtigkeit d_1 des Reisigholzes
$= s_1\,\delta = 0{,}69 \,.\, 45{,}4 = 31{,}3$ "
Demnach das Volumen beider $= \frac{50}{37{,}3} + \frac{58}{31{,}3} = 1{,}3 + 1{,}9 = 3{,}2$ Kubikfuss.

§. 457. Zweite Methode. Mittels geometrisch kubirter Probestücke (Probestücken-Methode).

Nimm aus der gesammten Astmasse (V) Probestücke von mittlerer Stärke und solcher Form, dass sich nach den im 3. Buche abgehandelten stereometrischen Gesetzen ihr Volumen (v) hinlänglich genau finden lässt und kubire sie; bestimme ihr Gewicht (g), dann auch das (G) der ganzen Astmasse, und schliesse: Wie g zu G so v zu V, oder setze $V = v\,\frac{G}{g}$.

Zusatz. Dass diese Methode bei guter Ausführung in allen einzelnen Fällen sicherer arbeiten wird als die erstere, liegt auf der Hand. Noch grösser wird die Sicherheit, wenn das Holz in ein starkes und schwaches Sortiment getheilt und jedes für sich nach obiger Regel behandelt wird.

Beispiel. Die vorige Erlenkrone hatte ein Gewicht $G = 188$ Pfund; und drei mittlere Aststücke von 2; 2,2 und 2,4 Zoll Stärke und (beziehlich) 3, 4 und 5 Fuss Länge

wogen zusammen $g = 12{,}2$ Pfund. Also ist das Volumen V des Kronenholzes?

Die 3 cylindrischen Probestücke kubirt die Kr-Spalte des Knechtes, also:

1. Stück $= 3\ Kr_2 = 0{,}022$ *) $\times 3 = 0{,}066$
2. Stück $= 4\ Kr_{2,2} = 0{,}027 \times 4 = 0{,}108$
3. Stück $= 5\ Kr_{2,4} = 0{,}031 \times 5 = 0{,}160$

$v = 0{,}334$ Kubikfss.

$V = v \dfrac{G}{g} = 0{,}334 \dfrac{108}{12{,}2} = 2{,}96$ Kubikfuss; also 0,06 Kubikfuss weniger als nach der spec. Gewichts-Methode.

§. 458. **Dritte Methode. Nach erfahrungsmässigen Aufbereitungsgrössen (Aufbereitungs-Methode).**

Schichte das 2 bis 3 Fuss lang aufbereitete Reisig und Derbholz, am besten in Klafterform, gesondert auf; miss den Rauminhalt jedes Haufens und multiplicire denselben mit derjenigen Erfahrungszahl, welche die feste Holzmasse der aufbereiteten Reisig- und Knüppel- (beim Astholze gewöhnlich: „Zacken-") Klaftern im Procentsatze des Schichtraumes angiebt.

Damit dies leichte Verfahren gehörige Sicherheit gewähre, ist es allerdings nöthig, dass man selbstgemachte und locale Erfahrungen habe. In Ermangelung solcher kann man indess auch seinen Messknecht befragen, der sub 4 im Felde der Holzmesskunst uns also belehrt:

Aufgeschichtete Knüppel enthalten an Holzmasse im Maximum (wenn sie gerad, stark und nur 2 Fuss lang sind) 64 Procent; im Medium (bei mittlerer Beschaffenheit und 3 Fuss Länge) 58 Procent und im Minimum (wenn sie schwach, krumm und 5 Fuss lang sind) nur 44 Procent des Schichtraumes. Für Knüppelklaftern vom Astholze (Zackenklaftern) wird man, ausser etwa bei Tannen, Fichten und Lärchen, immer 5 Procent weniger rechnen können.

Hinsichts des geschichteten Reisigs berichtet uns der Knecht, dass dessen Masse zwischen 35 und 20 Procent liege, je nachdem es besonders massenhaltig (stark, gerad, nur 2 Fuss lang) oder besonders gering (schwach, sperrig, 3 Fuss lang) geklaftert oder in Wellen gebunden ist.

1. Beispiel. Das Derbholz und das Reisig einer Tannenkrone ward 3 Fuss lang aufbereitet, zwischen gewöhnlichen, 6 Fuss entfernten Klafterstöcken gesondert aufgeschichtet, wobei die Zackenschicht $^3/_4$ Fuss, die Reisig-

*) Grösserer Genauigkeit wegen immer den 10fachen Durchmesser in der Kr.-Spalte aufsuchen! (s. S. 248).

schicht $1\frac{1}{2}$ Fuss hoch ward. Wieviel Holzmasse hatte sonach diese Krone, wenn man bei der Schichtung eine mittlere Dichtigkeit inne zu halten bestrebt war?

Raumgehalt der Zacken $= 6 \times 3 \times \frac{3}{4} = 13\frac{1}{2}$ Kubikfss.,

„ des Reisigs $= 6 \times 3 \times 1\frac{1}{2} = 27$ „

Massenprocent von jenen, wenn man 3 Einheiten weniger als das Knüppel-Medium nimmt = 55; und vom Reisig 27; also

an Derbholz $= 13\frac{1}{2} \times 0{,}55 = 7{,}4$ Kubikfuss

„ Reisig $= 27 \times 0{,}27 = 7{,}3$ „

zusammen = 14,7 Kubikfuss.

(Die Wasseraichung ergab 13,8 Kubikfuss.)

C. Das unterirdische oder Wurzelholz.

2. Beispiel. Wenn die Reisigwellen 2 Fuss lang und 15 Zoll im Durchmesser aufbereitet werden. Wieviel feste Masse dann hat durchschnittlich 1 Schock?

Rauminhalt $= Kr._{15} \times 2 \times 60$ Knbikfuss = 147 Kubifuss.

darin im Max. 35 Procent $= 147 \,.\, 0{,}35 = 51$ Kubikfuss.

im Min. 20 Procent $= 147 \,.\, 0{,}20 = 29$ Kubikfuss.

§. 459. Die unterirdische Masse eines Baumes hängt nicht allein von Standort und Holzart, sondern auch von der Rodungsweise ab; und kann man in letzterer Hinsicht unterscheiden die Vollrodung, welche die Wurzeln bis zu 1 Zoll Stärke herab aufbereitet, und — in wirthschaftlichem Sinne — die volle Wurzelmasse liefert; gegenüber der Zweidrittels-, Halb-, Drittels-Rodung, wobei beziehlich nur $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ der vollen Masse gewonnen wird.

Das Kubirungsverfahren ist übrigens dem beim Astholze zu beobachtenden analog. Nur ist die Anwendung der ersten, nämlich der Specif.-Gewichts-Methode in so fern bedenklich, als die Dichtigkeit des Wurzelholzes sehr verschieden und die Aufstellung zuverlässiger allgemeiner Zahleu daher kaum mögiich ist.

1. Beispiel. (Nach der Probestücksmethode.) Das bis zu 1 Zoll gerodete Wurzelholz einer sächsischen Kiefer ward in starkes und schwaches sortirt. Jenes wog 145, dieses 55 Pfund. Einige mit Beile und Säge prismatisch geformte Probestücke hatten von ersterem 0,52 Kubikfuss Volum und $22\frac{1}{2}$ Pfund Gewicht; von letzterem 0,16 Kubikfuss und 5,3 Pfund Gewicht. Wie gross die volle Wurzelmasse dieses Baumes?

Es ist die Dichtigkeit (= Gewicht von 1 Kubikfuss) des

$$1.\ \text{Sortiments} = \frac{22{,}5}{0{,}52} = 43{,}3\ \text{Pfund.}$$

Dichtigkeit (= Gewicht von 1 Kubikfuss) des 2. Sortiments $= \frac{5,3}{0,16} = 33,1$ Pfund.

Also Masse des ersteren $\frac{145}{43,3} = 3,35$ Kubikfuss,

„ „ letzteren $\frac{55}{33,1} = 1,66$ „

Zusammen = 5,01 Kubikfuss.

2. Beispiel. (Nach der Aufbereitungsmethode.) Das zwischen zwei 6 Fuss von einander entfernten Pfählen aufgeklafterte 2 Fuss lang aufbereitete Wurzelholz einer Tanne schichtete sich zu 3 Fuss Höhe, also zu $6 \times 2 \times 3 = 36$ Kubikfuss auf, enthielt also, da der Knecht für Stockholz im Mittel 45 Procent angiebt, wenn wir für 40 nehmen, an fester Masse $36 \times 0,4 = 14,4$ Kubikfuss.

2. Die Wirthschaftssortimente.

§. 460. Das Derbholz besteht entweder aus ganzen Stämmen oder Stammstücken, die nach den Gesetzen des dritten Buches, meist auch ganz nach denen der Stammkubirung S. 612 etc. zu behandeln sind; oder aus Klafterholz.

Die Holzmasse einer Klafter aber bestimme:

a. Wenn du grosse Genauigkeit haben willst: Durch die Aich- oder die Probestückenmethode (s. S. 614 und Beispiel S. 619).

b. Wenn eine mittlere Genauigkeit genügt: Durch die specif. Gewichtsmethode nach den Messknechtszahlen der rechten Oberecke (welche mit denen der *n*-Tabelle multiplicirt die Holzdichtigkeit (S. 460) geben).

c. Wenn eine motivirte Schätzung ausreicht: Durch die Aufbereitungsmethode nach den Procentzahlen, die der Knecht sub 4 seines Feldes der Holzmesskunst aufstellt.

1. Beispiel. (Nach Regel b.) Eine sächsische $^6/_4$ ellige (3 Fuss Scheitlänge habende) Klafter Fichtenholz wog im grünen oder frischen Zustande 2840 Zollpfunde. Wieviel Masse hat sie?

Die Dichtigkeit dieses Holzes (Pfunde pro Kubikfuss) ist $= 0,79 \times 45,4 = 35,8$ Pfunde;

also Masse $= \frac{2840}{35,8} = 79$ Kubikfuss.

2. Beispiel. Dieselbe Klafter, welche aus Scheitholz bestand und deren Massenhaltigkeit als eine mittlere taxirt ward, nach Regel c zu kubiren.

Laut Knecht ist das Massenprocent einer 3fussigen Scheitklaf-

ter im Medium 73 Procent; und (da ihr Raum $= 6 \times 6 \times 3 = 108$ Kubikfuss) ihre Holzmasse $= 108 \times 0{,}73 = 78{,}8$ Kubikfuss.

§. 461. Alle anderen aufbereiteten Sortimente Reisig-, Wurzel-, Stockholz sind ebenfalls nach einer dieser drei Methoden zu kubiren; schwache rundförmige Nutzhölzer dagegen, z. B. Stangen, nach der Geometrie des Stamminhaltes (S. 614 etc).

Vierunddreissigstes Kapitel.

Der Baummassenschätzer.

§. 462. Bei der sichtlich speculativeren Richtung, welche der Waldbau und Holzhandel einzuschlagen beginnt, wird eine sichere Baumschätzung nicht bloss für den Forst- und Landwirth und den Holzspeculanten, sondern auch für eine namhafte Anzahl anderer Berufsarten, bald vielleicht für jeden Vorsteher einer technischen Oekonomie, möglicher Weise einmal selbst für den einer grösseren bürgerlichen Haushaltung, eine sehr nützliche, mitunter sogar nothwendige Kunst.

In Folge eines in der Theorie und Praxis des Forstwesens ziemlich allgemein waltenden Vorurtheils und in Folge einer bisher gangbaren ganz irrationellen Auffassung der Grundflächen und Formzahlen der Bäume ist diese auch zu weiteren Zwecken der Holztaxation so wichtige Kunst bisher sehr unentwickelt geblieben *), so dass einerseits selbst gebildete Forstleute eine auf mathematische Gesetze zu basirende genügende sichere Einschätzung der Baummassen für ein Ding der Unmöglichkeit erklären; andererseits das neueste und gegenwärtig vorzüglichste Schätzungsmittel, nämlich die auf Grund der speciellen Kubirung vieler Tausende von Stämmen zusammengestellten baierischen (von Stahl ins Preussische übersetzten) „Massentafeln“ nur für einen mittleren Wuchs und nur für einige Arten der Waldbäume den Inhalt anzugeben, dabei aber im Einzelnen Fehler von 15 und selbst mehr Procent nicht zu verhindern vermögen, wie sowohl des Verfassers Erfahrungen nachweisen, als auch aus dem Folgenden von selbst hervorgeht.

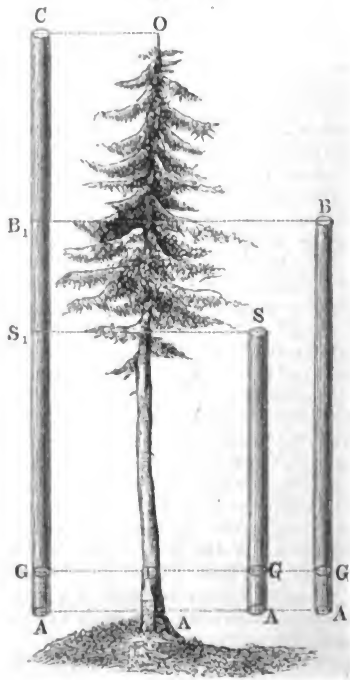
---

*) Siehe Tharander Jahrbuch, 9. Bd., S. 16 ff.

Die König'schen Tafeln hingegen, die der Verfasser — in Uebereinstimmung mit der Mehrzahl der Forstleute — lange Zeit als eine nutzbare Unterlage für die Baumschätzung erachtete, haben sich bei näherer theoretischer und praktischer Prüfung als unbrauchbar und um so fehlerhafter erwiesen, je mehr des Baumes Höhe sich von der Grösse 80 (Fuss) nach beiden Seiten hin entfernt.

So giebt z. B. König in Bezug auf den Holzgehalt mittelwüchsiger Fichten an, dass, wenn man des Baumes Grundstärke immer bei 4 Fuss, d. h. bei Brusthöhe misst, man aus der, dieser Fläche G und der ganzen Scheitelhöhe H des Baumes zugehörigen Scheitelwalze($G \times H$) den Bauminhalt ableitet, indem man den letzteren Inhalt ($= GH$) multiplicirt:

Fig. 448.



bei 80 Fuss hohen Stämmen mit (der Formzahl) 0,534 *),
" 40 " " " " " " 0,558,
" 10 " " " " " " 0,579.

Schon die einfachste Rechnung aber lehrt, dass nach der bisher gangbaren eben bemerkten Theorie und Praxis der Grundstärken und Formzahlen die letztere statt 0,579 vielmehr über 1,000 sein müsste, indem ja ein ganz kegelförmiger, also ganz abholziger 10 Fuss hoher Stamm ohne Aeste allein schon die Formzahl 0,93 hat, wie geometrisch leicht nachweisbar ist **). Was nützen da drei Decimalstellen, wo die erste vornehmste schon so ungeheuer falsch ist!

Aber auch wenn die Zahlen richtig wären, müsste die bisherige Praxis dennoch verlassen werden, weil, wie auch die That bewiesen hat, Niemand im Stande sein kann, die Formzahl eines Baumes einzuschätzen, wenn eine und dieselbe Wuchs- oder Formklasse, je nach des Baumes Höhe hundert verschiedene Formzahlen haben kann; weshalb denn heut zu Tage selbst ganz tüchtige Forsttaxatoren, wenn sie z. B. das Oberholz von Mittelwäldern oder überhaupt einzelne Bäume bis auf 10 Procent genau abzuschätzen in dem Falle sind, immer noch ohne die empirische, oft aber auch höchst trügliche Weisheit eines erfahrenen Holzmachers sich nicht zu Stande zu kommen getrauen.

§. 463. Der Messknecht beabsichtigt, das hinsichts der Baumschätzung gangbare Vorurtheil zu Schanden zu machen. Seine bisherigen Leistungen hier in Tharand haben Letzteres bereits gethan. Sie haben gezeigt, dass, wer mit der gehörigen forstmathematischen Einsicht nach seinen Vorschriften mit ihm arbeitet, leicht und schnell den Inhalt der Stämme und Bäume durchschnittlich bis auf 3 Procent anzugeben vermag. Sie haben aber vor Allem auch gezeigt, dass selbst der forstliche Laie, wenn er auch bloss nach der hier folgenden roheren Anleitung arbeitet, selten Fehler von mehr als $^1/_{20}$ oder 5 Procent begehen und sonach den Inhalt mittelgrosser Stämme durchschnittlich bis auf 1 und $1^1/_2$ Kubikfuss genau ansprechen wird, und zwar für fast jede Form des Wuchses und der Holzart.

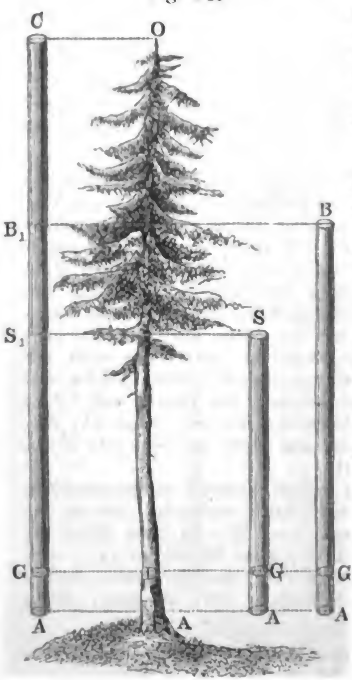
Ausser durch Benutzung einiger anderen mathematischen Gesetze vermag er dies hauptsächlich dadurch, dass er für ausgewachsene Hochwaldbäume von 80—90 Fuss Höhe die Grundstärke zwar auch auf die bequeme Brusthöhe (4 — $4^1/_2$ Fuss) bezieht, für alle anderen Höhen aber die Stärke mathematisch konsequent nicht sowohl in der absoluten Höhe

*) Vergleiche König's Hülfstafeln der Forstmathematik, S. 111.
**) Tharander Jahrbuch, 9. Bd., S. 21.

4—4½ Fuss, sondern immer in verhältnissmässiger, also immer bei $\frac{4}{80} = \frac{4\frac{1}{2}}{90} = \frac{1}{20}$ der Stammhöhe abnimmt. Dadurch allein ist es möglich, dass seine Formzahlen den Wuchs des Baumes oder Stammes derartig karakterisiren, dass derselben Form dieselbe Ziffer, und derselben Ziffer immer auch dieselbe Form, dem kegelförmigen Stamme z. B. immer die Zahl 37, dem parabolischen die Zahl 52 (Hundertel) entspricht, gleichviel ob des Baumes Höhe 100 Fuss oder 10 Fuss beträgt.

§. 464. Insofern der Messknecht durch seine Formzahltabelle im oberen Mittelfelde der Vorderseite einen sehr einfachen und selbst ohne forstliche Erfahrungen ziemlich sicheren Formschätzer abgiebt und insofern er sich mittels seiner *Kr.*- oder *K*-Spalte als Kreis- oder Walzentafel und mittels seines Pendels als zuverlässigen Höhenmesser bereits bethätigt hat, glaubt er nicht Unrecht zu haben, wenn er sich einbildet, dass er unter allen bisherigen Baumschätzgehülfen der einfachste und zugleich vollständigste sei und darum in der betreffenden Geschäftswelt eine recht freundliche Aufnahme finden werde.

Fig. 449.



§. 465. Behufs dieser seiner dendrometrischen Praxis wolle man sich nun vorerst folgende, auch zum Verständniss der weiteren Arbeiten des Messknechtes nöthige Beziehungen, Begriffe und Sätze merken.

Man verstehe künftighin, wenn nicht das Gegentheil besonders bemerkt ist, unter

Scheitelhöhe (*H*): des Baumes Höhe vom Wurzelhalse *A* bis zum obersten Punkte *O*;

Grundstärke (*D*): den bei $\frac{1}{20}$ der Scheitel-

höhe, also $\frac{H}{20}$ Fuss über dem Wurzelhalse, gemessenen Schaftdurchmesser;

Grundfläche, Stammgrund (G): die zu letzterem gehörende Kreisfläche;

Grundwalze (C): den mit dem Baume gleiche Grundstärke und gleiche Höhe besitzenden Cylinder C, oder das Volumen $G \cdot H$;

Stamm- oder Schaftmasse (S): des Stammes Inhalt von seinem obersten Punkte an bis zum Wurzelhalse. (Bei manchen Holzarten, z. B. Fichten, Tannen, Lärchen, reicht des Stammes oberer Endpunkt, das Zopfende, stets, bei Buchen, Eichen selten bis zum Scheitel O hinauf)

des Stammes oder Schaftes Formzahl (f_s): den Bruch, welcher den Stamminhalt im Verhältniss zur Grundwalze oder die Höhe AS der Stammwalze im Verhältniss zur Scheitelhöhe ausdrückt, und womit also die Masse der Grundwalze AC zu multipliciren wäre, um den Stamminhalt zu bekommen; der Messknecht drückt, wie fast Alles, auch diese Zahl immer im Procentsatze aus. Beim rein kegelförmigen Schafte ist sie z. B. $= 37$ (Hundertel), d. h. der ganz abholzige Stamm enthält 37 Procent der Grundwalze, oder ist $=$ einer Walze AS, deren Höhe 37 Procent der Scheitelhöhe $= 0{,}37\,H$ beträgt; diese letztere wesentlich von der Form abhängige Höhe ($f \cdot H$) des Stammes soll künftig die Formhöhe *) desselben heissen, und mit h_s bezeichnet werden;

Bauminhalt (B): die oberirdische Holzmasse des Baumes. Baumformzahl (f_b) der Procentsatz derselben im Verhältniss zur Grundwalze. Formhöhe des Baumes (h^b), die Höhe AB, auf welche die Scheitelhöhe durch die Formzahl reducirt, und dadurch die dem Bauminhalte gleichkommende Baumwalze AB erzeugt wird.

§. 466. Immer also ist des Baumes Formhöhe $AB =$ Scheitelhöhe $\times$ Baumformzahl; und des Schaftes Formhöhe $AS =$ Schafthöhe $\times$ Schaftformzahl; und

die Baummasse $=$ Baumwalze $AB =$ Grundfläche $\times$ (Baum-), Formhöhe, sowie ebenfalls

die Schaftmasse $=$ Schaftwalze $AS =$ Grundfläche $\times$ (Schaft-) Formhöhe.

---

*) Die nach dem Vorgange König's gebräuchliche „Richthöhe“ ist sonach von der Formhöhe des Messknechts dadurch verschieden, dass jene sich stets auf die in Brusthöhe, diese aber stets auf die in $^1/_{20}$ der Höhe gemessene Stammstärke bezieht.

1. Beispiel. Junge oder Stangenhölzer haben, wenn sie noch streckenden Wuchs besitzen, durchschnittlich die Schaftformzahl 40. Wieviel Schaftinhalt haben sonach, im Mittel, dergleichen Stämme von 60 Fuss Länge und 8 Decimalzoll Grundstärke (bei $^{60}/_{20}$ = 3 Fuss gemessen)?

Formhöhe = 60 × 0,40 = 24;
Grundfläche = K_8 = 0,453;

Stammmasse = 0,45 × 24 = 10,8 Kubikfuss.

2. Beispiel. Eine Eiche sei 90 Fuss hoch; bei $^{90}/_{20}$ = $4^1/_2$ Fuss Höhe $2^1/_4$ Fuss stark und mittelwüchsig, so dass ihr laut „Holzmesskunst" der Messknechtstafel die Baumformzahl 60 (Hundertel = $^6/_{10}$) und also die Baumformhöhe 9 × 6 = 54 zukommt. Wie gross ihr oberirdischer Gesammtinhalt?

Da die Grundfläche laut $K_{2^1/_4}$ = 6,0 □Fuss, folgt Bauminhalt = 6 × 54 = 324 Kubikfuss.

3. Beispiel. In beiden Fällen soll ein 2 Fuss hoher Stock belassen und nicht mit taxirt werden. Wie dann?

Man verkürzt die Formhöhe um die Stockhöhe, und erhält sonach für obigen Nadelstamm 0,45 × 22 = 9,9 Kubikfuss und für den Eichenstamm 6 × 52 = 312 Kubikfuss.

§. 467. Gewiss wird ein Jeder unserer Leser aus vorigem Paragraphen für die Praxis der Baumschätzung ganz von selbst folgende Regel ableiten:

Ermittelt man

1) des Stammes oder Baumes Formzahl (nach dem Felde „Holzmesskunst" der Messknechtstafel);
2) die Scheitelhöhe (nach Kap. 13) und daraus die Formhöhe (Scheitelhöhe × Formzahl);
3) die Grundstärke bei $^1/_{20}$ der Scheitelhöhe (nach S. 611) und daraus die Grundfläche (n. S. 248 etc.);

so giebt Grundfläche × Formhöhe die gesuchte Masse.

Die Leichtigkeit und Sicherheit dieser Schätzung hängt also von der Leichtigkeit und Sicherheit ab, mit der jene drei Ermittelungen bewirkt werden. Wir geben hierzu noch folgende praktische Winke.

§. 468. Formschätzung der Schäfte. (a. Nach rein mathematischen Grundsätzen.)

Der im dritten Buche abgehandelte gestreckte (gemeine) und ausgebauchte (parabolische) Kegel bildet die geometrische Basis der Stammformen. Des Knechtes Stammklasse II. repräsentirt die erste, d. h. die abschäftige oder abholzige Form, wobei der Schaft — wenigstens scheinbar — mit

gestreckten Seiten, d. h. also in der Weise des gemeinen Kegels bis zu einer unbedeutenden Wipfelstärke abfällt und in der Mitte halb so stark als am Grunde ist. Dagegen entspricht die Klasse IV., die vollholzige oder vollschaftige Stammform, der parabolischen Ausbauchung (s. S. 368), wonach der Stamm in der Mitte (Hauptmitte) 7 Zehntel so stark und in $^3/_4$ der Höhe (Obermitte) noch halb so stark als am Grunde ist.

Klasse III.: die mittelholzige oder mittelwüchsige Schaftform, zwischen dem gestreckten und parabolisch ausgebauchten Konoide stehend und in der Hauptmitte etwa 6 Zehntel der Grundstärke haltend (ist zugleich diejenige, welche bei forstmässiger Erziehung, d. h. in mässig geschlossenem Bestande, die im Höhenwuchse ziemlich vollendeten mittelalten, der Haubarkeit nahe stehenden Stämme anzunehmen pflegen).

Klasse I.: die äusserst abschäftige oder abholzige Form, ganz gestreckt und spitzig, fast hohlseitig, in der Mitte nur noch knapp die halbe Grundstärke besitzend und in ein ganz feines Wipfelende auslaufend (bildet die Barriere für das gewöhnliche Minimum) und

Klasse V.: die äusserst vollholzige, die Grenze für's Maximum (nur bei sehr alten, seit vielen Jahrzehnten ohne Höhewuchs vegetirenden Stämmen vorkommend), in der Mitte noch mit reichlich 8 Zehntel der Grundstärke, also in der unteren Hälfte fast walzenförmig aushaltend, und in der oberen parabolisch abfallend.

NB. Warum trotz dieser geometrischen und allgemeinen Klassificirung der Knecht für die einzelnen Holzarten besondere Formzahlen aufzustellen hatte, erklärt sich aus einer gewissen trotz und innerhalb der mathematischen Hauptformen möglichen und thatsächlichen individuellen Nüancirung der Stamm- und Bauminhalte. (Vergl. §. 470.)

§. 469. Formschätzung der Schäfte. (b. Das Alter in seinem Einflusse auf die Formzahl.)

Wer sich mit der Genauigkeit der S. 213 genannten Massentafeln, oder allgemeiner gesprochen, mit durchschnittlichen Mittelwerthen begnügen will, kann sich aller eigentlichen Formschätzung, aller geometrischen Phantasie und forstlichen Anschauung entschlagen, wenn er bei forstmässig, d. h. im Bestande erzogenen Bäumen sich lediglich nach dem Alter richtet.

Das Alter der Bäume wird nämlich dadurch ein Zeiger — Index — für die Form, dass vom jüngeren und mittleren Alter an der Höhenwuchs immer mehr abnimmt. In dem Maasse, als der Baum sich weniger streckt, wächst er namentlich in

seinem oberen Theile verhältnissmässig mehr in die Breite, wodurch nach und nach der kegelförmige (äusserst abholzige)

Fig. 450.



Fig. 451.



Stamm (S_I) mit der Formzahl 36 zum abholzigen (S_{II}) mit der Formzahl 42; der vollholzige (S_{IV}) mit der Formzahl 52 zum äusserst vollholzigen (S_V) mit der Formzahl 55—60 übergeht. — Ein sehr starker Formzuwachs findet namentlich auch dann statt, wenn der Höhenzuwuchs fast aufgehört hat, dabei aber noch eine ziemliche Kronenvegetation, besonders in der Nähe des sich flacher und breiter formenden Wipfels, vorhanden ist. (S. Fig. 451.)

Um diese Wahrheiten mit gehöriger Sicherheit und Einfachheit für die Baumschätzung zu verwenden, müssen wir uns vorerst noch über Folgendes verständigen.

Die schnellwüchsigen Holzarten, wie Pappel, Erle, Birke, theilweise auch Lärche und Kiefer, erreichen ihre forstliche Haubarkeit (s. folgendes Kapitel) durchschnittlich mit 60 Jahren; die mässigwüchsigen, wie Fichte, Tanne, theilweise auch Kiefer, mit 80—100 Jahren; die langsamwüchsigen, wie Buche und Eiche mit 100—150 Jahren. Es versteht sich hiernach von selbst, welches Alter unter „Haubarkeitsalter" gemeint sei. Unter mittlerem Alter wollen wir dann immer das halbe Haubarkeitsalter, unter

jüngerem das halbe mittlere oder viertel Haubarkeitsalter und unter dem ganz jungen oder jüngsten Alter das halbe jugendliche oder achtel Haubarkeitsalter verstehen; während das letztere um seine Hälfte erhöhte als hohes Alter und dieses um die Hälfte erhöhte als höchstes Alter aufgefasst werden möge *).

Die Kiefer, die mit dem 80. Jahre ihre Haubarkeit erreicht, ist also mit dem $80 + \frac{80}{2} = 120$. Jahre im hohen, mit dem $120 + \frac{120}{2} = 180$. Jahre im höchsten-, mit dem $\frac{80}{2} = 40$. Jahre im mittleren, mit dem $\frac{40}{2} = 20$. Jahre im jugendlichen und dem $\frac{20}{2} = 10$. Jahre im jüngsten Alter. Die Formzahlen der Klasse III. sub 1 und 2 der Holzmesskunst der Messknechtstafel, die „Mittelform des mässigen Schlusses", bezieht sich in dieser Karakteristik streng genommen nur auf das haubare Alter. Für das Jünglingsalter der Bäume ist Klasse II. die Mittelform der forstmässig im Bestande erzogenen Schäfte und Bäume; und fürs mittlere Alter fällt diese Mittelzahl zwischen II. und III.; fürs hohe Alter zwischen III. und IV. und fürs Greisenalter auf gutem Standorte und mit aushaltender Wipfelvegetation nach IV., hinsichts des Schaftes wohl auch nach V.; während die volle Baumformzahl V. den seltenen Abnormitäten angehört.

Mit Berücksichtigung dieser einfachen Karakteristik wird Jedermann, wenn er nur das Alter kennt, den Inhalt der Schäfte und Bäume von forstmässigem Durchschnittswuchse wesentlich genauer und sicherer einschätzen, als es nach den bisherigen Baum- und Waldmassentafeln jeder Art geschehen konnte. (Siehe die später folgenden Beispiele.)

§. 470. Formschätzung der Schäfte. (c. Die Holzart in ihrem Einfluss auf die Formzahl.)

Man mag die Formzahl nach den geometrischen Verhältnissen oder nach dem Alter, oder, was die meiste Sicherheit gewährt, mit gleichzeitiger Berücksichtigung beider einschätzen — immer ist es, namentlich bei der Schätzung nach dem Alter, nöthig, dass man auch die Holzart ins Auge fasse. Die Formzahltabelle des Messknechts weist durch ihre Klassifici-

*) Man würde Unrecht thun, eine bestimmte Systemisirung der Altersbegriffe für eine nutzlose Spielerei zu halten. Der logische Forstmann hat es sicherlich längst empfunden, wie Noth es thut, diese schwankenden Begriffe zu fixiren.

rung schon von selbst darauf hin, dass trotz einer anscheinend gleichen Formbeschaffenheit die verschiedenen Holzarten dennoch eine individuelle modificirte Massenhaltigkeit besitzen und sich in formfremde- u. formverwandte theilen. Die letzteren sind auf dem Knechte immer in eine Zeile zusammengefasst; dabei aber alle Arten, wie von oben nach unten, so auch von links nach rechts, so geordnet, dass die abholzigen den vollholzigeren voran stehen, und die Formzahl sich streng genommen nur auf letztere bezieht, für die ihr links stehende also entsprechend zu vermindern wäre (welche Verminderung bei runder bequemer Formzahl man dann lieber bei der Formhöhe anbringt). — So wird man für das Gesammtholz abschäftiger oder jugendlicher Saalweiden die Formzahl = 45, für dergleichen Birken 44, für dergleichen Lärchen = 43 nehmen; dagegen fürs Schaftholz allein: bei den Weiden 41, den Lärchen 40, den Birken 39, indem der Birkenschaft um deswillen abholziger als der der Lärche ist, weil erstere stets ein feineres Wipfelstück besitzt.

§. 471. Behufs der Formschätzung der Kronen bietet uns die Geometrie weniger Anhaltpunkte und müssen wir mehr auf die Betrachtung des Baumwachses, d. h. auf forstliche Anschauung und aufs Alter hinweisen.

I. Klasse. (Aeusserst dünnkronig oder äusserst abholzig): das gewöhnliche Minimum, das der Kronenbildung der betreffenden Holzart eigenthümlich ist.

II. Klasse. (Dünnkronig, abholzig): die Mittelform in solchen Beständen, die wegen unpassenden Standortes, oder zu sehr geschlossener Stellung u. s. w. in der Astbildung mangelhaft geblieben sind.

III. Klasse. (Mittelkronig, mittelholzig): die Mittelform bei forstmässiger Erziehung und mittlerem bis haubarem Alter im normalen Bestande.

IV. Klasse. (Vollkronig, vollholzig): jene stark ausgebildete Kronenform, wie sie bei räumlichem oder lichtem Stande und kräftiger Astvegetation sich zu bilden pflegt.

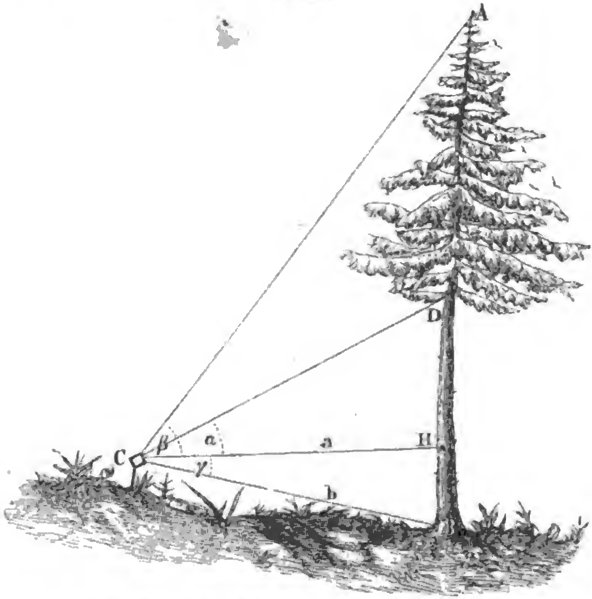
V. Klasse. (Aeusserst vollkronig oder vollholzig): jener ausserordentlich breite Wuchs, wie er zuweilen in mehr freiem Stande meist auf Kosten des Schaftes sich auszubilden vermag.

§. 472. Behufs der Formschätzung des ganzen (oberirdischen) Baumes ist nunmehr die Bedeutung der den Formzahlen der Messknechtstafel vorausstehenden kurzen Karakteristik hinlänglich klar geworden; und hätte man, dafern es sich um die Formzahl für die gesammte ober- und unterirdische Masse handelt, die dortigen Baumformzahlen

annoch um 1 bis 3 Zehntel ihrer Grösse zu erhöhen, wie der Knecht sub 3 jenes Feldes uns belehrt.

Die Formkarakteristik der nachfolgenden Fichte würde z. B. sein:

Fig. 452.



Stamm: „sehr abholzig", beinahe Stammklasse I. $= S_{I}$.

Krone: „mittelholzig", Kronenklasse III. $= K_{III}$.

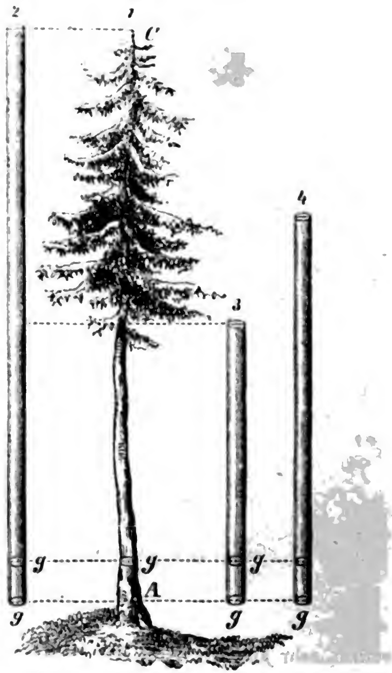
Baum: sehr „abschäftig und mittelkronig", also jedenfalls, da der Schaft überwiegenden Einfluss hat, nicht über die Baumklasse II. oder B_{II} hinausgehend. Die Baumformzahl wäre also 48 und die Stammformzahl allein 39 (Hundertel), wie die Formzahltabelle des Knechtes ausweist.

Um zu beurtheilen, ob statt 48 besser 47 oder 46 zu wählen, dazu gehört natürlich einige Erfahrung.

Die hier folgende zweite Fichte (s. Fig. 453 a. f. S.) entspricht dagegen ziemlich genau der zweiten Stamm- und Baumklasse: Abschäftig und dünnkronig, und lässt sich daher mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass die Formhöhe für das Schaftholz allein $=$ 42 Procent, und fürs Schaft- und

Astholz zusammen = 48 bis 49 Procent der Scheitelhöhe beträgt.

Fig. 453.

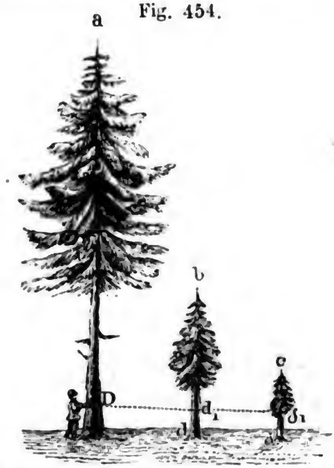


Und in der nachfolgenden Fig. 454 würde einzuschätzen sein die Fichte a) mit S_{I} K_{IV}; b) mit S_{II} K_{III}; c) mit S_{II} K_{II} also in die Baumklassen: a) B_{II}; b) B reichlich II; c) B netto II. Und die Tanne Fig. 455: S_{IV} K_{II} oder B reichlich III.

§. 473. Was weiter die Höhenmessung anlangt, so kann das im Kapitel 13 gelehrte allgemeine Verfahren ausserordentlich erleichtert werden, sobald man folgenden Rath befolgt.

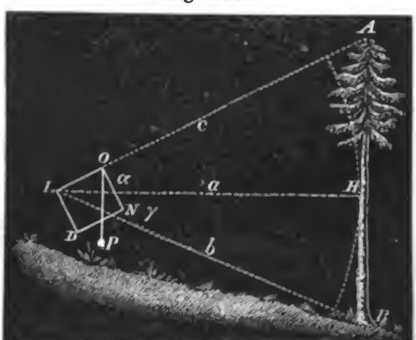
Wählt man seinen Standpunkt so, dass die horizontale Entfernung vom Baume, d. h. die Standlinienlänge, immer = 100 Einheiten (Doppelfusse, Fusse, Halbfusse) beträgt, so hat man ohne alle Multiplication des Baumes Scheitellänge im Falle der Figur 455 gleich der Summe der beiden vom

Fig. 454.



Pendel angegebenen Tangentenzahlen, und im Falle der Fig. 456 gleich der Differenz derselben (S. 217). Die schiefe Fussdi-

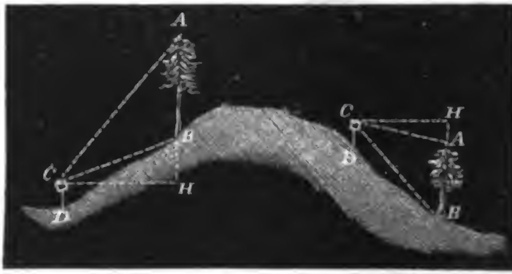
Fig. 455.



stanz *LB*, Fig. 455, u. *CB*, Fig. 456, ist aber die 100fache Secante (S. 112); und da dieselbe der Knecht beim Visiren ja eben auch ohne Weiteres angiebt (für scharfe Augen gleich auf der Pendel-, für andere auf der Gegenseite), so folgert sich daraus die bequemste Höhenmessung, die je existirt hat, in folgender Regel:

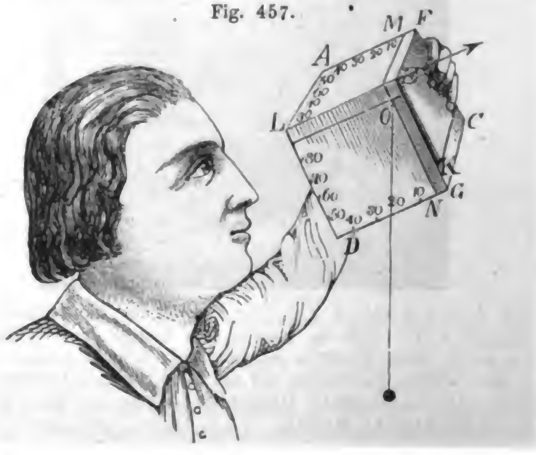
Befestige den Anfangspunkt deines Messbandes in beliebiger Stammhöhe; gehe darauf bis zum nächsten Punkte (seitwärts Fig. 445, unterhalb Fig. 456a, oberhalb Fig. 456b), der Fuss und Wipfel gut sehen lässt; visire von da nach des

Fig. 456 a. Fig. 456 b.



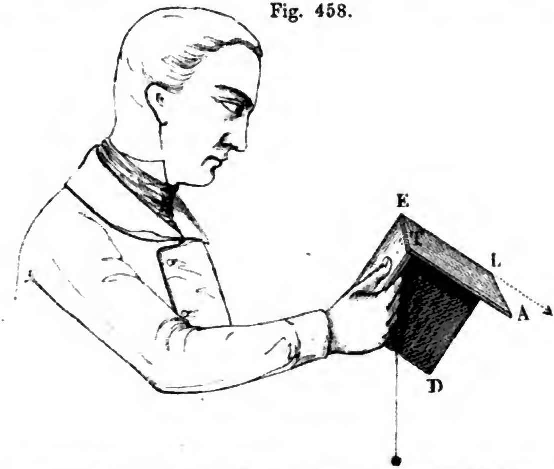
Bandes Anfangspunkte, lies die der Visur zugehörige Secantenzahl ab und nähere oder entferne deinen Standpunkt so, dass das bis zu deinem Auge gezogene Band gleich lang ist mit der vom Pendel angezeigten Secantenzahl seiner Neigung (wo dann die Standlinie oder Horizontaldistanz die Länge 100 hat).

Fig. 457.



Beobachte von da aus nach S. 183 u. 185 die Tangentenzahlen der Wipfel- und der Fuss-Visur;

Fig. 458.



und addire sie, wenn bei diesem Visiren mit beiden Händen nach Fig. 457 und nach Fig. 458; und subtrahire sie, wenn nur mit einer Hand, d. h. entweder nur nach Fig. 457 oder nur nach Fig. 458, gearbeitet wird.

Anmerkung. Statt des Bandes bedient sich der Verfasser mit Vortheil eines, auch zu Absteckungen von Bestandesproben sehr brauchbaren, auf einer kleinen Winde aufzurollenden, gefirnissten Bindfadens, in welchen der Seiler von 5 zu 5 Fuss Knoten und von 50 zu 50 Fuss rothe Tuchstreifchen eingeknüpft hat.

Beispiel. Ich wählte die Stellung oberhalb (wie in Fig. 456b) und der kurzen Entfernung wegen zur Längeneinheit den Halbfuss, so dass ich vorläufig eine Länge von 120 Halbfussen oder 60 Fussen Leine hatte. Mit dem Knechte in der rechten Hand nach dem tief liegenden Anfange der Messlinie visirt, zeigte das Pendel das Gradmaass 32° oder die Secante 118. Ich rückte demgemäss um ein Weniges näher, so dass jetzt die Linie bis zum Auge die Länge 118 (Halbfusse = 59 Fusse) besass, visirte wieder mittels rechter Hand (S. 185) nach dem Wipfel, wobei das Pendel die Tangentenzahl 6 gab, und dann nach dem Fusse des Baumes, wobei das Pendel auf die Tan-

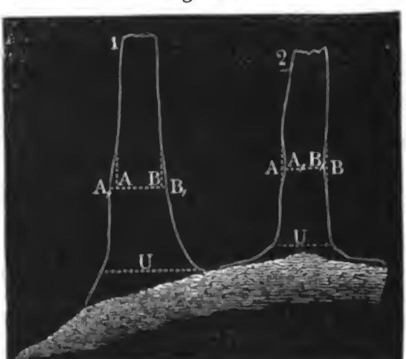
gente 82 einspielte. Und es ist sonach des Baumes Höhe = 82 — 6 = 76 Einheiten der Standlinie = 76 Halbfuss = 38 Fuss.

§. 474. Was endlich die Grundflächenmessung betrifft, so hat man dabei besonders genau und sorgfältig zu verfahren, weil auf die Kubirung der Masse M die Grundstärke im quadratischen Verhältnisse einwirkt ($M = 0{,}785\ D^2 \times$ Formhöhe). Ein Fehler von 5 Procent in der Formhöhe macht den Bauminhalt um 5 Procent, einer von 5 Procent in der Grundstärke dagegen um reichlich 10 Procent falsch ($1{,}05 \times 1{,}05 = 1{,}1025$). Bei 10 Zoll Grundstärke hat also ein Fehler von nur ½ Zoll im Durchmesser einen Fehler von 10 Procent der Masse zur Folge.

In der That giebt auch die K-Spalte die Grundfläche
bei 10 Zoll Durchmesser $= K_{10} = 78\frac{1}{2}$ □Zoll und
» $10\frac{1}{2}$ » » $= K_{10\frac{1}{2}} = 86\frac{3}{4}$ □ »
also letztere reichlich um den zehnten Theil der ersteren grösser.

Es kommt weit weniger darauf an, dass die Grundstärke sehr genau bei $\frac{H}{20}$, als dass sie vielmehr an einem Punkte abgenommen werde, wo der Querschnitt der Form und der Grösse nach am richtigsten der oberen Stammform entspricht. Dies würde bei 1 und bei 2, Fig. 459, in AB nicht der Fall sein, weshalb man da entweder höher hinaufzugehen, oder die ungleichförmige, der Gestalt des Oberstammes nicht entsprechende, Aus- oder Einbauchung hinweg- oder hinzuzuschätzen hat. Um nun ferner beim eigentlichen Messsungsgeschäfte keine Fehler zu begehen, beachte man die S. 611 gelehrten Vorschriften.

Fig. 459.



§. 475. Allgemeine Beispiele zur Vergleichung mit den baierischen Massentafeln nach der Stahl'schen Ausgabe derselben.

[**Vorbemerkung.** Die genannten Tafeln geben die Stärke in Brusthöhe an und verlangen also auch ihre Messung allda; ihre Höhe ist nicht die Scheitelhöhe, sondern die Höhe über dem $^1/_2$ bis $1\,^1/_2$ Fuss, im Mittel also 1 Fuss hoch gerechneten Stockabschnitte. Für 80 bis 90 Fuss, hohe Stämme kommt also jene Stärkenmessung mit der unseren bei $^1/_{0}$, hier $=$ 4 bis $4\,^1/_2$ ($=$ Brusthöhe) überein. Unsere Formzahlen geben aber den vollen oberirdischen Inhalt, d. h. vom Wurzelhalse an. Um die Masse genau so aufzufassen, wie es jene Tafeln thun, hätte man die Stammhöhe jener Tafeln um die Stockhöhe, im Mittel $=$ 1 Fuss, zu erhöhen und die nach dieser Scheitelhöhe vom Knechte abgeleitete Formhöhe wieder um die volle Stockhöhe, 1 Fuss, zu vermindern; was im Resultat ziemlich darauf herauskommt, dass die mit den Tafeln identisch genommene Stammhöhe mit der Formzahl multiplicirt und dann die so gefundene Formhöhe um $^3/_4$ bis $^1/_4$ Fuss verringert wird, je nachdem die Formzahl der grösseren oder kleineren Klasse angehört.

Auch für 60 Fuss hohe Stämme (excl. Stock) müsste Uebereinstimmung mit beiden Schätzungen herrschen, sobald wir bei der Messknechtstaxation Scheitelhöhen von 61 Fuss annehmen und ihre Formhöhe um 1 Fuss verringern, vorausgesetzt, dass überhaupt der mittlere Wuchs in den baierischen Wäldern derselbe ist, als der, worauf der Verfasser nach eigenen und dem **brauchbaren Theile** von **König's**, **Smalian's** und Anderer Erfahrungen seine Formzahlen gründete.]

1. **Beispiel.** Lärchenstämme im haubaren Alter bei 80 Fuss Höhe und $10\,^1/_2$ Zoll Grundstärke?

   Nach dem Knechte ist die Formzahl knapp 45 Hundertel oder $4\,^1/_2$ Zehntel; die Formhöhe also knapp $8 \times 4\,^1/_2 = 36$, wofür mit Abrechnung des Stockes 35 zu nehmen, also da $Kr_{10,75} = 0{,}60$ □Fuss, der Inhalt $= 3{,}5 \times 6 = 21{,}0$ Kubikfuss.

   Die Tafeln geben: Lärchen, 60 – 90 Jahre alt, ohne Aeste, bei 80 Fuss Höhe und $10\,^1/_2$ Zoll Durchmesser $= \dfrac{19{,}4 + 24{,}5}{2} = 22$ Kubikfuss.

2. **Beispiel.** Dieselben Stämme im hohen Alter?

   Nach dem Knechte die Formhöhe bei $S_{IV} = 0{,}48 \times 80 = 38{,}4$; wegen des Stockes knapp 38 zu nehmen, giebt knapp $38 \times 0{,}6 = 22\,^1/_4$ Kubikfuss.

   Die Tafeln geben: Lärchen über 90 Jahre alt, bei 80 Fuss Höhe und $10\,^1/_2$ Zoll Stärke $= \dfrac{20{,}0 + 23{,}6}{2} = 21{,}8$ Kubikfuss (also weniger?)

3. Beispiel. Tannen von 61 Fuss Höhe und 12 Zoll Grundstärke; welche Masse ohne den 1 Fuss hohen Stock?

Die Tafeln geben hier nur den Gehalt ohne Aeste, und zwar zu 23,7 Kubikfuss bei 60—90jährigen und 25 Kubikfuss bei älteren.

Der Knecht giebt für erstere (Formzahl 48; Formhöhe $= 48 \times 0{,}61 = 29{,}3$; Grundfläche $= 0{,}785$ □Fuss) den Inhalt $0{,}785 \times 28{,}3 = 22$ Kubikfuss; für letztere (Formzahl über 50; Formhöhe über die Hälfte $= 32$) den Inhalt $0{,}785 \times 31 = 24\frac{1}{2}$ Kubikfuss.

Den Gesammtinhalt aber giebt der Knecht für die haubaren ($f = 5\frac{1}{2}$ Zehntel, Formhöhe $= 33\frac{1}{2}$) zu $0{,}785 \times 32\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$ Kubikfuss, und für die älteren (Formhöhe zwischen $5\frac{1}{2}$ und 6 Zehntel der Scheitelhöhe, also etwa 37) zu $0{,}785 \times 36 = 27\frac{1}{2}$ Kubikfuss.

4. Beispiel. Buchen sammt Aesten von 60 Fuss Länge über dem Abschnitte und $13\frac{1}{2}$ Zoll Stärke a) im mittleren, b) im haubaren, und c) im hohen Alter?

Formzahlen: a) 58, b) 60, c) 63; Formhöhen also: a) $57 \times 0{,}61 = 35$; b) $60 \times 0{,}61 = 36\frac{1}{2}$; c) $63 \times 0{,}61 = 38\frac{1}{2}$; Grund $Kr_{13\frac{1}{2}} = 1{,}00$ □Fuss.

Masse: a) $1{,}00 \times 34 = 34$ Kubikfuss; b) $35\frac{1}{2}$ Kubikfuss; c) $37\frac{1}{2}$ Kubikfuss.

Die Tafeln geben: Buchen über 90 Jahre alt, also statt b) die Masse $\frac{31{,}1 + 36{,}3}{2} = 34$ Kubikfuss;

Die Tafeln geben: Buchen zwischen 60—90 Jahre oder statt a) die Masse $\frac{29 + 34}{2} = 31\frac{1}{2}$ Kubikfuss.

Die weitere Untersuchung der vorhandenen Uebereinstimmungen und Abweichungen dem Messknechtsherrn empfehlend, lassen wir zu weiterer Würdigung der beiden Schätzungsmittel folgen:

§. 476. Erfahrungs-Beispiele aus dem Tharander akademischen Praktikum.

Vorbemerkung. Die Höhen wurden sämmtlich mit dem Knechte aus freier Hand, die Stärken mit der Kluppe, und der wahre Inhalt nach der Fällung durch die Simpson'sche Regel (S. 399 und S. 404) oder durch das Aichgefäss (S. 614) ermittelt.

1. Beispiel. Taxation eines Fichtenstammes.

Auf dem Kienberge bei Tharand; in einem 90—100jähr. Fichtenbestande. Ein herrschender Stamm. Höhe 65 Fuss; Grundstärke (bei $\frac{65}{20} = 3\frac{1}{4}$ Fuss) $= 9\frac{1}{2}$ Zoll: die Schaft-

form zwischen mittel- und vollholzig, wonach ihm als Knechtesformzahl 48 zugesprochen ward, was auch mit der Altersformzahl ziemlich stimmt. Hiernach sein Schaftinhalt?

Grundfläche $= Kr_{9^1/_2} =$ 0,492 □Fuss; Formhöhe $=$ 65 . 0,48 $= 31^1/_4$ Fuss. Geschätzter Inhalt $= 0{,}492 \times 31^1/_4$ $= 15^1/_2$ Kubikfuss.

Und wenn ein $1^1/_4$ Fuss hoher Stock dem Wurzelholze verbleiben soll: $0{,}492 \times 30 = 14{,}8$ Kubikfuss.

1. Zusatz. Nach den „Massentafeln“ eingeschätzt, ergab sich nach 9 /₄ Zoll Brusthöhenstärke und 65 Fuss Höhe der Inhalt $= 14{,}1 + \frac{3{,}0}{4} = 14{,}8$ Kubikfuss, also da nur 64 Fuss Höhe für den abgeschnittenen Stamm zu rechnen ist: 14,6 Kubikfuss.

2. Zusatz. Die Messung nach der Fällung ergab: Wirkliche Höhe 65 Fuss; wirklichen Inhalt sammt Stock 16,1 Kubikfuss; ohne Stock 15,6 Kubikfuss.

2. Beispiel. Taxation eines grossen Tannenschaftes.

Auf Dorfhainer Revier. Alter sehr hoch oder über 150 Jahre. Stammform daher durch $^2/_3$ seiner Höhe sehr aushaltend, offenbar der vollholzigsten Tannenschaftform ganz nahe. Die Einschätzung geschah aber nach dem etwas roheren Systeme des alten Messknechts und gab als Formzahl 53, und als Scheitelhöhe 97 Fuss, und (bei $\frac{97}{20} = 5$ Fuss) die Grundstärke $26^3/_4$ Zoll; also wieviel Schaftgehalt mit Ausschluss eines $1^1/_2$ Fuss hohen Stockes?

Grundfläche $Kr_{26^3/_4}$ mittels der Sextantenspalte $=$ $0{,}65 . \times 6 = 3{,}90$ □Fuss; Formhöhe $= \frac{97 \times 53}{100} = 51^1/_2$ und nach Abzug des Stockes 50; geschätzter Inhalt $=$ 3,9 . 50 $=$ **195** Kubikfuss.

1. Zusatz. Nach den baierischen Tafeln eingeschätzt, war (die Stärke 27 Zoll, Höhe 95 Fuss) der Inhalt nur **167** Kbkfuss.

2. Zusatz. Hätte man nach den feiner nüancirten Formzahlen des gegenwärtigen Knechts angesprochen, würde man als Formhöhe $97 \times 0{,}56 = 54{,}3$ Fuss, also ohne Stock $52^1/_2$ Fuss und sonach als Stammgehalt $3{,}9 \times 52^1/_2$ $=$ **215** Kubikfuss geschätzt haben.

3. Zusatz. Nach der Fällung: Höhe $97^1/_2$ Fuss; Masse: ohne den $1^1/_2$ Fuss hohen Stock $=$ **213** Kubikfuss. (Vergleiche bie Rechnung S. 616 für das 90 Fuss lange Stück dieses Stammes.)

3. Beispiel. Taxation einer Erle.

Probebaum eines noch ziemlich gut wüchsigen, mittelalten Erlenbestandes des Breitengrundes bei Tharand. Reichlich mittelholzig; also reichlich B_{III} oder Baumformzahl = 57.

Höhe 78; Stärke in Brusthöhe $\left(= \frac{78}{20}\right)$ war $8\frac{1}{4}$ Zoll.

Geschätzter Inhalt an Stamm und Aesten?

Grundfläche = $Kr_{8\frac{1}{4}}$ = 0,37; Formhöhe = 78 × 0,57 = $44\frac{1}{2}$. Gesammtinhalt = 0,37 × $44\frac{1}{2}$ = $16\frac{1}{2}$ Kubikfuss; und ohne den $\frac{1}{2}$ Fuss hohen Stock = 0,37 × 44 = 16,3 Kubikfuss.

1. Zusatz. Nach Vorschrift der Massentafeln (S. 59 derselben) für $8\frac{1}{4}$" Durchmesser und $77\frac{1}{2}$ Fuss Höhe = 14,1 $+ \frac{3,1}{4}$ = 14,8 Kubikfuss.

2. Zusatz. Nach der Fällung: Höhe 79 Fuss und bei der Wasseraichung seines gesammten Schaft- und Kronenholzes ohne Stock 17,8 Kubikfuss.

4. Beispiel. Taxation einer Tanne.

In einem 80—90 Jahre alten Bestande auf dem Mauerhammer. Höhenwuchs längst ruhend; im Wipfel ziemlich breit von Krone und daher sehr vollholzig von Stamm, wenn auch, weil im Schlusse erwachsen, nur mittelholzig von Krone.

Geschätzte Stammklasse reichlich IV oder Formzahl 52,
„ Baumklasse eben IV „ „ 58.

Die Höhe ergab sich zu 63, die Grundstärke bei $\frac{63}{20}$ = 3 Fuss reichlich $13\frac{1}{2}$ Zoll und in Brusthöhe knapp $13\frac{1}{2}$ Zoll. Sonach der Inhalt an Stamm und Aesten?

Grundfläche = reichlich $Kr_{13\frac{1}{2}}$ = 1,00 □Fuss. Baumformhöhe = 63 × 0,58 = $36\frac{1}{2}$ Fuss. Oberirdischer Gesammtinhalt = 1,00 × $36\frac{1}{2}$ = 36,5 Kubikfuss. Für den Stamminhalt allein: Formhöhe = 63 × 0,52 = 32,8; Schaftmasse = 1,00 × 32,8 = 32,8 Kubikfuss; und endlich die Schaftmasse ohne den 1 Fuss hohen Stock = 1,00 × 32 = 32 Kubikfuss.

1. Zusatz. Die baierischen Massentafeln geben für den Gesammtinhalt der Tannen kein direktes Schätzungsmittel ab. Für den Schaft allein, aber ohne Stock, also für knapp $13\frac{1}{2}$ Zoll Stärke und 62 Fuss Länge, geben sie 28 Kubikfuss.

2. Zusatz. Nach der Fällung: Länge $63\frac{1}{2}$ Fuss; ganze Schaftmasse 31,9 Kubikfuss; Astholz 5,5 Kubikfuss; zusammen = 37,4 Kubikfuss. — Und der vom 1 Fuss

hohen Stocke abgetrennte Schaft allein, den die Massentafeln zu 28 Kubikfuss, der Knecht zu 32 Kubikfuss taxirten, hatte netto 31 Kubikfuss.

5. Beispiel. Taxation einer Eiche.

Eine in räumlicher Stellung erwachsene Eiche auf des Verfassers Berge; 60 Jahre alt, 58 Fuss (über dem 1 Fuss hohen Abschnitt) hoch, in Brusthöhe 11½ Zoll, hat nach den Massentafeln an Stamm und Aesten $\frac{21{,}0 + 26{,}8}{2} = 24$ Kubikfuss minus 10 Procent $= 21\frac{1}{2}$ Kubikfuss.

Mit dem Knechte angesprochen: Stammklasse zwischen III und IV; in der Krone aber abholzig; also Baumklasse knapp $\frac{III}{IV}$, also Formzahl 62; Formhöhe $= 58 \times 0{,}62$ (oder bequemer $60 \times 0{,}60) = 36$ Fuss; Inhalt $= Kr_{11\frac{1}{2}} \times 36 = 0{,}72 \times 36 = 26$ Kubikfuss.

Die Fällung ergab 25,3 Kubikfuss.

Fünfunddreissigstes Kapitel.

Der Messknecht als Baumzuwachsschätzer.

1. Der quantitative oder Massenzuwachs im Allgemeinen.

§. 477. Hat ein Baum die Masse $M = 40$ Kubikfuss und das Alter $A = 80$ Jahre, so kommt durchschnittlich auf jedes seiner Lebensjahre eine (wirthschaftliche) Holzproduktion von $\frac{M}{A} = \frac{40}{80} = 0{,}5$ Kubikfuss. Besass derselbe Baum nachweislich vor $n = 10$ Jahren die Masse $m = 34$ Kubikfuss, so war innerhalb dieser 10jährigen Periode seine jährliche Holzerzeugung im Mittel oder durchschnittlich $= \frac{M - m}{n} = \frac{40 - 36}{10} = 0{,}6$ Kubikfuss, bei einem mittleren oder durchschnittlichen Holzvorrathe $\frac{M + m}{2} = \frac{40 + 34}{2} = 37$ Kubikfuss. Ersteren (0,5) nennt man den (jährlichen) Durchschnitts-, letzteren (0,6) den (jährlichen) Periodenzu-

wachs. Und je weniger diese Periode Jahre zählt, je kleiner also n ist, desto richtiger drückt dieser periodische zugleich den laufenden Zuwachs desjenigen Alters aus, für das man die Untersuchung anstellt.

Die Massenzahlen M und m findet man entweder durch Kubirung nach Kapitel 33 oder durch Taxation nach Kapitel 34; das Alter aber durch Zählung der Jahresringe. (Bei Abzählung des Lebensalters auf dem Stockabschnitt hat man, je nach der Stockhöhe und Wüchsigkeit der Holzart den gezählten Jahren noch einige, etwa 3—6, aufzurechnen.)

1. Beispiel. Der Seite 642 kubirte 85jährige Tannenstamm hatte 37,4 Kubikfuss Masse, also an Durchschnittszuwachs?

$$\frac{37{,}4}{85} = 0{,}44 \text{ Kubikfuss.}$$

Zusatz. Dies ist der zur Benutzung kommende, wirthschaftliche; der natürliche würde das verloren gegangene Abfallholz mit begreifen müssen.

2. Beispiel. Der Probebaum eines 30jährigen Fichtenbestandes hatte 33 Fuss Scheitelhöhe, nach Abzählung der letzten 5 Höhentriebe aber nur 28 Fuss Höhe. Seine Grundstärke bei $\frac{30}{20} = 1\frac{1}{2}$ Fuss ergab sich zu $6\frac{1}{2}$ Zoll, und mittels Einkerbens 5 Jahre zuvor als $5\frac{1}{4}$ Zoll. Wenn nun bei so lebhaftem Höhenzuwachse eine Zunahme der Formzahl nicht anzunehmen, letztere also für beide Bäume gleich, und zwar etwa = 50 Hundertel, also die Formhöhe = $\frac{1}{2}$ Scheitelhöhe zu setzen war, so fand sich:

der gegenwärtige Masseninhalt

$$M = Kr_{6^1/_2} \times \frac{33}{2} = 0{,}23 \times \frac{33}{2} = 3{,}8 \text{ Kubikfuss};$$

der des 5 Jahre jüngeren Baumes

$$m = Kr_{5^1/_4} \times \frac{28}{2} = 0{,}15 \times 14 = 2.1 \text{ Kubikfuss.}$$

Sonach

der (jährliche) Durchschnittszuwachs des 25jährigen Baumes

$$\frac{m}{a} = \frac{2{,}1}{25} = 0{,}08 \text{ Kubikfuss};$$

der (jährliche) Durchschnittszuwachs des 30jährig. Baumes

$$= \frac{M}{A} = \frac{3{,}8}{30} = 0{,}13 \text{ Kubikfuss};$$

der laufende Zuwachs der letzten 5 Jahre im Mittel

$$= \frac{M-m}{n} = \frac{3{,}8 - 2{,}1}{5} = \frac{1{,}7}{5} = 0{,}34 \text{ Kubikfuss};$$

die Masse im Mittel der letzten 5 Jahre $= \frac{3,8+2,1}{2} = 2,95$ Kubikfuss;
das Verhältniss des laufenden Zuwachses zur Vorrathsmasse $= \frac{0,34}{2,95} = 34 : 295 = 0,12 = 12$ Hundertel oder 12 Procent.

1. Zusatz. Hätte man die Formzahl sehr fehlerhaft, oder nur die Schaftformzahl und diese $= 0,4$ geschätzt, so würde man haben:

frühere Schaftmasse $= 3,1$ Kubikfuss;
jetzige „ „ $= 1,7$ „ „

laufender Zuwachs $= \frac{3,1-1,7}{5} = 0,28$ Kubikfuss;

bei einer mittleren Masse von $\frac{3,1+1,7}{2} = 2,4$ Kubikfuss;

der Zuwachs also $= \frac{0,28}{2,4}$ der Masse, $= 28 : 240 = 0,12$ oder wieder 12 Procent.

2. Zusatz. Der Durchschnittszuwachs dieses starkwüchsigen Baumes wächst also noch in bedeutender Progression; ist aber beim 30jährigen Baume immer noch viel kleiner (0,08) als der laufende (0,34).

§. 478. Die Zahlen des laufenden Zuwachses bilden eine Reihe mit anfangs sehr kleinen, in der Jugend stark steigenden, später gleichbleibenden und dann abnehmenden Zahlen.

Bei einer anfangs steigenden, später fallenden Zahlenreihe, etwa wie

$$\underbrace{1}_{1},\ \underbrace{2}_{2},\ \underbrace{3}_{3},\ \underbrace{5}_{4},\ \underbrace{7}_{5},\ \underbrace{10}_{6},\ \underbrace{13}_{7},\ \underbrace{15}_{8},\ \underbrace{16}_{9},\ \underbrace{16}_{10},\ \underbrace{15}_{11},\ \underbrace{15}_{12},\ \underbrace{14}_{13},\ \underbrace{12}_{14},\ \underbrace{10}_{15},\ \underbrace{8}_{16},\ \underbrace{6}_{17},\ \underbrace{4}_{18},\ \underbrace{2}_{19},\ \underbrace{1}_{20},$$

muss bis zum Maximalpunkt 16 die durchschnittliche Grösse der Vorderglieder natürlich immer kleiner sein, als das laufende Glied. So ist hier der Durchschnittswerth der ersten 10 Glieder

$$= \frac{1+2+3+5+7+10+13+15+16+16}{10} = \frac{\text{Summe } 88}{10}$$

$= 8,8$, bedeutend kleiner als der Werth 16 des laufenden (10ten) Gliedes. Auch sieht man auf den ersten Blick, dass ziemlich weit über das Maximum 16 der einzelnen Glieder hinaus der Durchschnittswerth immer noch kleiner als der laufende bleiben wird, obgleich jener immer noch steigt, wenn auch letztere schon längst im Fallen begriffen war. Beim 14ten Gliede

z. B. ist der laufende Werth auf 12 herabgesunken, der durchschnittliche aber ist auf $\frac{145}{14} = 10\frac{1}{3}$ gestiegen. Beim 15ten aber ist ersterer auf 10 gefallen und letzterer auf $\frac{155}{15} = 10\frac{1}{2}$ gestiegen. Und von nun an sinkt das laufende Glied dieser Zahlenreihe immer stärker unter die Durchschnittsgrösse der Glieder, und letztere sinkt natürlich mit, weil nun immer kleinere Werthe zu ihr kommen; *sie hatte ihr Maximum erreicht, sobald sie mit der des laufenden Gliedes gleich geworden war.*

§. 479. Bis zum Maximalpunkte des laufenden Baumzuwachses muss also der Durchschnittszuwachs eines Jahres immer kleiner sein als der letztjährige; der *Durchschnittszuwachs* des jüngeren Baumes also immer kleiner als der *laufende*. Einige Zeit nach dem Maximalpunkte des letzteren muss aber eine Periode eintreten, wo der durchschnittliche dem laufenden gleichkommt, und bald darauf, da letzterer immer mehr abnimmt, die Periode, wo der laufende kleiner und immer kleiner als der durchschnittliche Zuwachs wird. Letzterer aber hat in jener Zeit, wo er dem laufenden gleich ist, seinen grössten Werth erlangt, und sinkt nun wieder, da nun ein immer kleinerer laufender hinzukommt. Will man also auf dem Raume, den der Baum einnimmt, durchschnittlich pro Jahr ein Maximum an Holzmasse erzeugen, so muss man den Baum in jener Periode oder jenem Alter fällen, wo der durchschnittliche Zuwachs und der laufende einander gleich geworden sind — „*Periode der forstlichen Haubarkeit*“, kurzweg auch „*Haubarkeitsalter*“ genannt.

NB. Um obiger Zahlenreihe einen anschaulichen Begriff unterzulegen, kann man ihre Grössen als Kubikfusse, ihre Zeiger als Jahrzehnte betrachten. Der Wuchs dieses Baumes käme dann etwa mit dem der sparsam wachsenden Arten (Buchen, Eichen) überein. Sein laufender Zuwachs erreichte sein Maximum nach dem 9ten Jahrzehent oder 90sten Jahre, mit der Höhe von $\frac{16}{10}$ Kubikfuss, oder 1,6 Kubikfuss pro Jahr. Sein Durchschnittszuwachs aber ist ein Grösstes erst zwischen dem 140sten und 150sten Jahre; dies Alter also das seiner forstlichen Haubarkeit.

Die Nadelhölzer haben dasselbe gemeiniglich zwischen 80 und 100, die edleren Laubhölzer, wie Buchen und Eichen, zwischen 100 und 150 Jahren.

Für das Haubarkeitsalter A ist also der Durchschnittszu-

wachs $\frac{M}{A}$ = dem in §. 477 erörterten laufenden Zuwachse $\frac{M-m}{n}$.

§. 480. Ist es nützlich und interessant für den Baumbesitzer, den laufenden Zuwachs mit dem durchschnittlichen vergleichen zu können, um zu wissen, ob und wann die forstliche Haubarkeit vorhanden ist, so ist es nicht minder nützlich, den laufenden Zuwachs $\frac{M-m}{n}$ als Procentzahl des zugehörigen Vorraths $\frac{M+m}{2}$ auszudrücken, wie man das bei Kapitalien thut. Wir finden den Formelausdruck sehr leicht, wenn wir schliessen: Laut §. 477 gehört

zum Fond $\frac{1}{2}\left(M+m\right)$ der Zuwachs $\frac{M-m}{n}$; also

" " 1 " " $\frac{M-m}{n} : \frac{1}{2}\,(M+m)$;

" " 100 " " $100 \times \frac{M-m}{n} : \frac{1}{2}(M+m)$

d. h. die Zuwachsmasse pro 100 Holzkapital oder das **Massenzuwachsprocent** findet sich durch die Regel: **Das 100fache des laufenden Zuwachses dividire durch den ihm zugehörigen Holzvorrath.** Oder, wenn man eine Periode von n Jahren zusammengefasst hat $\left(\text{da } 100 \times \frac{M-m}{n} \times \frac{2}{M+m} = \frac{200\ (M-m)}{n\ \ (M+m)}\right)$, auch so: **Die 200fache Differenz der früheren und jetzigen Masse dividire durch die $n$fache Summe beider Massen.**

§. 481. Und weil nach vorigem Paragraph zur Zeit der forstlichen Haubarkeit der laufende Zuwachs $= \frac{M}{A}$, so folgt nach obiger ersten Regel das Zuwachsprocent $= \frac{100\,M}{A} : M$ $= \frac{100}{A}$ oder die einfache Wahrheit *): **Das Massenzuwachsprocent jeder Holzart zur Zeit ihrer forstlichen Haubarkeit ist = Hundert dividirt durchs Haubarkeitsalter;**

---

*) Auf deren Bedeutung der Verfasser schon im Novemberhefte der Forst- und Jagdzeitung von 1853 das Publikum aufmerksam machte.

bei Weichhölzern also $\frac{100}{80}$ bis $\frac{100}{100}$, d. h. $1\frac{1}{4}$ bis 1 Procent,

bei Buchen und Eichen $\frac{100}{120}$ bis $\frac{100}{150}$ oder $\frac{5}{6}$ bis $\frac{2}{3}$ Procent.

§. 482. Bei vorherrschendem **Stammwuchse**, wie es in der Jugend meist der Fall ist, hat das Kronenholz verhältnissmässig etwas geringeren Zuwachs als das Schaftholz; bei zurücktretender Stammvergrösserung, z. B. im haubaren Alter, ist es umgekehrt. Dessenungeachtet kann man getrost zur Ermittelung des **Zuwachsprocentes** bloss den Schaft herbeiziehen, da dessen Holzvorrath in der Regel 5- bis 10mal grösser ist als der der Aeste. Denn gesetzt, die Stammuntersuchung ergäbe 3 Procent Zuwachs, die etwa 5mal so kleine Kronenmasse aber hätte ein volles Procent mehr, also 4 Procent, so würde des Baumes wirkliches oder mittleres Zuwachsprocent

$$= \frac{5 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{5 + 1} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6},$$

also gegen das des Stammes nur unbedeutend verschieden sein.

Wäre aber des Stammes Inhalt 40, und der der Krone = 5 Kubikfuss, also beider Verhältniss wie 8 zu 1 gewesen, so würde das wahre Zuwachsprocent $= \frac{8 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{9} = \frac{28}{9}$ $= 3\frac{1}{9}$, also der Fehler noch unbedeutender gewesen sein. Da aber, wenigstens nach meinen Erfahrungen, ein Unterschied von einer vollen Einheit im Zuwachsprocente des Stammes und der Krone, ausser vielleicht im Kindesalter des Baumes, kaum vorkommen dürfte, schwindet jener Fehler in der Wirklichkeit noch mehr zusammen.

§. 483. Aus diesen Wahrheiten leitet der Knecht für den gefällten Stamm folgende, für die wirthschaftlichen Zwecke vollkommen ausreichende, erfahrungsmässig sehr empfehlenswerthe einfache Methode zur

2. Messung des laufenden Massenzuwachses

im Procent- wie im Kubikfuss-Satze ab. Dieselbe lautet:

Angenommen, du wolltest die letzten 5 Jahre zusammenfassen, so schneide das 5- bis 6jährige Wipfelstück ab, so dass die Zopffläche des so entwipfelten Schaftes mindestens 5 Jahrringe zählt; denn es schadet nichts, wenn man ein wenig tiefer geht. Den gekappten Stamm säge in der Mitte durch, ermittle allda sorgfältig den jetzigen Durchmesser D (ohne Rinde) und den früheren d, und daraus das Zuwachsprocent mittels der

K-Spalte nach der Formel $\frac{200}{n} \cdot \frac{(\text{Kreis } D - \text{Kreis } d)}{(\text{Kreis } D + \text{Kreis } d)}$.

Beweis. Nach S. 647 ist das Zuwachsprocent $= \frac{M-m}{M+m} \times \frac{200}{n}$, was, wenn l die Länge des entwipfelten Stammes bedeutet, sich hier umwandelt in

$$\frac{lK_D - lK_d}{lK_D + lK_d} \, \frac{200}{n} = \frac{K_D - K_d}{K_D + K_d} \, \frac{200}{n}.$$

Wenn das Zerschneiden nicht statthaft, hilft man sich durch Entrinden der Mitte und Einkerben derselben; letzteres wo möglich auf zwei entgegengesetzten Punkten, indem die Stämme oft einseitigen Stärkenzuwachs haben.

Zusatz. Da der frühere Stamm fast stets abholziger als der spätere, so wird die Methode der Mittenwalze jenen, im Verhältniss wenigstens, etwas zu gering kubiren. Durch das abgeworfene Wipfelstück wird dieser kleine Fehler aber hinreichend ausgeglichen. Ein wenig Entwipfeln ist selbst bei mangelndem Höhenwuchse zweckmässig, weil die Mittenwalze dadurch die verhältnissmässigen Inhalte besser trifft (s. S. 612). Indess, selbst wenn jenes Ausgleichen nicht vollkommen statthätte, entstände insofern kein Nachtheil, als ja vom mittleren Alter an das Baumzuwachsprocent in der Regel ein klein wenig grösser ist, als das Stammzuwachsprocent.

Vollkommen genau erhält man letzteres übrigens selbstverständlich, wenn man den ganzen Schaft in kurze, höchstens 5 bis 6 Fuss lange, Sectionen zerschneidet, an allen Schnittpunkten die jetzige und die frühere Stärke (n Jahre zurück) genau abnimmt und nun beide Schaftmassen, die innere und die äussere (m und M), nach Simpson's Körperregel kubirt und in die bekannte Formel: $\frac{200\,(M-m)}{n\,(M+m)}$ setzt. Auch kann diese Methode stets zur Prüfung der oben angegebenen Regel angewendet werden.

§. 484. Beispiele.

1. Beispiel. (Zuwachsprocent.) Die Seite 642 taxirte 85jährige Tanne zeigte nach Wegnahme eines $5\frac{1}{2}$ Fuss langen Wipfelstückes am Zopfquerschnitte 20 Jahrringe, und hatte, in der Mitte entrindet, 9,4 Zoll äusseren, und nach Abzählung von 18 Jahrringen 7,9 Zoll früheren Durchmesser; also wieviel Procent jährlichen Holzzuwachs innerhalb der letzten 18 Jahre?

Nach der *Kr.*-Spalte ist:

$$\frac{200\ (Kr_{6,24} - Kr_{7,30})}{18\ (Kr_{6,24} + Kr_{7,30})} = \frac{200\ (48 - 34)}{18\ (48 + 34)} = \frac{2800}{1476} = 1{,}9$$

Procent jährlich.

Nach der speciellen Sectionskubirung ergab sich 1,8 Procent jährlich.

2. Beispiel. (Zuwachsmasse.) Vorstehender Baum hatte an Stamm und Aesten 37 Kubikfuss (s. S. 642); wieviel jährlichen Holzzuwachs im Durchschnitte der letzten 18 Jahre?

Ein Fond k, der mit 2 Procent zuwächst, hat laut Zins- und Zuwachsrechnung (S. 48) oder auch laut Nachwerthstafel in 1 Jahre an Zuwachsmasse $k \times 0{,}02$; also unser Baum: $37 \times 0{,}02$ (knapp), richtiger weil der Zuwachs 1,8 Proc., nur $37 \times 0{,}018 = 0{,}67$ Kubikfuss.

§. 485. Die eben angewandte Methode vermag der Knecht noch weiter zu vereinfachen mittels seiner *Min.*-Spalte des Zuwachstäfelchens in der linken Oberecke der Rückseite. Es hat damit folgende Bewandtniss.

Setzt man in obige Formel statt Kreis D etc. den gleichbedeutenden Werth $\frac{\pi}{4} D^2$ und $\frac{\pi}{4} d^2$, so verwandelt sie sich in $\frac{200\ (D^2 - d^2)}{n\ \ (D^2 + d^2)}$, wo natürlich D und d in jedem beliebigen Maasse gemessen sein können: nach Fussen, Zollen, Halbzollen, Centimetern etc. Man nehme nun den $n$jährigen Stärkenzuwachs selber zur Einheit, setze also den Unterschied der jetzigen und früheren Stärke $D - d$ oder die Summe der beiden entgegengesetzten n Jahre alten Aussenringbreiten $= a = 1$ und messe damit D; d. h. suche das Verhältniss $\frac{D}{a}$. Wären z. B. die beiden Zuwachsbreiten zusammen $= 1$ Zoll, und der jetzige Durchmesser $= 15$ Zoll, so wäre (15 Zoll gemessen mit 1 Zoll) $\frac{D}{a} = 15$. Hätte man aber nur $\frac{1}{4}$ Zoll auf jeder Seite eingekerbt, so wäre der Stärkenzuwachs der eben in Frage kommenden Periode $a = \frac{1}{2}$ Zoll, und der 15 Zoll lange Durchmesser, damit gemessen, gäbe $\frac{D}{a} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30$, oder D ist 30mal so gross als der Stärkenzuwachs. Sobald wir also den Stärkenzuwachs $a = D - d$ als Durchmessereinheit (also $D - d = 1$ oder $D - 1 = d$) annehmen und die solchergestalt erhaltene Grösse $\frac{D}{a}$ den relativen Durchmesser, den nach Zollen auf gewöhnliche Weise

bestimmten aber den **absoluten Durchmesser** nennen, kann man auch sagen: der **relative Durchmesser** (D') **ist gleich dem absoluten** (D), **dividirt durch den Stärkenzuwachs** (a). Der oben untersuchte Stamm hatte z. B. in der Mitte 9,4 Zoll absolute Stärke und (auf 18 Jahre) einen Stärkenzuwachs (9,4 — 7,9) von 1,5 Zoll, eine relative Stärke also von $D' = \frac{9,4}{1,5} = 94 : 15 = 6\frac{1}{4}$, d. h. wenn wir die jetzigen Durchmesser $D = 6\frac{1}{4}$ setzen, war der 18-jährige Durchmesserzuwachs $= 1$; der frühere Durchmesser d also $= D - 1$. Durch Einsetzung dieses, mit dem Stärkenzuwachs als Längeneinheit gemessenen relativen Durchmesserwerthes D' in obige Formel verwandelt sich dieselbe in $\frac{200\,(2\,D'-1)}{2D'\,(D'-1)+1} : n$, wo D' die äussere Stärke in der entrindeten Mitte des Stammes und nach Einheiten des Stärkenzuwachses gemessen, bedeutet. **Ist letzterer 1 Zoll (zählte man die Ringe** $\frac{1}{2}$ **Zoll einwärts), so ist** D' **= der Zollzahl des äusseren Durchmessers**; zählte man $\frac{1}{4}$ Zoll einwärts (Stärkenzuwachs $= \frac{1}{2}$ Zoll), so ist als D' die doppelte Zollzahl der äusseren Stärke, immer also obiges relative D' der Formel = dem dann in Zollen gemessenen absolutem D dividirt durch die in Zollen gemessene absolute Grösse der summirten beiden $n$jährigen Aussenringbreiten.

Den Theil $\frac{200\ (2\ D-1)}{2\ D\ (D-1)+1}$ unserer Procentformel kann man sich aber für alle Grössen des relativen Durchmessers vorräthig berechnen. Setzen wir nach und nach $D = 4$, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$ etc., so erhalten wir respective 56,0; 49,2; 43,8; 39,5 etc. Vergleicht man diese Resultate mit den Zahlen der (aus später zu erörternden Gründen — S. 659 — so benannten) *Minimums*-Tabelle der linken Oberecke auf der Rückseite des Messknechtes, so wird man sich von selbst die frühere Regel $\frac{200\ (\textit{Kreis } D - \textit{Kreis } d)}{\textit{Kreis } D + \textit{Kreis } d} : n$ in folgende bequemere umformen:

Suche in der Messknechts-Zuwachstafel die relative (mit dem n**jährigen Durchmesserzuwachse gemessene) Mittenstärke in der Eingangsspalte** D **auf und dividire die zugehörige** *Min(imum)*-**Zahl durch das Alter** n **der gewählten Aussenringbreite.**

§. 486. **Erfahrungsbeispiele.**

1. **Beispiel.** Der nach S. 648 entwipfelte und entrindete Stamm hatte in der Mitte 15 Zoll Stärke und auf dem halbzollbreiten Aussenringe auf der einen Seite 19, auf der anderen 21 Ringe, also begriff der 1 Zoll genommene

Stärkenzuwachs 20 Jahre in sich. Sonach ist das durchschnittliche Zuwachsprocent dieser Periode?

Relativer Durchmesser = 15; und zu 15 sagt die Zuwachstafel der linken Ecke 13,8, also pro Jahr 13,8 : 20 = 0,69 oder fast $^7/_{10}$ Procent.

2. Beispiel. Um den letztjährigen Zuwachs genauer zu treffen, maass man auf beiden Seiten den Aussenring des vorigen Stammes nur $^1/_4$ Zoll breit ab und fand hüben 11 und drüben 13, also im Mittel 12 Jahrringe. Sonach der Zuwachs in dieser Zeit?

Stärkenzuwachs = $^1/_4 + ^1/_4 = ^1/_2$ Zoll. D = 30mal so gross, oder: relatives $D = 15 : ^1/_2 = 30$. Zu D = 30 sagt die *Min.*-Skala der Zuwachstafel 6,8; macht pro Jahr = 6,8 : 12 = 0,57 Procent oder fast $^6/_{10}$ Procent.

3. Beispiel. Das Beispiel 1 des vorigen Paragraphen mit der Zuwachstafel des Messknechts zu lösen.

Absol. Aussenstärke = 9,4"; Stärkenzuw. = 9,4—7,9 = 1,5"
Relat. „ „ = 9,4 : 1,5 = 94 : 15 = 6$^1/_4$.

Zu $D = 6^1/_4$ sagt aber das Zuwachstäfelchen: 34,6; also da n = 18 war, pro Jahr 34,6 : 18 = 1,9 Procent wie dort.

3. Schätzung des laufenden Massenzuwachses.

§. 487. Nicht immer kann und soll der zu untersuchende Probebaum gefällt werden. Nicht immer braucht man auch die Zuwachsgrösse bis auf das Zehntel des Procentes genau. Der Fall ist sogar bei weitem häufiger, wo man sich mit einer Genauigkeit bis zu $^1/_4$, ja selbst bis zu $^1/_2$ des Procentsatzes begnügen mag, wenn nur der zu untersuchende Probebaum nicht erst gefällt zu werden braucht.

Für diese praktisch wichtigere Aufgabe der Schätzung des quantitativen Zuwachses bietet der Knecht in der linken Oberecke seiner Rückseite ein sehr einfaches und schnell wirkendes Hülfsmittel dar, dessen Construction und Gebrauch der Verfasser auf folgende, durch Fig. 460 bis 463 veranschaulichte mathematische Grundsätze und forstliche Erfahrungen gründet.

§. 488. In den nebenstehenden 4 Figuren sind die zwei Hauptstammformen, um die sich alle anderen mehr und weniger nahe gruppiren, dargestellt; links immer die ganz abholzige oder kegelförmige, rechts die vollholzige oder paraboloidische; die Stammformklassen S_{I} und S_{IV}. Es behalten aber die folgenden Sätze ihre Gültigkeit, auch wenn man sich andere, selbst geometrisch gesetzlose, konoidische Formen darunter denkt.

Das innere, schraffirte Konoid bedeutet den Stamm, wie

Fig. 460.



Fig. 461.

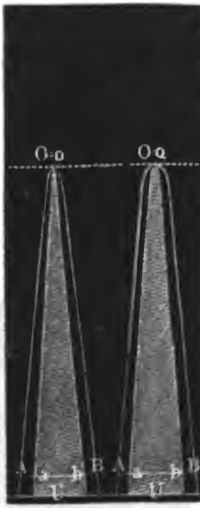
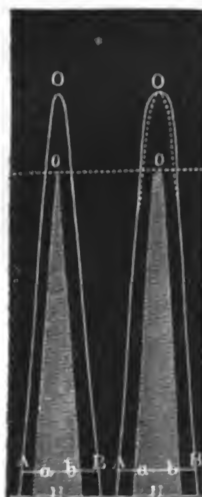


Fig. 462.



Fig. 463.



er vor *n* Jahren war, mit der Grundstärke $ab = d$, Grundfläche g, Höhe $Uo = h$ und dem Masseninhalte $= m$; und das ihn einhüllende äussere mit der Grundstärke $AB = D$, Grundfläche $= G$, Höhe $UO = H$ und Masse $= M$, den gegenwärtigen Stamm.

§. 489. Man unterscheide, zunächst in Bezug auf den (am Wipfelende des Stammes oder an den Wipfelzweigen der Krone augenfälligen) Höhenzuwachs, drei Wuchsklassen; die des fehlenden, des vollen und des mittleren Höhenwuchses.

Findet beim fehlenden Höhenwuchse, Fig. 464 die Stär-

Fig. 464.



Fig. 465.



kenzunahme längs des ganzen Schaftes ganz verhältnissmässig, also immer in dem Verhältnisse $d : D$ statt, so bleibt dabei der Kegel Kegel, das Paraboloid Paraboloid (s. S. 257); und überhaupt: es bleibt die Form und also auch die Formzahl und die Formhöhe dieselbe. Die Masse m des früheren Baumes ist $g \times$ Formhöhe; des späteren $M = G \times$ Formhöhe; also, weil die Formhöhen beider Bäume gleich geblieben sind, verhält sich $M : m$ wie $g : G$ oder wie d^2 D^2 — ein äusserst selten, nur bei hohem Alter und bereits sehr vollholziger Form stattfindendes Mi-

nimum. — Denn gewöhnlich findet in der oberen Hälfte ein verhältnissmässig weit grösserer Stärkenzuwachs statt, wie z. B. Fig. 465 versinnlicht, vermöge dessen die Form und Formzahl des früheren Baumes (und also auch dessen Formhöhe $h \times f$) in eine höhere Klasse rückt, das Zuwachsverhältniss also jedenfalls ein stärkeres ist, und bei solchen Holzarten, die zu breitem Wipfelwuchse und in Folge dessen zur Schaftvollholzigkeit geneigt sind (Tannen, Erlen), nahe bis $d^3 : D^3$, d. h. bis zum Verhältniss der dritten Potenzen der Grundstärken steigen kann. Doch sind bei mangelndem Höhenwuchse so starke Formzunahmen immerhin selten, und mehr nur für den Fall vorkommend, wenn man sehr viele Jahre zurückgeht*).

---

*) Die in König's Forstmathematik enthaltenen Zuwachs-Theorien und Tabellen, die unter Anderem auf dem Principe beruhen, dass beim mangelnden Höhenwuchse die Massen m und M nur im Verhältnisse von $d^2 : D^2$, und nur beim vollsten Höhenwuchse im Verhältnisse $d^3 : D^3$ zugenommen haben, sind sonach erheblich unrichtig und alle darauf construirten, detaillirten Schätzungstafeln mit ihren 5 Höhenwuchsklassen und 5 Reihen von Zuwachszahlen, welche auch der Verfasser, sich stützend auf König's forstliche Autorität, lange Zeit für baare Münze nahm, unbrauchbares Papier. — Ein Beispiel zum Beweise aus dem Tharander Praktikum. — Eine 80jährige, 65 Fuss hohe, vollschaftige Tanne mit seit 20 Jahren kaum 5 Zoll hohem, also fast schlafendem Höhentriebe, aber noch leidlicher Kronenvegetation, namentlich in der oberen Partie, hatte ohne Rinde $12^3/_4$ Zoll Grundstärke und auf dem halbzolligen Aussenringe auf der einen Seite 17, auf der anderen 19, also durchschnittlich 18 Jahre; also vor 18 Jahren $11^3/_4$ Zoll Grundstärke. Seine durch Zerschneiden und nach Simpson's Regel ermittelte frühere und jetzige Masse verhielt sich $m : M$ wie 100 : 122; wogegen sich das Quadrat der Grundstärken $d^2 : D^2$ wie $11^3/_4 \times 11^3/_4 : 12^3/_4 \times 12^3/_4$ nur wie 100 zu 111, und selbst der Würfel der Grundstärke $d^3 : D^3 = 11^3/_4{}^3 : 12^3/_4{}^3$ nur wie 100 : 121 verhielt. Nach König's Zuwachslehre könnte aber jenes Massenverhältniss 100 : 122 kaum beim vollen Höhenwuchse, der hier $\frac{65}{13} = 5$ Fuss betragen müsste, stattfinden! Freilich hatte dieser Stamm, dessen 18 Jahrringe am Grunde einen Durchmesserzuwachs von nur 1 Zoll zeigten, in 55 Fuss Höhe $3^1/_2$ Zoll Stärkenzuwachs in derselben Zeit gemacht.

Wenn d gegen D nur um wenige, etwa 5 Jahre zurückliegt, kann bei mangelndem Höhentriebe der Massenzuwachs von m auf M in der Regel nicht gar viel über dem Verhältnisse $d^2 : D^2$ liegen; und wird bei noch guter Kronenvegetation zumeist die Mitte zwischen den beiden Verhältnissen $\frac{d^2}{D^2}$ und $\frac{d^3}{D^3}$ halten.

§. 500. Beim vollsten Höhenwuchse dagegen, wie er bei Junghölzern vorkommt, kann die Höhe selbst im vollen Verhältnisse der Grundstärke, also h zu H wie d zu D, zunehmen, so dass $H = \frac{D}{d} h$ (1). Aus dieser Proportion $D : d = H : h$ kann man aber folgern: $D : (D-d) = H : (H-h)$, woraus $(H-h)$ = Voller Höhenzuwachs $= \frac{D-d}{D} H$ (2). — Wenn man so viele Jahre zurückgeht, bis d, die frühere Stärke, um 1 Zoll kleiner wird, als die jetzige D, so verwandelt sich obige Formel in $\frac{1}{D} H = \frac{H}{D}$ (3). Und wenn man nur $\frac{1}{4}$ Zoll einwärts zählt, wobei $D-d = \frac{1}{2}$ Zoll wird, in $\frac{H}{2D}$ (4). Und es liegt in den beiden Ausdrücken (3) und (4) das einfache Gesetz: Der volle Höhenwuchs des Baumes für die Periode des letztzolligen Stärkenzuwachses oder des letzten halbzolligen Aussenringes ist also immer gleich Scheitelhöhe in Fussen, dividirt durch die (jetzige) Grundstärke in Zollen $= \frac{H'}{D''}$; für den letzten Halbzoll Stärkenzuwachs oder wenn man nur die (n) Jahre auf $\frac{1}{4}$ Zoll einwärts zählt, ist derselbe $= \frac{H'}{2D''}$. Ganz junge Hölzer, so wie unterdrückte, die plötzlich lichter gestellt werden, strecken sich sogar noch über dieses Verhältniss hinaus. Vom jugendlichen Alter an und bei gleichförmigem Wuchse, oder wenn man bei wiedererwachtem Höhenwuchse nur wenige (2—3) Jahre zusammenfasst, kann man es indess als Maximum des Höhenwuchses ansehen, wenn der Höhenzuwachs dem entsprechenden Stärkenzuwachse proportional ist. D. h.: wenn der Stärkenunterschied der letzten n Jahre, d. i. $D-d = \frac{1}{10}$ oder $\frac{2}{10}$ oder $\frac{3}{10}$ der dermaligen Stärke ist, so ist der volle Höhenwuchs auch $= \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ der dermaligen Höhe. Z. B.: Hat man einen 60 Fuss hohen 15zolligen Stamm auf $\frac{1}{2}$ Zoll eingekerbt und 8 Jahrringe gefunden, so ist die Stärkendifferenz zwischen diesem Sonst und Jetzt = 1 Zoll $= \frac{1}{15} D$; der volle Höhenwuchs also $= \frac{1}{15} \cdot 60 = 4$ Fuss

auf diese 8 Jahre. — Hätte man nur $\frac{1}{4}$ Zoll zurückgezählt und dabei 5 Ringe gefunden, so wäre die Durchmesserdifferenz $= \frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{30}$ der jetzigen Stärke; die letzten 5 Wipfeltriebe müssten also $\frac{1}{30} \cdot 60 = 2$ Fuss lang sein, wenn der Stamm den vollen Höhenwuchs in dieser Periode gehabt hätte.

Der mittlere Höhenwuchs wird also der sein, der die Mitte hält zwischen dem vollen $\left(\frac{D-d}{D} H\right)$ und Null. S. Fig. 467.

Fig. 466.

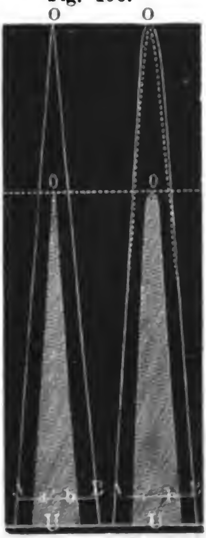
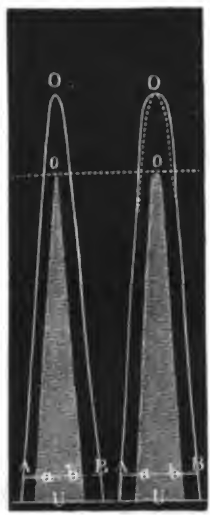


Fig. 467.



§. 501. Findet beim vollen Höhenwuchse, Fig. 466, keine Formveränderung statt, so verhalten sich die Stämme *m* und *M* wie die Produkte $\frac{\pi}{4} d^2 h f$ und $\frac{\pi}{4} D^2 H f$ oder wie $d^2 h : D^2 H$, oder wenn man für H seinen Werth aus (1) setzt, wie $d^2 h$: $D^2 . \frac{D}{d} h$, d. i. wie $d^2 : \frac{D^3}{d}$ und, wenn man dies Verhältniss mit d multiplicirt, wie die Würfel d^3 und D^3 ihrer Grundstärken.

Eine gleichzeitige Zunahme der Formzahl bei vorhandenem vollen Höhenwuchse (einen Zuwachs also, der das Verhältniss $d^3 : D^3$ übersteigt) hat der Verfasser noch nicht con-

statiren können; in der Regel findet im mittleren und haubaren Alter ein bedeutender Höhenwuchs nur ausnahmsweise in Folge lichterer Stellung statt und ist dann eher mit einer geringen Abnahme der Formzahl verknüpft, wie die punktirte Spitze in Fig. 466 andeutet; während die jugendlichen und abschäftigen Stämme ihre abschäftige Form, also auch ihre Formzahl, dabei behalten.

§. 502. Beim mittleren Höhenwuchse pflegt aber der Stamm selten ohne Zunahme der Formzahl zu sein, sondern pflegt — obgleich mässig — in der Regel gleichzeitig sich vollholziger zu formiren, so dass sich seine zunehmenden Massen meist auch ziemlich nahe wie $d^3 : D^3$ verhalten, mitunter sogar bei abnorm überwiegendem Breitenwuchse etwas darüber hinaus zu gehen, wie man sich durch die so leicht anzustellenden Messungen an solchen Bäumen, die bei mässigem Höhenwuchse doch sehr starken Astwuchs zeigen, überzeugen kann.

§. 503. Wir haben sonach etwa drei Zuwachsklassen zu unterscheiden.

1) Bei der einen mit fehlender Höhen- und Formzunahme, welche sehr selten und nur im hohen und höchsten Alter (S. 631) vorkommt, verhalten sich die frühere und spätere Masse wie die Quadrate der Grundstärken ($m : M = d^2 : D^2$); sie heisse die Minimumsklasse.
2) Bei der anderen mit voller Höhen-, doch ohne Formzunahme (im jugendlichen Alter), oder mit mittlerer Höhen- und mässiger Formzunahme (im mittleren Alter), oder mit geringer Höhen- und starker Formzunahme (im haubaren Alter, doch seltener) verhalten sich die erzeugten Massen wie die Würfel der Grundstärken ($m : M = d^3 : D^3$). Sie heisse die Maximumsklasse.
3) Bei der mittleren oder Mediumsklasse — mittlerer Höhen- ohne Formzunahme; sehr geringe Höhen- und Formzunahme; ohne Höhen-, aber mit mässigem Formzuwachse — kann man das Verhältniss als mehr oder weniger in der Mitte zwischen Minimum und Maximum liegend annehmen.

Führen wir nun in unsere Proportionen für das Minimum und Maximum des Zuwachses als D die S. 651 erläuterte relative Aussenstärke ein, wo $D - d = 1$ oder $d = D - 1$ ist, so hat man

$$m : M = (D-1)^2 : D^2 \qquad \text{und} \qquad m : M = (D-1)^3 : D^3$$

$$m = \frac{M(D-1)^2}{D^2} \qquad \qquad m = \frac{M(D-1)^3}{D^3}.$$

Setzt man diese Werthe in die (S. 647 entwickelte) allgemeine Zuwachsprocentformel $\frac{200\,(M-m)}{(M+m)} : n$; so erhält man fürs Min. $\frac{200\,[D^2-(D-1)^2]}{D^2+(D-1)^2} : n$; fürs Maximum: $\frac{200\,[D^3-(D-1)^3]}{D^3+(D-1)^3} : n$; und wenn man nach und nach für D die vorkommenden Stärken 4, 5, 6, 7 u. s. w. setzt, so erfolgen die Procentzahlen:

D.	Minim.-Proc.	Max.-Proc.
4	56	81,3
5	43,8	64,5
6	36,1	53,4
7	30,6	45,4

welche man mit dem Anfangsstücke des Zuwachstäfelchens in der linken Oberecke der Messknechtsrückseite vergleichen wolle.

§. 506. Der aufmerksame Leser, dem sich nun auch der §. 485 vollständig aufklärt, wird sich aus alledem vielleicht von selbst schon als Richtschnur für die Zuwachsschätzung stehender Stämme und Bäume (S. 648) die nöthigen Regeln und Wahrheiten in folgenden praktisch geformten Satz zusammenfassen:

Mittels eines scharfen Meissels oder kleiner Säge kerbt man in der Nähe des Stammgrundes, etwa dort, wo der Stamm dem unregelmässigen Wurzelanlaufe entwachsen ist, an zwei einander gegenüberliegenden Punkten ein, zählt an beiden eine gleiche — aber nicht grosse — Anzahl n von Jahrringen ab; misst sorgfältig mittels eines feingetheilten Zollstäbchens beide Breiten und dividirt mit deren Summe in den gegenwärtigen Durchmesser des entrindet gedachten Stammes. Die so erhaltene (relative) Durchmesserstärke sucht man in der Spalte D der Zuwachstafel des Knechtes auf und dividirt das ihm zugehörige Minimum und Maximum durch die Zahl n der abgezählten Jahrringe. — Hiermit ist das durchschnittl. jährl. Zuwachsprocent dieser $n$jährigen Wuchsperiode in zwei feste Grenzwerthe eingefangen, innerhalb deren er liegen muss, und innerhalb deren man seine wahre Grösse dadurch näher bestimmt, dass man, den Lehren von S. 654 bis 658 gemäss, an der Vegetation des Baumes schätzt, ob dieselbe in der Wuchsklasse Minimum, Medium oder Maximum, oder dazwischen liege.

1. Zusatz. Man hüte sich dabei ja vor dem von König gelehrten Irrthume, das Maximum des Zuwachses nur dort zu

suchen, wo der Höhenwuchs ein voller, d. h. $= H \times \frac{D-d}{D}$ und für die Periode des letztzolligen Stärkenzuwaches $= \frac{H \text{ Fusse}}{D \text{ Zolle}}$ ist.

2. Zusatz. Wenn sich in der Einkerbhöhe bedenkliche Unregelmässigkeiten in den Jahrringen vorfinden, gehe man höher hinauf, bedenke aber, dass, je weiter man nach des Stammes Mitte, man auch um so mehr nach der *Min.*-Tabelle rückt (s. §. 485).

3. Zusatz. Für die Aussenringbreite $Aa = bB = \frac{1}{2}$ Zoll (Fig. 464 bis 465) sucht man die wirkliche, für $Aa = bB = \frac{1}{4}$ Zoll die doppelte, für $Aa = bB = 1$ Zoll die halbe Zollzahl des äusseren Durchmessers als das D in der Tabelle auf.

§. 507. Erfahrungsbeispiele (aus dem Tharander Praktikum).

1. Beispiel. Der Probebaum eines haubaren Tannenbestandes des Tharander Reviers hatte 65 Fuss Höhe und in Brusthöhe ohne Rinde $12\frac{1}{2}$ Zoll Stärke; auf dem letzten Halbzolle 14 Jahrringe und dabei äusserst wenig Höhenwuchs, aber sehr breiten Kronen- und sehr vollholzigen Stammwipfel. — Nach $D = 12\frac{1}{2}$ giebt die Zuwachstabelle pro Jahr mindestens $\frac{16,6}{14}$, höchstens $\frac{24,9}{14}$, d. i. mindestens 1,2, höchstens 1,8 Procent.

Wir schätzten die Wuchsklasse als Medium, den Zuwachs also auf 1,5 Procent. Der am gefällten Stamme gemessene ergab sich aber (in Folge des starken Formzuwachses und der grossen Jahrringzahl 14; s. S. 558) als das Maximum, nämlich als 1,8 Procent.

2. Beispiel. Probestamm eines zum Abtriebe angesetzten Erlenbestandes des Breitengrundes. Am Stammgrunde, entrindet gedacht, 8 Zoll Stärke; auf dem Viertelzoll an der einen Seite $3\frac{1}{4}$, an der anderen knapp 3 (durchschnittlich also 3) Jahrringe. Höhenwuchs zwar unter mittel; übrige Vegetation aber noch lebhaft; geschätzte Zuwachsklasse: reichlich Medium. Wie hoch hiernach der Massenzuwachs dieses Stammes?

$D = 8 : \frac{1}{2} = 16$mal so gross als der ($\frac{1}{2}$ Zoll grosse) Stärkenzuwachs. Zu $D = 16$ giebt des Messknechtes Zuwachstafel das Min. 12,9 und das Max. 19,3; mithin pro Jahr $\frac{12,9}{3}$ bis $\frac{19,3}{3}$ oder 4,3 bis 6,4 (Procent), wovon das Medium als

Schätzungsresultat: reichlich 5 Procent.

Zusatz. Der secirte Schaft ergab ohne Rinde 14,1 Kubikfuss; und der 3 Jahre jüngere 12,2 Kubikfuss; also der jährliche Zuwachs in dieser 3jährigen Periode in Wahrheit $= \frac{200\,(M-m)}{n\,(M+m)} = \frac{200\;.\;1{,}9}{3\,(26{,}3)} = 4{,}9$ Procent.

3. Beispiel. Eine der vollsten Wuchsklasse noch angehörige 15jähr. Kiefer von $6\frac{1}{2}$ Zoll Grundstärke ohne Rinde, hatte gleichförmig einen Ring von $\frac{3}{8}$ Zoll Breite im letzten Jahre angesetzt. Wie gross war hiernach ihr letztjähriger Zuwachs?

Ganzer Stärkenzuwachs $= \frac{3}{4}$ Zoll. Jetzige Stärke $=$

$6\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \times \frac{4}{3} = 8\frac{2}{3}$ mal so gross als der Stärkenzuwachs, also relatives $D = 8\frac{2}{3}$, wozu die Zuwachstafel sagt: Laufender Zuwachs $=$ 36 bis 37 Procent der vorhandenen Masse.

4. Beispiel. Ein 60jähriger in Hauung gestellter Fichtenbestand, im Allgemeinen von sehr geringer und ungleichförmiger Beschaffenheit, war einige, etwa 5, Jahre vor der Untersuchung stark durchforstet und dadurch der eingeschlafene Höhentrieb von Neuem erweckt worden. Noch waren unterdrückte und beherrschte Stämme genug vorhanden, um deutlich drei Stammbonitäten wahrzunehmen. Es ward zunächst von der dominirenden Klasse ein 52 Fuss hoher Stamm eingekerbt. Seine nakte Stärke war netto 7 Zoll; und auf dem Halbzolle hatte er einerseits 21, andererseits 24 Ringe. Wir nahmen 22 als richtig an. — Hiernach hatte dieser Stamm (da der Stärkenzuwachs $= 1$ Zoll $= 1$, und $D = 7$ Zoll) nach dem $D = 7$ der Zuwachstafel in dieser 22jährigen Wachsthumsperiode durchschnittlich pro Jahr mindestens $\frac{30{,}6}{22} = 1{,}4$

Procent und höchstens $= \frac{45{,}4}{22} = 2{,}2$ Procent; und wegen des bis vor einigen Jahren ruhend gewesenen Höhenwuchses und bei der Mittelholzigkeit des Stammes höchst wahrscheinlich das Mittel 1,8 Procent. Da sich aber an der Beschaffenheit der letzten Jahrringe und Höhentriebe wahrnehmen liess, dass der Baum in Folge der Durchforstung in die vollste Zuwachsklasse getreten war, würde jener grosse Durchschnitt von 17—19 mageren und 6 bis 5 fetten Jahren ein der Gegenwart durchaus nicht entsprechendes Maass abgeben. Wir fassten sonach nur die letzten 4 Jahrringe zusammen und fanden sie auf der einen Seite reichlich 0,20 Zoll und auf der anderen 0,17 Zoll, zusammen also 0,37 Zoll breit. Die rela-

tive Grundstärke war demnach $D = 7 : 0{,}37 = 700 : 37 = 19$. Des Knechtes Zuwachstafel giebt dazu das Maximum 16,2, also pro Jahr $\frac{16{,}2}{4} = 4$ Procent.

1. Zusatz. Der gefällte Stamm, speciell kubirt, ergab an nackter Masse gegenwärtig 10,8 Kubikfuss; 4 Jahre zuvor 9,3 Kubikfuss, also $\frac{200\,(M-m)}{n\,(M+m)} = \frac{300}{80{,}4} = 3{,}7$ %. Man hatte also die Zuwachsklasse etwas zu hoch gegriffen. Der Höhentrieb der letzten 4 Jahre war $= 2\frac{1}{2}$ Fuss, also, da der volle nach dem Beispiele S. 661 = 52 dividirt durch das relative $D = \frac{52}{19} = 2\frac{2}{3}$ hätte sein müssen, fast dem vollen gleich.

2. Zusatz. An den beherrschten Stämmen dieses Bestandes fand sich der laufende Zuwachs $3\frac{1}{2}$, und an den unterdrückt gewesenen, ebenfalls neu treibenden, knapp 3 Procent; während deren letztjährige Höhentriebe über den sogenannten vollen Höhenwuchs hinaus gingen; denn während der Durchmesser von 4 auf $4\frac{1}{4}$, war der Höhenwuchs von 32 auf $34\frac{1}{2}$ gekommen; oder, bei $D = 4\frac{1}{4}$ und Stärkenzuwachs $\frac{1}{4}$, also relativem $D = 4\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 17$, findet sich der volle Höhenwuchs $34\frac{1}{2} : 17 = 2$, während ausnahmsweise der wirkliche hier $= 2\frac{1}{2}$ war.

4. Des Baumes Qualitätszuwachs.

§. 508. Neben dem bisher betrachteten blossen Quantitätszuwachse lässt sich auch ein anderer Zuwachs am Holze in Betracht ziehen, der daraus hervorgeht, dass in der Regel der Kubikfuss des reiferen, stärkeren, längeren — überhaupt älteren — Holzes im Preise sich höher verwerthet. Der Kubikfuss älterer und voluminöserer Bäume, namentlich des Schaftholzes, hat bekanntlich immer und überall gegenüber den unreiferen und schwächeren Sortimenten einen höheren Markt- und Taxpreis. Auch abgesehen hiervon wird sich der Reinertrag des Kubikfusses bei älterem und stärkerem Holze dadurch schon besser gestalten, dass bei massigeren Bäumen ein geringerer Antheil an Betriebs- und Erntekosten dem einzelnen Kubikfuss zur Last fällt. Endlich steht auch für die Gegenwart noch auf geraume Zeit eine, wenn auch nicht regelmässige, im Ganzen doch aber sichere allmälige Steigerung der Holzpreise überhaupt in Aussicht. Neben seinem rein quantitativen hat der

Baum also auch einen gleichsam qualitativen Zuwachs, der hauptsächlich durch die Werthssteigerung bei grösserer Reife und Stärke (Aufsteigung der Taxe), sowie durch die — wenigstens für die Gegenwart vorhandene — allgemeine Preissteigerung bedingt ist; während wenigstens bei kurzen Unterschieden von 5 bis 10 Jahren die Verringerung der Erntekosten von unerheblicherem Einflusse ist.

§. 509. Würde der Kubikfuss eines 8zolligen Baumes jetzt 20 Pfenn., nach 10 Jahren aber in Folge der zunehmenden Tax- und Marktpreise 25 Pfenn. Reinertrag gewähren, so ist der Stand der Sache gerade so, als wenn innerhalb von 10 Jahren ein Kapital 20 den Nachwerth 25, oder ein Fond 1 den Nachwerth $1\frac{1}{4} = 1{,}25$ erlangt. Die Frage, zu wieviel Procent denn dies Kapital angelegt gedacht werden muss, beantwortet uns rationell des Knechtes Nachwerthstafel in der Zeile 10 Jahre, wo wir den Nachwerth 1,25 zwischen 2 und 3 Procent, etwa zu $2\frac{1}{4}$ Procent gehörig, ersehen. —

Hinlänglich genau für solche, ohnehin keine ganz vollkommen sichere Unterlagen besitzende, Fragen erhält man aber das Resultat, wenn man den Zuwachs $25 - 20 = 5$ auf den mittleren Fond $\frac{20 + 25}{2}$ bezieht und also wieder nach der Formel $p = \frac{200\,(M - m)}{n\,(M + m)}$ rechnet, wofür hier $p = \frac{200 \,.\, 5}{10 \,.\, 45}$ $= 1000 : 450 = 2{,}2$ Procent herauskommt.

§. 510. Zur Ermittelung des qualitativen Zuwachses des Holzes im jährlichen Procentsatze folgern wir hieraus die Regel:

Setze für eine Periode von beliebig vielen ($= n$) Jahren den früheren und den muthmaasslich späteren reinen Ertrag (E und e) pro Kubikfuss fest, und ermittle das gesuchte Procent nach der schon beim quantitativen Zuwachse gedienten Regel $p = \frac{200\,(E - e)}{n\,(E + e)}$, wo dann e den Reinertrag pro Kubikfuss beim früheren, E beim späteren Baume bedeutet.

1. Beispiel. Nach einer sächsischen Holztaxe ist der Kubikfuss des 8zolligen Nadelholz-Stammes mit 28, der des 11zolligen mit 29 Pfenn. zu berechnen. Es brauchen aber mittelwüchsige Fichten innerhalb der fraglichen Stärkenklassen pro 1 Zoll Stärkenzuwachs durchschnittlich 5 Jahre, wieviel Procent jährlichen Taxzuwachs hat hiernach der 8-, wieviel der 10zollige Stamm? — Da der 8zollige erst nach 15 Jahren, der 10zollige in 5 Jahren

in die höhere Taxe rückt, so hat man, neben $E = 29$, und $e = 28$, für den 8zolligen Stamm das $n = 15$, für den 10zolligen $n = 5$ zu setzen; also hätte jener für seine nächsten 15 Lebensjahre $p = \frac{200 \times 1}{15 \, . \, 57} = \frac{1}{4}$ Procent jährlichen Qualitätszuwachs, und der 10zollige für seine nächsten 5 Lebensjahre $p = \frac{200 \times 1}{5 \, . \, 57} = \frac{2}{3}$ Procent jährlichen Qualitätszuwachs.

Zusatz. Stiege die Taxe nicht so sprungweise, sondern, indem sie bei 8 Zoll auf 28 Pfenn. bliebe., für jeden Stärkenzoll um $\frac{1}{3}$ Pfenn., so würde der 9zollige $28\frac{1}{3}$, der 10 zollige $28\frac{2}{3}$, der 11zollige wieder 29 Pfenn. Taxpreis, und bei 5 Jahren für jeden Stärkenzoll an jährlichem Taxzuwachs haben:

a. Der Achtzoller $p = \frac{200\,(28\frac{1}{3} - 28)}{5\,(28\frac{1}{3} + 28)} = 0{,}238$ oder fast $\frac{1}{4}$ Procent.

b. Der Neunzoller $p = \frac{200\,(28\frac{2}{3} - 28\frac{1}{3})}{5\,(28\frac{2}{3} + 28\frac{1}{3})} = 0{,}234 = \frac{2}{9}$ Procent.

c. Der Zehnzoller $p = \frac{200\,(29 - 28\frac{2}{3})}{5\,(29 + 28\frac{2}{3})} = 0{,}232 = \frac{2}{9}$ Procent.

2. Beispiel. Wenn vorauszusehen, dass in 10 Jahren nach und nach die Holzpreise um $\frac{1}{5}$ in die Höhe gegangen sein werden; wieviel Procent Preiszuwachs pro Jahr lässt sich darnach fürs folgende Jahrzehent annehmen? Setzt man den jetzigen Reinertrag pro Kubikfuss $= 5$, so ist er nach 10 Jahren $= 6$; also $p = \frac{(6-5)\,200}{(6+5)\,10}$ $= \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}$ oder knapp 2 Procent.

§. 511. Wenn ein Baum jährlich a Procent an Tax- und b Procent an Marktpreis Zuwachs hat, so ist sein gesammtes Qualitätszuwachsprocent $= a + b$ zu setzen.

Die im Beispiele 1 und 2 gesetzten Steigerungen gemeinschaftlich würden also geben für den Achtzoller einen Preiszuwachs von $2\frac{1}{4}$ Procent.

(Der Beweis dieses Satzes ist ganz der nämliche wie der im §. 513 folgende.)

§. 512. Hat ein Baum A Kubikfusse Nutzholz mit a Procent und B Kubikfusse Brennholz mit nur b Procent qualitati-

vem Zuwachs, so findet sich das mittlere Zuwachsprocent für die Qualität des ganzen Bauminhaltes in Folge der gewöhnlichen Durchschnittsrechnung, also auch ganz so, wie man den mittleren Zinsfuss verschiedentlich werbender Kapitale findet, d. h. nach der Regel $p = \frac{A \times a + B \times b}{A + B}$.

Beispiel. Der 30 Kubikfuss haltende Stamm einer Eiche nehme jährlich an Qualität 0,6 Procent und das 10 Kubikfuss haltende Kronenholz etwa 0,2 Procent zu, so wächst der Werth der Masseneinheit des ganzen Baumes im Mittel jährlich um $\frac{30 \times 0{,}6 + 10 \times 0{,}2}{30 + 10} = \frac{18 + 2}{40} = 0{,}5$ Proc.

5. Des Baumes Werthszuwachs.

§. 513. Wenn ein Baum hinsichts der Quantität oder Masse beispielsweise um 3 Procent und hinsichts der Qualität, d. i. hinsichts des Reinertrages pro Kubikfuss, um 2 Procent jährlich zunimmt, so muss der Werth des ganzen Baumes in einer, vom Massen- und Gütenzuwachse seines Holzes gleichzeitig abhängigen Weise zunehmen.

Aus der Masse 1 (Kubikfuss) wird hier nach Verlauf eines Jahres die Masse 1,03 (Kubikfuss); und der Reinertrag oder die Qualität 1 (Groschen pro Kubikfuss) wächst auf 1,02 (Groschen pro Kubikfuss). Aus 1 Kubikfuss zu 1 Groschen wird also nach einem Jahre 1,03 Kubikfuss zu 1,02 Groschen, d. h. aus dem Werthe 1×1 der Werth $1{,}03 \times 1{,}02 = 1{,}0506$, oder aus dem Werthe 100 der Werth 105, d. h. bei 3 Procent quantitativem und 2 Procent qualitativem Zuwachs mehrt sich der Werth ziemlich genau um jährlich $3 + 2 = 5$ Procent; genauer um 5,06 Procent.

Allgemeiner: Hat der Baum a Procent Quantitäts- und b Procent Qualitätszuwachs, so wächst sein Werth 1 auf $\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) = 1 + \frac{a+b}{100} + \frac{ab}{100^2}$, d. h. sein Werth 100 auf $100 + (a + b) + \frac{ab}{100}$, oder sein Werth wächst um $\left[(a + b) + \frac{ab}{100}\right]$ Procent; das Werthzuwachsprocent ist also = quantitatives + qualitatives Zuwachsprocent + ein Hundertel des Produktes beider, also, wenn wir den gewöhnlich unbedeutenden Werth des letzteren Gliedes vernachlässigen:

§. 544. Um den Werthszuwachs eines Baumes im Procentsatze zu finden, addire den im Procentsatze ausgedrückten quantitativen und qualitativen Zuwachs (und addire bei erheblicher Grösse beider noch $^1/_{100}$ ihres Produktes dazu).

1. Beispiel. Einer Tanne war ein Massenzuwachs von 2 Procent, und mit Rücksicht auf die steigende Taxe und den steigenden Marktpreis ein mittlerer Qualitätszuwachs von 1 Procent aufgeschätzt. Sonach die jährliche Werthszunahme dieses Baumes? —

$$= 2 + 1 = 3 \text{ Procent; genauer } 2 + 1 + \frac{2}{100} =$$

3,02 Procent.

2. Beispiel. Wenn jener jungen Kiefer, welche 36 Procent quantitativen Zuwachs hatte, ein qualitativer Zuwachs von 2 Procent zugesprochen werden könnte, würde ihr Werthszuwachs $36 + 2 = 38$ Procent, genau genommen aber $36 + 2 + \frac{72}{100} = 38{,}7$ Procent betragen.

Sechsunddreissigstes Kapitel.

Der Messknecht als Walddichtheitsschätzer.

1. Theorie.

§. 515. Wir pflegen bislang die Dichtheit unserer Bestände in der Regel nur durch die Schlussbeschaffenheit zu bezeichnen, d. h. durch den Grad der Beschirmung oder Bodenbeschattung, welche das Kronengezweig hervorbringt. Und wir unterscheiden dabei den vollkommenen Schluss oder den gut geschlossenen Bestand (wobei keine Sonnenstrahlen mehr von oben einzudringen vermögen) von dem mässig und dem kaum geschlossenen, sowie dem mehr oder weniger lichten Betsande; während ein übermässiger Schluss, eine zu dichte Stellung, wobei ein zu bedeutendes, also krankhaftes, Absterben der unterdrückten Aeste und Stämme eintritt, mit dem Ausdrucke gedrängter Stand karakterisirt zu werden pflegen.

§. 516. Ausser zu einigen waldbaulichen Zwecken ist und bleibt aber die Schlussbeschaffenheit ein sehr mangelhafter Ausdruck für die eigentliche Bestandesdichtheit; denn erstens ist er viel zu unbestimmt an sich, um auf letztere mit nur einiger Zahlengenauigkeit von ihm aus schliessen zu können; ausserdem aber auch von sehr vielen Nebeneinflüssen abhängig. Bei derselben Zahl und Stärke der Stämme pro Acker ist z. B. die Schlussbeschaffenheit des 80 Fuss hohen Bestandes eine geringere als die des 40 Fuss hohen; des am Hange stehenden wiederum geringer als des auf horizontaler Fläche befindlichen, des lärchenen und birkenen wiederum geringer als der aller übrigen; des kiefernen geringer als des fichtenen und buchenen, u. s. w.

Die Bemessung der Waldesdichtheit nach der Beschaffenheit des Schlusses ist sonach zu taxatorischen und ähnlichen Zwecken ganz unbrauchbar; und müssen wir uns durchaus mehr Mühe geben und daran gewöhnen, die Dichtheit der Bestände auf eine einfache und sichere mathematische Weise zu bezeichnen und zu bemessen oder zu schätzen.

§. 517. Dass wir das bisher so unvollkommen gethan, dass wir namentlich den allgemeinsten, einfachsten und anschaulichsten Zeiger der Bestandesdichtheit, die Abstandszahl, zu wirthschaftlichen Zwecken fast gar nicht verwendet finden, kann wohl seinen Grund nur darin haben, dass es bisher ausser dem Wege der mühsamen und aufhältlichen speciellen Auszählung der Stammgrundfläche keinen gab, der uns einfach und sicher genug, mit einem Worte: in brauchbarer Weise, die Messung oder Schätzung jener nützlichen Dichtheitsziffer gestattete.

Der Messknecht aber hofft und wünscht, dass man die mit seiner Hülfe so leicht zu bemessende Waldesdichtheit nicht allein zu taxatorischen Zwecken, sondern auch bei Bestandesbeschreibungen, bei Karakteristik der Bestandesbonitäten etc. künftig mehr verwenden und dass dadurch eine der Wirthschaft wie der Wissenschaft eben so förderliche als nöthige rationellere und bestimmtere Auffassungs- und Bezeichnungsweise der Bestandesdichtheit festeren Fuss fassen werde*).

*) Nach dem Verfasser gewordenen Mittheilungen aus Neustadt-Eberswalde hat man an der dortigen Akademie mit seiner Methode der Abstandsmessung Versuche angestellt und nach den erhaltenen Ergebnissen ihre praktische Brauchbarkeit, namentlich für grössere Bestände, bezweifeln zu müssen

§. 518. Die Dichtheit eines Holzbestandes ist abhängig erstens von der Menge der auf der Flächeninhalt (Joch, Morgen, Acker) stehenden Stämme, und zweitens von der Stärke oder vielmehr Grundfläche derselben. Die Zahl allein, durch die man nicht selten die Bestandesfülle bezeichnen zu

---

geglaubt. Man hat dabei höchst wahrscheinlich die schon im Jahrgange 1852 des Tharander Jahrbuchs von ihm mitgetheilte „einfache Streifenprobe" angewendet. Bei sehr ungleichförmigen Beständen ist gerade diese, wenn auch immerhin die bequemste, doch die wenigst sichere. Bei solchen Beständen kann aber, ausser der totalen Auszählung, jede Taxation, sei es die des erfahrensten Ocularschätzers oder die der speciellsten Probenschätzung, oder die der vollkommensten Erfahrungstafel, nur eine unsichere sein, und kann nur darin bestehen, von einer hinlänglichen Menge kleiner in sich gleichwüchsiger Orte die Dichtheit und Massenhaltigkeit zu erforschen. Eine Methode aber, die in Absicht auf solche Proben so schnell und verhältnissmässig so sicher arbeitet, wie nach vielen Erfahrungen die unsere es thut, muss praktisch auch probehaltig sein.

Die Forderung, dass sie die Regellosigkeit selbst, d. i. die Beschaffenheit eines ungleichförmigen Bestandes, sicher in Zahlen messen soll, würde einen ganz ungerechten Maassstab der Beurtheilung abgeben; denn es hiesse das: einen bestimmten Maassstab für's Regellose, Unbestimmte, also etwas Unmögliches verlangen. —

Wie einfach, schnell und sicher aber unsere Methode die Abstandszahl (und daraus den Stammgrund und die Massenhaltigkeit) kleiner, in der Stammstärke hinlänglich gleichförmiger Proben ermittele, davon kann sich ja so leicht ein Jeder dadurch überzeugen, dass er nach geschätzter Dichtheit dieselbe nun durch specielle Auszählung der Probe prüft. Diese Auszählung — die sicherste und allein entscheidende Prüfung — ist zugleich das beste Mittel, sich für die rechte Wahl des Mittelstammes oder der Mittelstärke das nöthige Augenmaass zu verschaffen; denn diese Wahl — die einzige Schätzungsarbeit dabei — hat auf das Resultat den wesentlichsten Einfluss, ist aber leicht und sicher, sobald man statt grösserer (ungleichförmiger) Proben lieber um so mehr kleine und gleichförmige wählt. Der Verfasser hat, von Eigenliebe durchaus nicht getäuscht, die vollgültigsten Gründe und Erfahrungen, seine Methoden der Dichtheits- und der Massenschätzung als solche zu bezeichnen, die praktisch nichts zu wünschen übrig lassen.

können vermeint, kann nichts bestimmen, wenn nicht die Stärke mit angegeben ist. Ein Bestand von 6000 Stämmen pro sächs. Acker (nach S. 11 in runden Zahlen = 69000 □Fuss) hat eine ganz verschiedene Dichtheit, wenn die Stämme A) durchschnittlich $4\frac{1}{4}$, als wenn sie B) 3 Zoll Grundstärke haben. Im letzteren Falle beträgt nach der *Kr*-Spalte des Messknechts die Grundfläche sämmtlicher Stämme (welche wir künftig kurzweg mit dem Worte Stammgrund benennen wollen) $Kr_3 \times 6000 = 0{,}049 \times 6000 = 294$ □Fuss; und im ersteren $Kr_{4\frac{1}{4}} \times 6000 = 0{,}098 \times 6000 = 588$ □Fuss;

Die Dichtheit ist also hier gerade doppelt so gross als dort, da diese Grössen (der Stammgrund pro Acker) wahre Verhältnisszahlen der eigentlichen Dichtheit sein müssen. Ob dabei diese sächsische Dichtheitszahl 588 (□Fuss Stammgrund pro Acker) A^a) durch 6000 Stämme à $\frac{588}{6000}$ = 0,098 □Fuss = $4\frac{1}{4}$ Zoll *) oder A^b) durch 1000 Stämme à $\frac{588}{1000}$ = 0,588 □Fuss = 10,4 Zoll **) durchschnittlicher Grundstärke hervorgebracht würde, bleibt sich in Bezug auf die eigentliche Dichtheitsgrösse, nämlich in Bezug auf die Stammgrundfülle, gleich.

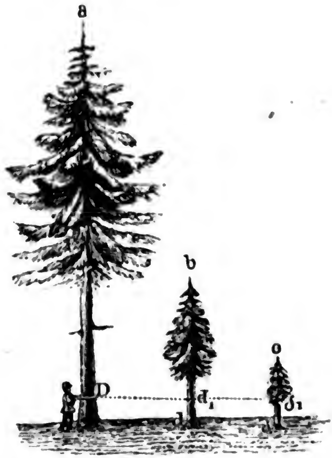
§. 519. Nach der bisher üblichen Auffassung, Messung und Verwendung der Stammgrundfläche des Bestandes nimmt man letztere immer = der Summe aller in Brusthöhe gemessenen Stammquerflächen. Schon Kap. 34 ist im Interesse einer rationellen Theorie und Praxis der Formzahlen und Baumschätzung nachgewiesen worden, warum man den Stammgrund, wenn wir ihn für 80 bis 90 Fuss hohe Bäume in obiger Auffassung beibehalten, für alle anderen Baumhöhen immer auf die Stärke oder Stärkenfläche in $\frac{1}{20}$ der Höhe beziehen müssen. Dass wir den Stammgrund des Bestandes eben so auffassen und seine Beziehung auf die absolute Brusthöhe aufgeben müssen, wenn wir dabei nicht grossen Verwirrungen und Widersprüchen und selbst Widersinnigkeiten ausgesetzt sein wollen, beweist der blosse Anblick der Figur 468 auf folg. Seite; denn er zeigt uns, dass wir nach solchem Principe bei dem jungen 10 Fuss hohen Bestande die Grundfläche fast in der Mitte der Bestandeshöhe, und bei dem

*) Siehe die Ziffer der *Kr*-Spalte bei 9,8 (Hundertel) der 100-Skala.

**) Ziffer der *Kr*-Spalte bei 58,8 der 100-Skala.

ganz jungen 5 Fuss hohen, gar fast am Wipfel zu suchen hätten!

Fig. 468.



Demselben Bestande A^a (oder A^b), dessen sächsische Dichtheitszahl 588 (□Fuss pro Acker) ist, würden in Preussen zukommen: die Stammzahl 2770 *) und die mittlere Grundstärke 3,84 Zoll und sonach die Dichtheitszahl $Kr_{3,84} \times 2770$ nahe $= 0{,}081 \times 2770 = 220$ (preuss. □Fuss pro Morgen).

Und in Oesterreich **) die Dichtheitszahl $Kr_{3,805} \times 6240$ nahe $= 0{,}08 \times 6240 =$ **490** (österr. □Fuss pro Joch).

§. 520. Die Stammgrundfülle obigen Bestandes A kann man aber auch von landesüblichen Maassen ganz un-

---

*) Nach der *d*-Tabelle ist nämlich 1 preuss. Morgen $= \frac{181}{892}$ sächs. Acker (hier à 6000 Stämme) und hat sonach $\frac{181}{892} \times 6000 = 2770$ Stämme. — Nach der *a*-Tabelle ferner 1 sächs. Fuss oder Zoll $= \frac{319}{353}$ preuss. Fuss oder Zoll, und $4^1/_4$ sächs. Zoll $= \frac{319}{353} \times \frac{17}{4} = 3{,}84$ Zoll.

**) Da laut *a*-Tabelle $4^1/_4$ sächs. Zoll $= \frac{316}{353} \cdot \frac{17}{4} = 3{,}805$ österreich. Zoll; laut *d*-Tabelle 1 Joch $= \frac{181}{174}$ Acker, also $\frac{181}{174} \times 6000 = 6240$ Stämme enthält.

abhängig und für die ganze Welt übereinstimmend in derselben Ziffer dadurch kundgeben, dass man sie in ihrem Verhältnisse zur horizontalen Grösse des zugehörigen Standraumes, d. h. zur Bestandesfläche, ausdrückt.

$$588 \ \square\text{Fuss Stammgrund sind} = \frac{588}{69000} = 0{,}0085 \text{ Acker}$$

oder: der Stammgrund des Bestandes A^a oder A^b beträgt 85 Zehntausendtel der Bestandesfläche. Und diese Ziffer 85 — als eine abstrakte oder Verhältnisszahl — ist natürlich weder specifisch sächsisch, noch preussisch, noch österreichisch, sondern karakterisirt die Dichtheit im allgemeinen Ausdrucke.

Die preussische Zahl des Stammgrundes — 220 □Fuss pro Morgen (nach S. 11 = 25920 □Fuss) — verwandelt sich im Verhältnisssatze ebenfalls in $\frac{220}{25920} = 0{,}0085$ oder 85 Zehntausendtel; und die österreichiche: 490 pro Joch (nach S. 11 = 57600 □Fuss) desgleichen in $\frac{490}{57600} = 0{,}0085$.

§. 521. Dies Stammgrund-Verhältniss werden wir künftighin immer durch γ (das griechische g, sprich: gamma) bezeichnen und in der Regel nicht als Decimalbruch, sondern, wie die Formziffern, als ganze Zahl schreiben. Es kann aus dieser einfacheren und viel bequemeren Schreibweise kein Irrthum entstehen, sobald man einmal weiss, dass, sowie die Formzahlen als zweiziffrige Decimalbrüche oder als Einheiten der 2ten Decimale, d. h. immer als Hundertel oder als Procentsatz anzusehen, so das Stammgrundverhältniss immer als 4ziffriger Decimalbruch oder in Einheiten der 4ten Decimale oder als Zehntausendtel, d. h. als Procentsatz vom Procentsatze ausgedrückt zu betrachten ist.

Wenn wir also sagen, das Stammgrundverhältniss eines Bestandes ist 85, so folgern wir nach Obigem daraus:

den Stammgrund pro sächs. Acker $= 69000 \times 0{,}0085$ oder auch $\frac{69000 \times 85}{10000}$ oder auch gleich $6{,}9 \times 85 = 587$ □ Fuss sächs;

den Stammgrund pro preuss. Morgen (à 25920 □Fuss) $= 2{,}5920 \times 85 = 222$ □Fuss preuss.;

den Stammgrund p. österr. Joch (à 57600) $= 5{,}7600 \times 85 = 490$ □Fuss österr.

Bezeichnet sonach G den gesammten Stammgrund eines

Bestandes oder einer Bestandesprobe und B die zugehörige horizontale Bodenfläche, so ist $\gamma = \frac{G}{B}$ und $G = B\gamma$.

§. 522. Man nimmt — nach König — für das Maximum des auf die Brusthöhe bezogenen Stammgrundverhältnisses gewöhnlich 80 Zehntausendtel an. An der besten Stelle des Brandholzes bei Grillenburg, einem über 150 — 160 Jahr alten Fichtenbestande von 100 — 120 Fuss Höhe, fand es der Verfasser auf den normalen Stammgrund (in $5\frac{1}{2}$ Fuss Höhe) bezogen = 85, und auf die Brusthöhe bezogen 92. Es ist also wohl möglich, dass es — selbst auf $\frac{H}{20}$ bezogen und also in richtiger Auffassung — ausnahmsweise an einzelnen Punkten hoher, ausgezeichnet dichter Bestände bis 90 (Zehntausendtel), an Hängen vielleicht auch bis 100, also bis 1 Procent der Bestandesfläche anzusteigen vermag.

§. 523. Jeden Holzbestand, und wäre er noch so ungleichförmig, können wir immer im Geiste in einen gleichförmigen verwandeln, d. h. in einen solchen, der unter Beibehaltung derselben Holzmasse und Dichtheit (desselben Stammgrundes oder Stammgrundverhältnisses) Stämme von einerlei Höhe H, Grundstärke d und Formzahl f und einerlei Entfernung von einander besitzt. Durch diese Vorstellung erhalten wir den wahren Mittelstamm des ganzen Bestandes und die Mittelstärke d und Mittel-Formhöhe $h = H \times f$.

Wir können uns aber auch bloss die Grundstärken ausgeglichen und den Stammgrund aus lauter Stämmen von einer gleichen mittleren Grundstärke erzeugt denken.

In jenem Bestande (S. 669) von 588 □Fuss Stammgrund und 6000 Stämmen pro Acker waren in der Wirklichkeit vielleicht 4 Zehntel der Stämme Fünfzoller, 4 Zehntel Vierzoller und 2 Zehntel Dreizoller.

Weil nun

der Fünfzoller laut $Kr.$-Spalte die Grundfläche $Kr_5 = 0{,}136$
der Vierzoller „ „ „ „ $Kr_4 = 0{,}087$
der Dreizoller „ „ „ „ $Kr_3 = 0{,}049$

so folgt als mittlere Grundfläche

$$\frac{0{,}136 \times 4 + 0{,}087 \times 4 + 0{,}049 \times 2}{10} = 0{,}099 \text{ □Fuss},$$

zu welcher Fläche (100fach = 9,9) die $Kr.$-Spalte $4\frac{1}{4}$ Zoll als Durchmesser, d. h. als Grundstärke des Mittelstammes, angiebt.

§. 524. Des Bestandes mittlere Grundstärke sollte man, strenggenommen, immer, wie eben geschehen, aus

dem verhältnissmässigen Durchschnitte der Grundflächen ableiten; denn sie ist der Durchmesser der durchschnittlichen Grundfläche der Stämme.

Wenn indess die vorkommenden Verhältnisse nicht sehr grell einander gegenüberstehen, kann man getrost die mittlere Grundstärke = dem Durchschnitte des Durchmessers selber nehmen. Das so gefundene Mittel ist zwar stets etwas — in der Regel aber nur unbedeutend — zu klein.

1. Beispiel. In obigem Falle hätte man $\frac{4.5+4.4+2.3}{10} = \frac{42}{10} = 4{,}2$ Zoll statt des richtigen 4,25 Zoll.

2. Beispiel. Eine kleine Bestandesprobe enthielt zu 2 Theilen Stämme von 8 Zoll und zu 1 Theil Stämme von 11 Zoll Durchmesser. Wie gross die Mittelstärke?

$Kr_8 = 35$, $Kr_{11} = 66$; Mittelgrundfläche $= \frac{35 \times 2 + 66 \,.\, 1}{3} = \frac{136}{3} = 45$, wozu 9,1 Zoll als Durchmesser gehören.

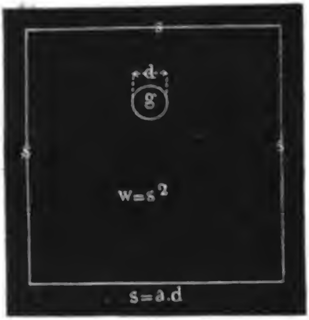
Der Durchschnitt der blossen Stärken aber giebt $\frac{8.2+11.1}{3} = \frac{27}{3} = 9$ Zoll; vom praktischen Gesichtspunkte aus also dasselbe.

§. 525. Auf jeden der 6000 ($= n$) Stämme dieses beliebig ungleichförmigen Bestandes von 69000 □Fuss ($= B$) Bodenfläche oder Wachsraum kommt also durchschnittlich $4\frac{1}{4}$ ($= d$) Zoll Grundstärke oder 0,098 ($= g$) Grundfläche und ein Wachsraum von $w = \frac{69000}{6000} = \frac{G}{n} = 11{,}5$ □Fuss. Dieser mittlere Wachs- oder Standraum w des Einzelstammes ist also der $n$te Theil der ganzen Bestandesfläche B, und jene mittlere Grundfläche g des Einzelstammes der $n$te Theil des ganzen Stammgrundes G. Es steht also, wie es auch ohnedies von selbst sich verstehen muss, die Grundfläche g des Mittelstammes zum durchschnittlichen Standraum w genau in demselben Verhältnisse, wie der ganze Stammgrund G zur ganzen Bodenfläche B, oder es ist $\frac{g}{w} = \frac{G}{B}$ = dem Stammgrundverhältnisse $= \gamma$ des Bestandes.

Beispiel. Bei 6000 Stämmen pro Acker und $4\frac{1}{4}$ Zoll mittlerer Grundstärke ist $g = 0{,}098$ □Fuss; $w = 11{,}5$ □Fuss, und also $\gamma = \frac{0{,}098}{11{,}5} = 0{,}0085$, wie früher.

§. 526. Wir wollen uns den dem Mittelstamm (von der Stärke d) antheilig zugehörenden Wachsraum $w = \frac{G}{n}$ immer quadratisch vorstellen, und seine Seite s, Fig. 469, die **mittlere Standseite des Bestandes** nennen; die Zahl aber, welche angiebt, wie viele Male die mittlere Grundstärke in der mittleren Standseite enthalten ist, mit dem Worte **Abstandszahl** und dem Buchstaben a bezeichnen. **Die Abstandszahl** a **ist also die mit der Grundstärke** d **des Stammes gemessene Seite** s **des quadratisch formirten Standraumes** $\left(a = \frac{s}{d}\right)$; oder: das **Verhältniss der Standseite** s **zum (Grund-) Durchmesser** d **des Stammes**; oder: die **relative Grösse der Standseite in Bezug auf die als Einheit oder Maass genommene Stammstärke**. — Aus diesem $a = \frac{s}{d}$ folgt weiter $ad = s$ und der Standraum $w = s^2 = a^2 d^2$, während, wie bekannt (s. S. 246), $g = 0{,}785\ d^2$ ist.

Fig. 469.



§. 527. Durch Einsetzung vorstehender Werthe in die Formel $\gamma = \frac{g}{w}$ des §. 525 erhalten wir folgende zwei interessante Wahrheiten:

1) **Stammgrundverhältniss** $\gamma = \frac{0{,}785}{a^2}$ und

2) **Stammgrund** $G =$ Bestandesfläche $\times$ Stammgrundverhältniss (s. S. 671) $= B \times \frac{0{,}785}{a^2}$.

Wäre also der mittlere Standraum w und die mittlere Stammstärke d etwa durch Augenschätzung oder durch Ausmessung einer Probe bekannt, so hätte man auch zunächst die Standseite $s = \sqrt{w}$, dann die Abstandszahl $a = \frac{s}{d}$, und daraus entweder das Stammgrundverhältniss $\gamma = \frac{0{,}785}{a^2}$

oder den Stammgrund pro Bestandesfläche B als $G = B.\frac{0,785}{a^2}$

Und wir sehen gleichzeitig aus beiden Ausdrücken:

Je kleiner a, desto grösser γ und G; bei Verdoppelung der Abstandszahl a wird der Stammgrund G ein Viertel; bei halbem a das Vierfache des vorigen; oder: die Stammgrunde verhalten sich wie umgekehrt die Quadrate der Abstandszahlen.

Zum Beispiel. Bei 6000 Stämmen à $4\frac{1}{4}$ Zoll Mittelstärke auf einem sächs. Acker (= 69000 □Fuss Fläche) ist der mittlere Standraum $w = s^2 = \frac{69000}{6000} = 11,5$ □Fuss. Man würde also bei richtiger Schätzung oder Messung der Bestandesdichtheit gefunden haben die Standseite $s = \sqrt{11,5}$ (nach der Sx.-Spalte des Knechtes) $= 1,13 \,.\, 3 = 3,4$ Fuss, also die Abstandszahl $= \frac{s}{d} = \frac{3,4 \times 12 \text{ Zoll}}{4\frac{1}{4} \text{ Zoll}} = 9,6$. Gesetzt also, man hätte durch Augenschätzung oder sonst ein Verfahren ermittelt, dass der fragliche Bestand so dicht sei, dass die Standseiten der einzelnen Stämme nur das 9,6fache ihrer Stärke betrügen, d. h. dass der Bestand die (selten vorkommende) geringe Abstandszahl 9,6 besitze, so würde man daraus ohne Weiteres folgern können:

1) das Stammgrundverhältniss $\gamma = \frac{0,785}{9,6^2} = 0,0085$;

2) den Stammgrund G selbst, z. B. pro sächs. Acker $= \frac{0,785}{a^2} \times 69000 = 587$ □Fuss; pro preuss. Morgen $= \frac{0,785}{a^2} \times 25920 = 220$ □Fuss preuss.; pro Joch $= \frac{0,785}{a^2} \times 57600 = 490$ □Fuss österr. *).

Bei doppelt so grossem Abstande, oder $a = 19,2$ hätte man für Sachsen $G = \frac{0,785}{(2 \times 9,6)^2} = \frac{0,785}{4 \,.\, 9,6^2} = \frac{587}{4} = 147$ □Fuss; für Preussen $= \frac{220}{4} = 55$ □Fuss.

[Vergleiche hiermit die Zahl der Bestandestafeln für Sachsen und Preussen auf S. 681; letztere auch in der rechten Oberecke der Rückseite der Messknechtstafel.]

*) Vergl. mit diesen Resultaten die S. 670 constatirten.

§. 528. Die Abstandszahl ist sonach ein *dritter Ausdruck oder Zeiger der Bestandesdichtheit*, und zwar ein *sehr anschaulicher und unschwer bis zu einem gewissen Grade einschätzbarer*.

Denken wir uns nämlich beim Anschauen des Bestandes den mittleren Standraum ($w = s^2$) in Form eines Quadratnetzes darübergelegt, so kommt auf jedes Standseitenquadrat $s \times s$ beim gleichförmigen Bestande, Fig. 470, *wirklich*, und beim ungleichförmigen, Fig. 471, *durchschnitt-*

Fig. 470.

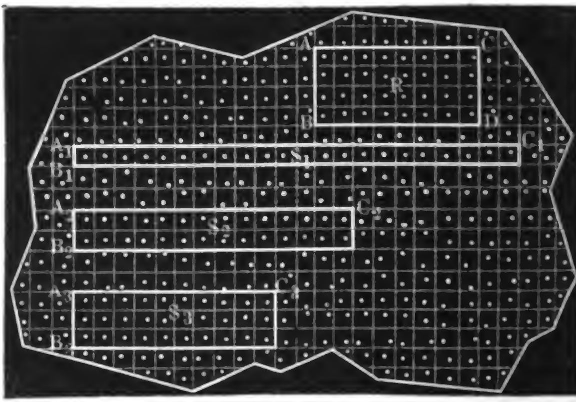
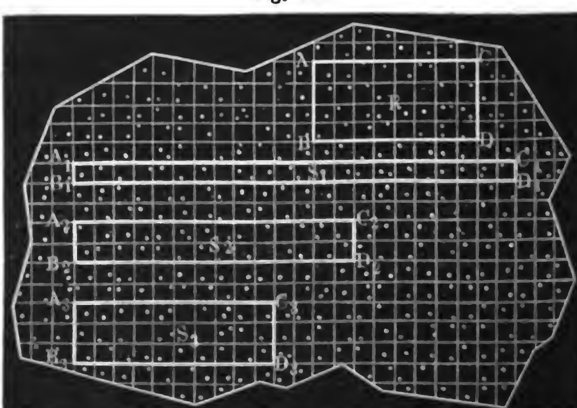


Fig. 471.



lich ein Stamm; und es erscheint hiernach die Standseite als: die durchschnittliche Entfernung der Mittelpunkte der Stämme, wenn diese Entfernung immer parallel oder rechtwinkelig zu einer beliebig gewählten Netzbasis AB oder AC gemessen oder geschätzt ist; während die Abstandszahl angiebt, wieviele Male in dieser Standseite die mittlere Stammstärke enthalten ist.

Zum Beispiel. Man habe nach Obigem eines Bestandes Standseite = 4 Schritt à 30 Zoll und der Stämme Grundstärke durchschnittlich = 6″ geschätzt. Wie gross ist das Stammgrundverhältniss γ und der Stammgrund G pro sächs. Acker?

Es ist $a = \frac{s}{d} = \frac{120''}{6} = 20$; sonach $\gamma = \frac{0{,}785}{a^2} = \frac{0{,}785}{400} = 0{,}00196$ oder $19\frac{1}{2}$ Zehntausendtel, Stammgrund $G = \frac{69000 \times 19\frac{1}{2}}{10000} = 6{,}9 \times 19\frac{1}{2} = 135$ □Fuss.

Zusatz. Wollte man dasselbe Resultat aus der halbirten Abstandszahl (10) herleiten, so hätte man das Resultat $\frac{0{,}785}{10^2} \times 69000 = 7{,}85 \times 69 = 541$ □Fuss (laut S. 675) zu vierteln, was $G = \frac{541}{4}$, also ebenfalls 135 □Fuss giebt.

§. 529. Hat das Rechteck AD, Fig. 470 oder Fig. 471 die Länge l und Breite b, also die Fläche $R = bl$ und enthält es n Stämme von der mittleren Grundstärke d, so muss sein für diese Probe der mittlere Standraum $(s^2) = \frac{bl}{n}$; die mittlere Standseite $s = \sqrt{\frac{bl}{n}}$, und die Abstandszahl $= \frac{s}{d}$.

Z. B. Eine Probe von 2400 Fuss Fläche und 24 Stämmen à $\frac{1}{2}$ Fuss Stärke hat pro Stamm $\frac{2400}{24} = 100$ Fuss Standraum; also $\sqrt{100} = 10$ Fuss Standseite; also $\frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$ als Abstandszahl.

Gesetzt nun, man nehme, was doch auch angeht, die Breite b der Probe = gerade der Standseite s; so hätte man als

Fläche sl und als Standraum (s^2) den Werth $\frac{sl}{n}$; aber aus $s^2 = \frac{sl}{n}$ folgt $s = \frac{l}{n}$ oder $b = s = \frac{l}{n}$, d. h. wenn bei der Rechtecksprobe die Breite gerade mit der Standseite übereinkommt, ist immer: Länge dividirt durch Stammzahl = Breite. Und daraus folgt rückwärts: Wenn die Länge einer Probe, durch die Stammzahl dividirt, die Breite hervorbringt, so ist die letztere = der Standseite, und sonach die Abstandszahl = Breite dividirt durch die mittlere Stammstärke; wie auch der Streifen S_1 in Fig. 470 und 471 durch blosse Anschauung lehrt.

Hätte man zur Breite $AB = b$ der Probe aber gerade die doppelte Standseite getroffen, wie der Streifen S_2 versinnlicht, wo $A_2 B_2 = b = 2s$ ist, so wäre nach der Rechtecksprobe $s^2 = \frac{bl}{n} = \frac{2sl}{n}$; also $s = \frac{2l}{n}$ und $b = 2s = \frac{4l}{n}$; d. h. beim Doppelstreifen ist die Breite immer = der vierfachen Länge dividirt durch die Stammzahl; und die Standseite = der halben Streifenbreite; die Abstandszahl $= \left(\frac{s}{d} = \frac{2s}{d+d} = \frac{b}{d+d}\right)$ = Streifenbreite dividirt durch die doppelte Mittelstärke oder durch die Summe zweier Mittelstärken.

Beim dreifachen Streifen S_3 findet man auf ähnlichem Wege: Seine Breite b muss sein = der 3×3 oder 9fachen Länge dividirt durch die Stammzahl: wo dann jene Breite dividirt durch die 3fache Mittelstärke oder durch die Summe dreier Mittelstärken die Abstandszahl giebt.

§. 530. Wenn also a die Abstandszahl, G den Stammgrund, B die Bestandesfläche, γ das Stammgrundverhältniss, d die Stärke des Mittelstammes und s dessen Standseite, oder s^2 dessen Standraum bedeutet, so ist nach S. 671 und 674 $\gamma = \frac{G}{B} = \frac{\text{Kreis von } d}{s^2} = \frac{0{,}785}{a^2}$, und es folgert sich hieraus, als Destillat der vorstehenden Entwickelungen:

1) für die Abstandszahl: $a = \frac{s}{d} = \sqrt{\frac{0{,}785}{\gamma}} = \sqrt{0{,}785\,\frac{B}{G}}$,

2) für den Stammgrund: $G = \gamma \times B = \frac{0{,}785}{a^2}\,B$;

3) f. d. Stammgrundv.: $\gamma = \frac{G}{B} = \frac{\text{Kreis von } d}{s^2} = \frac{0{,}785}{a^2}$

Formeln, deren Bedeutung uns zunächst noch einige Beispiele klar machen sollen.

1. **Beispiel.** Eine Bestandesprobe von $\frac{1}{10}$ preussischem Morgen oder 2592 □Fuss preussisch ergab nach Messung sämmtlicher Stämme (in circa $\frac{1}{20}$ der Höhe) netto 10 □Fuss Stammgrund. Wie gross die Abstandszahl dieser Probe?

$$a = \sqrt{0{,}785 \cdot \frac{B}{G}} = \sqrt{0{,}785 \cdot \frac{2592}{10}} = \sqrt{203\tfrac{1}{2}};$$

und weil zu $203\frac{1}{2}$ der 100-Skala die *Sx.*-Spalte die Ziffern 4732 giebt, zieht der Knecht diese Wurzel nach S. 39 als $4{,}732 \times 3 = 14{,}196$ oder $a = 14{,}2$.

2. **Beispiel.** Die geschätzte Abstandszahl sei 20. Wie gross der Stammgrund pro preussischen Morgen (à 25920 □Fuss)?

$$G = 0{,}785 \frac{F}{a^2} = 0{,}785 \frac{25920}{400} = 50{,}9 \text{ □Fuss.}$$

Zusatz. Für die **halb** so grosse Abstandszahl 10 dagegen $4 \times$ so gross, oder $= 50{,}9 \times 4 = 204$ □Fuss.

3. **Beispiel.** Bei der Abstandszahl 10 ist das Stammgrundverhältniss?

$$\gamma = \frac{0{,}785}{a^2} = \frac{0{,}785}{100} = 0{,}00785 \text{ oder } 78\tfrac{1}{2} \text{ Zehntausendtel.}$$

2. Praxis.

§. 531. Rekapituliren wir die vorstehenden, wie man zugeben wird, durchaus logischen Entwickelungen in umgekehrter Richtung, so erhalten wir folgende Sätze:

Die Dichtheit der Holzbestände kann mathematisch auf dreierlei Weise ausgedrückt werden.

1. Durch die **Abstandszahl** a, d. h. durch das Verhältniss der Seite (s) des quadratisch geformten durchschnittlichen Standraumes (s^2) zur durchschnittlichen Stammgrundstärke (d); $\left(\text{durch } a = \frac{s}{d}\right)$.
2. Durch den **Stammgrund** G, d. h. durch die Summe der in $\frac{1}{20}$ Scheitelhöhe gemessenen Stammgrundflächen pro Joch, Morgen, Acker etc.
3. Durch das **Stammgrundverhältniss** γ, d. h. durch die (in Zehntausendteln ausgedrückte) Ziffer, die den Stammgrund G als Bruchtheil oder Verhältnisszahl der ganzen Bestandesfläche oder die Stammgrundfläche g des Mittelstammes als Bruchtheil des mittleren Standraumes (s^2) anzeigt.

Die Ausdrücke a und γ sind von landüblichen Maassen unabhängige, also allgemeine Zeiger, während die Stammgrundzahl, von jenen abhängig, mehr lokalen Karakters ist.

NB. Als höchstes, nur horstweise mögliches γ kann man 100 (Zehntausendtel) annehmen; welchem Maximum des Stammgrundverhältnisses das Minimum der Abstandszahl $= \sqrt{\frac{0{,}785}{\gamma}}$ (§. 530) $= \sqrt{\frac{0{,}785}{0{,}0100}} = \sqrt{78{,}5}$, nahe $= 9$, d. h. einem Stande entspricht, in dem die Standseite im Mittel nur das 9fache der Grundstärke ist.

§. 532. Man gewöhne sich daran, die Dichtheit der Holzbestände immer durch die Abstandszahl a derselben auszudrücken. Sie ist ein allgemeiner und zugleich der anschaulichste und einfachste Dichtheitsmaassstab. Auch leitet sich aus ihr sehr leicht das Stammgrundverhältniss ab, im Zehntausendtelsatze dadurch, dass man mit dem Quadrat $a \times a$ in $0{,}785 \times 10000$, d. i. in 7850 dividirt. (S. Beispiel 3 des §. 530.)

Eben so leicht findet sich aus der Abstandszahl der Stammgrund pro Joch, Morgen, Acker etc., wie schon Beispiel 2 §. 530 zeigt; welche Rechnung jedoch der Messknecht in eine blosse Ablesung verwandelt, und zwar mittels seiner kleinen Bestandestafel; in der rechten Oberecke der Rückseite für den rheinländischen Fuss und Magdeburger Morgen (für Preussen); in den nachfolgenden Tabellen für unsere anderen deutschen Landsleute*).

§. 533. Aus diesen Tafeln wird zur beistehenden Abstandszahl der Stammgrund aus den 2ten mit „Kubikfuss“ überschriebenen Rubriken abgelesen. Gleich wie man nämlich die Kreisflächentafel auch als Tafel einfussiger Walzen ansehen kann (s. S. 332), kann die Quadratfusszahl des Stammgrundes auch betrachtet werden als Kubikfusszahl der Bestandesmasse pro 1 Fuss Formhöhe (S. 627). Ein Bestand von 20

*) Wer von diesen letzteren seinen Messknecht öfter zu Bestandsetaxationen zu brauchen gedenkt, wird wohl thun, mittels eines scharfen Federmessers die preussische Tafel herauszuschneiden und dafür die seines Landes hineinzukleben. Es geht das ganz gut; man hüte sich nur, mit dem Messerchen tiefer, als die Papierdicke beträgt, einzuschneiden, damit man nicht die innere Zeug-Zwischenlage des Instrumentes zerschneide. Man nehme aber hierzu nicht die folgenden, sondern die am Schlusse angehängten lithographirten Tabellchen.

1. Preussen.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	168	.4	113	.8	81,5	.2	61,5	.6	47,9	23	38,5
.2	162	.6	110	16	79,6	.4	60,1	.8	47,0	.5	36,9
.4	157	.8	107	.2	77,6	.6	58,8	21	46,2	24	35,4
.6	151	14	104	.4	75,7	.8	57,6	.2	45,3	.5	33,9
.8	146	.2	101	.6	73,9	19	56,4	.4	44,4	25	32,6
12	141	.4	98,1	.8	72,1	.2	55,2	.6	43,6	.5	31,3
.2	137	.6	95,4	17	70,4	.4	54,1	.8	42,8	26	30,1
.4	132	.8	92,8	.2	68,8	.6	53,0	22	42,1	.5	28,9
.6	128	15	90,4	.4	67,2	.8	51,9	.2	41,3	27	27,9
.8	124	.2	88,1	.6	65,7	20	50,9	.4	40,5	.5	26,9
13	120	.4	85,8	.8	64,3	.2	49,9	.6	39,9	28	25,9
.2	117	.6	83,6	18	62,9	.4	48,9	.8	39,3	29	24,2

2. Oesterreich.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	374	.4	252	.8	181	.2	137	.6	106	23	85,5
.2	360	.6	245	16	177	.4	134	.8	104	.5	82,0
.4	347	.8	238	.2	172	.6	131	21	103	24	78,7
.6	336	14	231	.4	168	.8	128	.2	101	.5	75,3
.8	325	.2	224	.6	164	19	125	.4	98,6	25	72,4
12	314	.4	218	.8	160	.2	122	.6	96,9	.5	69,4
.2	304	.6	212	17	156	.4	120	.8	95,2	26	66,8
.4	295	.8	206	.2	153	.6	118	22	93,6	.5	64,2
.6	286	15	201	.4	149	.8	115	.2	92,0	27	62,0
.8	275	.2	196	.6	146	20	113	.4	90,3	.5	59,8
13	268	.4	191	.8	143	.2	111	.6	88,7	28	57,5
.2	260	.6	186	18	140	.4	109	.8	87,1	29	53,8

3. Baiern. Hessen-Darmstadt. Baden. (Altenburg*). Schweiz.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	259	.4	175	.8	126	.2	94,8	.6	74,0	23	59,4
.2	250	.6	170	16	123	.4	92,6	.8	72,6	.5	57,0
.4	242	.8	165	.2	120	.6	90,8	21	71,3	24	54,7
.6	233	14	160	.4	117	.8	88,8	.2	70,0	.5	52,3
.8	225	.2	156	.6	114	19	86,8	.4	68,7	25	50,3
12	218	.4	151	.8	111	.2	85,0	.6	67,4	.5	48,3
.2	211	.6	147	17	109	.4	83,2	.8	66,2	26	46,4
.4	204	.8	143	.2	106	.6	81,6	22	65,0	.5	44,6
.6	198	15	139	.4	104	.8	80,1	.2	63,8	27	43,0
.8	192	.2	136	.6	102	20	78,5	.4	62,7	.5	41,5
13	186	.4	132	.8	99,3	.2	76,9	.6	61,6	28	40,0
.2	180	.6	129	18	97,0	.4	75,4	.8	60,5	29	37,5

*) Die Altenburger nehmen die Inhaltszahlen doppelt.

4. Sachsen.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	448	.4	302	.8	217	.2	164	.6	127	23	102
.2	432	.6	293	16	212	.4	160	.8	125	.5	98,3
.4	417	.8	284	.2	207	.6	157	21	123	24	94,3
.6	403	14	276	.4	202	.8	153	.2	121	.5	90,2
.8	389	.2	269	.6	197	19	150	.4	118	25	86,8
12	376	.4	261	.8	192	.2	147	.6	116	.5	83,3
.2	364	.6	254	17	187	.4	144	.8	114	26	80,1
.4	353	.8	247	.2	183	.6	141	22	112	.5	76,9
.6	342	15	241	.4	179	.8	138	.2	110	27	74,3
.8	331	.2	235	.6	175	20	135	.4	108	.5	71,6
13	321	.4	228	.8	171	.2	133	.6	106	28	68,9
.2	311	.6	223	18	167	.4	130	.8	105	29	64,4

5. Würtemberg.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	249	.4	168	.8	121	.2	91,1	.6	70,9	**23**	57,0
.2	240	.6	163	**16**	118	.4	89,0	.8	69,7	.5	54,7
.4	232	.8	158	.2	115	.6	87,2	**21**	68,5	**24**	52,5
.6	224	**14**	154	.4	112	.8	84,7	.2	67,3	.5	50,4
.8	217	.2	150	.6	110	**19**	83,5	.4	65,9	**25**	48,2
12	209	.4	145	.8	107	.2	81,8	.6	64,6	.5	46,4
.2	203	.6	141	**17**	104	.4	80,3	.8	63,4	**26**	44,6
.4	196	.8	138	.2	102	.6	78,4	**22**	62,3	.5	42,9
.6	190	**15**	134	.4	100	.8	76,9	.2	61,2	**27**	41,4
.8	184	.2	131	.6	97,4	**20**	75,4	.4	60,0	.5	39,9
13	179	.4	127	.8	95,3	.2	73,9	.6	59,0	**28**	38,6
.2	173	.6	124	**18**	93,2	.4	72,4	.8	58,0	**29**	35,9

6. Hannover. Braunschweig.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	266	.4	179	.8	129	.2	97,1	.6	75,6	**23**	60,9
.2	256	.6	174	**16**	126	.4	95,0	.8	74,2	.5	58,3
.4	247	.8	169	.2	123	.6	93,0	**21**	73,1	**24**	56,0
.6	239	**14**	164	.4	120	.8	91,0	.2	71,7	.5	53,6
.8	231	.2	159	.6	117	**19**	89,1	.4	70,3	**25**	51,5
12	223	.4	155	.8	114	.2	87,3	.6	69,0	.5	49,5
.2	216	.6	151	**17**	111	.4	85,6	.8	67,7	**26**	47,6
.4	209	.8	147	.2	109	.6	83,9	**22**	66,6	.5	45,7
.6	203	**15**	143	.4	106	.8	82,2	.2	65,3	**27**	44,1
.8	196	.2	139	.6	104	**20**	80,5	.4	64,0	.5	42,5
13	190	.4	135	.8	102	.2	78,8	.6	63,0	**28**	41,0
.2	184	.6	132	**18**	99,4	.4	77,2	.8	62,0	**29**	38,2

7. Kur-Hessen.

Bestandsmasse pro 1 Fuss Formhöhe.

Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.	Ab.	Kub. Fuss.
11	191	.4	130	.8	92,9	.2	69,8	.6	54,4	**23**	43,7
.2	184	.6	126	**16**	90,6	.4	68,3	.8	53,4	.5	41,9
.4	178	.8	122	.2	88,5	.6	66,8	**21**	52,4	**24**	40,2
.6	171	**14**	118	.4	86,4	.8	65,4	.2	51,4	.5	38,6
.8	165	.2	114	.6	84,3	**19**	64,0	.4	50,4	**25**	37,0
12	160	.4	111	.8	82,2	.2	62,7	.6	49,5	.5	35,5
.2	155	.6	108	**17**	80,2	.4	61,4	.8	48,6	**26**	34,1
.4	150	.8	105	.2	78,4	.6	60,1	**22**	47,7	.5	32,9
.6	145	**15**	102	.4	76,6	.8	58,9	.2	46,9	**27**	31,7
.8	141	.2	100	.6	74,8	**20**	57,7	.4	46,1	.5	30,7
13	138	.4	97,7	.8	73,0	.2	56,6	.6	45,3	**28**	29,4
.2	134	.6	95,3	**18**	71,3	.4	55,5	.8	44,5	**29**	27,4

□Fuss Grundfläche hat für 1 Fuss Formhöhe $20 \times 1 = 20$ Kubikfuss Masse. Und weil die fraglichen Bestandestafeln zur Massenschätzung zu dienen hauptsächlich bestimmt sind, hat der Knecht sie gleich nach diesem ihrem Hauptzwecke bezeichnet.

So giebt die preussische Tafel ohne Weiteres zur
Abstandszahl 11 d. Stammgrund pro preuss. Morg. = 168 pr. □'
„ „ 15 „ „ „ „ „ = 90,4 „
„ „ 20 „ „ „ „ „ = 50,9 „
„ „ 10, wenn man von dem zum Doppelten, 20, gehörigen das 4fache nimmt $= 50{,}9 \times 4 = 203{,}6$ □Fuss.
„ „ 30, wenn man von dem zum Halben, 15, gehörigen das Viertel nimmt $\frac{90{,}4}{4} = 22{,}6$ □'.

Dass diese Tafeln auch leicht das Stammgrundverhältniss $\frac{G}{B}$ ableiten lassen, liegt auf der Hand; denn man braucht ja nur ihre Zahlen der 2ten Spalte durch die □Fusszahl des Morgens, Jochs, Ackers zu dividiren. Z. B.:

Zur Abstandszahl 15 findet sich, wenn wir die preussische Tafel benutzen, das Stammgrundverhältniss $\gamma = 90{,}4 : 25920 = 0{,}0035$; und bei Benutzung der sächs. Tafel $\gamma = 241 : 69008 = 0{,}241 : 69 = 0{,}0035$ = dem vorigen, wie sich's gehört. Es ersparen sonach diese Tafeln auch das Quadriren der Abstandszahl, das nach der Formel $\gamma = 7850 : a^2$ allerdings nöthig wird.

§. 534. Es erübrigt sonach, um des Messknechts Bestandestafeln behufs der Ermittelung des Stammgrundes wirthschaftlich recht brauchbar zu machen, nur noch, die früheren Betrachtungen über die Abstandszahl in praktische Anweisungen zur Ermittelung dieses Dichtheitszeigers zusammenzufassen.

Wir unterscheiden dabei drei Methoden: eine feine oder Messungs-, eine mittlere und eine grobe oder Ocular-Methode.

§. 535. Bei der **Messungsmethode** verfahre man im Wesentlichen so:

In einem „Zählbuche“ werden Rubriken für die vorkommenden Stärken gemacht, die man nach Zoll zu Zoll, auch nach 2 und 3 Zoll Unterschied trennt; je nach dem verlangten Genauigkeitsgrade. Hierauf wird die Fläche F des Bestandes oder der Bestandesprobe, (nach Kapitel 5 und nach Joch respektive Morgen, Acker etc. aus-

gedrückt) ermittelt und jeder Stamm derselben mit dem Messbande (jedoch ohne die S. 611 erwähnte Reduction) in Brusthöhe leichthin, aber mit gewisser Gleichförmigkeit gemessen und mittels eines Punktes oder Striches in der entsprechenden Stärkenklasse des Zahlbuches notirt; für jede Klasse dann an einem Musterstamme die Grundstärke bei $^1/_{20}$ der Höhe und mit Beobachtung etwaiger Reduction (S. 611) sorgfältig ermittelt; zur Grundstärke jedes Probebaumes durch die *Kr.*- (oder *K*-)Spalte die Fläche gesucht, diese mit der Stammzahl ihrer Klasse multiplicirt und durch Summirung dieser Produkte der Stammgrund *G* der ausgezählten Fläche nach □Fussen gefunden. Dies *G* durch jenes *F* dividirt, giebt den auf die Flächeneinheit (Joch, Morgen, Acker etc.) kommenden Stammgrund; und sucht man diesen in den zweiten Spalten der dem Lande entsprechenden Bestandestafel auf, so müssen die ersten Spalten die gesuchte Abstandszahl ergeben.

Man wird indess dieses specielle Verfahren mehr nur zu Prüfungen und dazu anwenden, sich für die Einübung in die beiden anderen Methoden die nöthigen Erfahrungen zu verschaffen.

1. Beispiel. Ein Preusse nahm eine Probe von 45 □Ruthen $\left(= \frac{45}{180} = \frac{1}{4} \text{ Morgen} = F\right)$ und fand 18,05 □Fuss Stammgrund $= G$. Wie gross die Dichtheit dieses Bestandesortes, ausgedrückt durch die Abstandszahl?

Stammgrund pro Morgen $= \frac{G}{F} = \frac{18{,}05}{^1/_4} = 18{,}05 \times 4$ $= 72{,}2$ □Fuss; in der preussischen Bestandestafel aufgesucht, giebt $a = 16{,}8$ an, oder: dass in diesem Bestande die Standseite fast das 17fache der Stammgrundstärke sei.

2. Beispiel. Ein Oesterreicher fand auf 160 □Klafter $\left(= \frac{160}{1600} = \frac{1}{10} \text{ Joch}\right)$ nur 8,4 □Fuss Stammgrund; sonach den Abstand?

Stammgrund pro Joch $= \frac{G}{F} = \frac{8{,}4}{^1/_{10}} = 8{,}4 \times 10 = 84,$ wozu die österreichische Bestandestafel die Abstandszahl zwischen 23 und $23^1/_2$, etwa als $23^1/_4$ zeigt.

3. Beispiel. Ein Sachse nahm eine kleine Probe von $5 \times 6 = 30$ □Ruthen $= \frac{1}{10}$ Acker und fand nach erfolgter Auszählung 36 □Fuss Stammgrund; wie gross die Dichtheit dieser Probe?
Stammgrund pro Acker $= 36 \times 10 = 360$ □Fuss, wozu die sächsische Bestandeszahl reichlich 12,2 oder nahe 12,3 anzeigt.

§. 536. Die Mittelmethode a. (In regelmässigen Pflanzungen.)

Unsere Mittelmethoden gründen sich auf die Messung des mittleren Standraumes ($w = s^2$) und der mittleren Stammstärke d nach einzelnen Probeplätzen gemäss der S. 678 angestellten Erörterungen.

Bei regelmässig gepflanzten Beständen ist der mittlere Standraum, wenn keine Stämme abgängig geworden sind, = dem Pflanzenraume; ausserdem aber immer insofern als bekannt anzusehen, als die Zahl n der pro Acker oder Morgen noch stehenden Stämme bei regulärer Stellung leicht ausfindig zu machen und daraus der Standraum $= \frac{F}{n}$ und weiter der Abstand = Quadratwurzel aus dem Standraume dividirt durch die Stärke des Mittelstammes sofort herzuleiten ist.

1. Beispiel. Eine sogenannte Verbandpflanzung mit 10 Fuss Pflanzenentfernung hat im 20sten Jahre eine durchschnittliche Stärke von 5 Zoll, und sonach welche Dichtheit erreicht?
Pflanzraum = Parallelogramm von 60 Grad Schiefe und 10 Fuss Basis und 10 $sin\ 60^0 = 8{,}66$ Höhe, also $10 \times 8{,}66 = 86{,}6$ □Fuss Fläche $= s^2$; also $s = \sqrt{86{,}6}$, und letztere (mit dem Knechte extrahirt, der zu 86,6 der Hundert-Skala die *Sx.*-Zahl 309 giebt, woraus $s = 309 \times 3) = 9{,}27$ Fuss $= 111{,}24$ Zoll, also
Abstand $= \frac{111{,}2}{5} = 22{,}2$.
Die Dichtheit beträgt also das 22,2fache der Stammstärke, oder, wenn man diese Abstandszahl in den Bestandestafeln des Knechtes aufsucht:

in Preussen	41,3	□Fuss	pro	Morgen,
„ Oesterreich . . .	92,0	„	„	Joch,
„ Baiern	63,8	„	„	Tagwerk.

2. Beispiel. In einem gemischten Bestande in Sachsen befinden sich reihenweis gestellte Eichen, mit 30 Fuss

Reihenentfernung und 20 Fuss Pflanzenentfernung in den Reihen, und 6 Zoll mittlerer Grundstärke. Welche Dichtheit hat der Eichenantheil dieses Bestandes?

Standraum = 600; Standseite $s = \sqrt{600} = 24{,}4$;
Abstand $= \frac{24{,}4 \times 12 \text{ Zoll}}{6 \text{ Zoll}} = 48{,}8$, und also (da zur Hälfte 24,4 die sächsische Bestandestafel 91 □Fuss giebt) an Stammgrund $= \frac{91}{4} = 22\frac{3}{4}$ □Fuss.

§. 537. Mittelmethode b. (Die Rechtecksprobe.) Aus den Seite 678 erörterten Thatsachen leitet der Knecht folgenden praktischen Satz her:

Steckst du an einem Bestandesorte ein Rechteck von beliebiger Länge l und Breite b ab, dividirst dessen Inhalt $b \times l$ durch die Anzahl n der darauf stehenden Stämme und die (aus der Sx.-Spalte abzulesende) Wurzel dieses Quotienten durch die Grundstärke des Mittelstammes dieser Probe (immer bei $\frac{1}{20}$ ihrer mittleren Scheitelhöhe gemessen), so hast du die Abstandszahl für den gewählten Ort; wozu weiter des Knechtes Bestandestafeln den Stammgrund geben.

1. Zusatz. In seiner Eigenschaft als Winkelkopf thut der Knecht auch beim Abstecken gute Dienste. Und wenn man zu Zwei arbeiten, wobei der Eine diesen Winkelkopf in der einen Richtung einvisirt halten, und der Andere gleichzeitig die zweite Richtung einvisiren kann, braucht man keinen Stativstock dazu.

2. Zusatz. Das Resultat ist vollkommen richtig, sobald man die Mittelstärke richtig hat; auf ihr beruht die Hauptsache. Sind die Stämme der Probe ungleich, so sortire man sie in Gedanken in 2 oder 3 Klassen, nehme das Verhältniss von jeder einen Probestärke und daraus den verhältnissmässigen Durchschnitt, wie schon S. 673 gezeigt. Waren die vorkommenden Stärken z. B. 9, 8 und 6 Zoll, und der Anzahl nach in dem Verhältnisse wie $\frac{2}{6}$ zu $\frac{3}{6}$ zu $\frac{1}{6}$, so ist der verhältnissmässige Durchschnitt der Stärken $= \frac{9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{2 + 3 + 1}$ $= \frac{48}{6} = 8$ Zoll. Zwar ist, wie S. 673 schon bemerkt, die richtige Mittelstärke, d. i. die Stärke der mittleren Grundfläche immer etwas grösser; die Differenz aber nur

bei grellen Stärkenunterschieden beachtbar. Hier wäre die richtige durchschnittliche Grundstärke nach der *Kr.*-Spalte:

$$\frac{2\,.\,Kr_9 + 3\,.\,Kr_8 + 1\ Kr\ 6}{6} = \frac{2\,.\,44 + 3\,.\,35 + 1\,.\,19\frac{1}{2}}{6}$$

$= \frac{212\frac{1}{2}}{6} = 35{,}4 =$ mittlere Grundfläche, wozu laut *Kr.*-Spalte der Durchmesser 8,05 Zoll gehört.

3. Zusatz. Bei ziemlich gleichförmigen Grundstärken nimmt man die Stärke an den schicklichsten frei gewählten Mittelstämmen ab.

4. Zusatz. Da die Stärkengleichförmigkeit des Probeplatzes die Leichtigkeit und Sicherheit der Arbeit wesentlich erhöht, soll man behufs der Untersuchung der durchschnittlichen Dichtigkeit eines ungleichförmigen Bestandes die Proben möglichst so, dass innerhalb jeder Probe die Stammstärken möglichst gleich, also lieber viele kleine als wenige grosse Plätze wählen. — Wo dies nicht thunlich ist, und die Stammstärken erheblich zweiwüchsig sind, trenne man in Gedanken den schwächeren oder Nebenbestand vom Hauptbestande gänzlich ab und taxire jeden für sich.

5. Zusatz. Bei der Stärkenmessung ist Seite 611 zu beachten.

Erfahrungsbeispiel. In einem Fichtenstangenholze von ziemlicher Gleichförmigkeit ward eine 30 Fuss breite und 60 Fuss lange Probe gewählt, die 10 Stämme von 9 Zoll mittlerer Grundstärke enthielt. Von welcher Dichtheit ist sie?

Fläche $= 30\,.\,60 = 1800$ □Fuss; pro Stamm $= \frac{1800}{10}$ $= 180$; Standseite $= \sqrt{180} = 13{,}4$; Abstand $= \frac{13{,}4 \times 12 \text{ Zoll}}{9} = 18$ knapp; also, laut Bestandstafeln des Knechtes, wenn der Bestand

in Preussen liegt, der Stammgrund = 63 □Fuss pro Morgen,
„ Oesterreich „ der Stammgrund = 140□ Fuss pro Joch,
„ Baiern „ der Stammgrund = 97 □Fuss pro Tagwerk,

Zusatz. Nach der Messungs- oder Auszählungsmethode fand sich das genaue $a = 18{,}1$.

§. 538. Mittelmethode c. (Die Streifenprobe.)

Die a. S. 678 begründeten Streifenproben machen die Extraction der Wurzel entbehrlich, und können angewandt werden in der Form des einfachen, doppelten und dreifachen Abstandsstreifens.

Beim einfachen Abstandsstreifen (B_1 C_1 Fig. 470 a. S. 676) verfahre man so:

Schätze an dem zu untersuchenden Orte des Bestandes die durchschnittliche Entfernung (Standseite) der Stämme; stecke eine, nicht zu kurze, Gasse von bestimmter Länge A_1 $C_1 = l$ ab (mittels zweier Stäbe oder besser mittels des Seite 637 erwähnten eingetheilten Bindfadens), wähle dann die Stäbe B_1 D_1 für eine zweite Gasse so, dass die Streifenbreite ungefähr = der geschätzten Standseite wird; und überzähle, ob die Stammzahl des Streifens dividirt in dessen Länge die Breite A_1 $B_1 = b$ hervorbringt; wo nicht, so stelle in Gedanken die Stäbe B_1 und D_1 so, dass die Bedingung: **Länge dividirt durch Stammzahl = Breite**, erfüllt wird. — Bei dergestalt regulirter Breite erhält man die Abstandszahl ganz einfach durch Division der mittleren Stammstärke in die Streifenbreite.

Beim doppelten Abstandsstreifen (B_2 C_2 Fig. 470 auf Seite 676), für den man die Länge A_2 C_2 $= l$ etwas kürzer nehmen kann, wähle die Breite A_2 B_2 oder b gleich dem Doppelten der geschätzten Standseite und regulire dieselbe (meist bloss in Gedanken) so, dass die Stammzahl dieses Doppelstreifens, in die vierfache Länge dividirt, die Breite $A_2 B_2$ hervorbringt; dann ist die Abstandszahl = dieser Breite, dividirt durch die doppelte Mittelstärke (oder besser: durch die summarische Stärke zweier Mittelstämme).

Beim dreifachen Abstandsstreifen, den man noch kürzer nehmen kann und dessen Breite so zu reguliren ist, dass die überzählte Stammmenge, in die neunfache Länge dividirt, die Breite hervorbringt, findet sich die Abstandszahl mittels Dividirens der dreifachen Mittelstärke (oder der summarischen Stärke dreier Mittelstämme) in die regulirte Breite.

1. Zusatz. Beim Reguliren der Breite wird der Ungeübte, jedoch nur in den ersten Anfängen, leicht etwas confus,

weil oft neue Stämme dazu oder davon kommen. Man braucht indess die Sache nur ein einziges Mal mit Ueberlegung ordentlich ausgeführt zu haben, um fürs Künftige immer sogleich im Fahrwasser zu sein.

2. Zusatz. Bei sehr ungleichförmig vertheilten Stämmen sind die doppelten und die dreifachen Abstandsstreifen den einfachen vorzuziehen. Es sind dieselben nur so zu legen, dass sie die mittlere Dichtheit des betreffenden Bestandesorts gut erfassen; was sich z. B. dadurch erweist, wenn ein unmittelbar an die Seite angelegter zweiter Streifen ein mit dem Nachbarstreifen hinlänglich übereinstimmendes Resultat giebt. Daraus folgt von selbst, dass bei Reihenpflanzungen die Streifen quer durch die Reihen gelegt werden müssen; da bei der mit den Reihen parallel gehenden Lage die Nachbarstreifen mit einander leicht in Widerspruch kommen, bei dem einfachen Probestreifen sogar ganz leer ausgehen würden.

3. Zusatz. Im Uebrigen beachte man auch hier die Zusatz 1 bis 5 Seite 688 u. 689 gegebenen Lehren.

§. 539. Erfahrungsbeispiele über die Abstandsstreifen. (Aus dem Tharander Praktikum.)

1. Beispiel. (Nach der einfachen Streifenprobe.) Auf dem Kienberge bei Tharand. Ein Tannenbestand im Haubarkeitsalter, geschlossen, aber ziemlich gleichförmig bestanden. Geschätzte mittlere Standseite = 12 Fuss.

Man zog eine 200 Fuss lange Gasse und bei 12 Fuss Abstand in Gedanken eine zweite. Die leicht zu übersehende Stammzahl betrug 13; $\frac{200}{13}$ gab aber nicht des Streifens Breite, 12 Fuss, wie es sein sollte, sondern den Quotienten 15, und zwischen jenem 12 und diesem 15 liegt die rechte Breite. Rasch und bloss in Gedanken die Streifenbreite auf 14 gebracht, kamen noch 2 Stämme hinzu, so dass nunmehr $l = 200$, $n = 15$, $b = 14$, und weil $\frac{200}{15} = 13\frac{1}{3}$, die Breite als zwischen 14 und $13\frac{1}{3}$ liegend, zu $13\frac{1}{2}$ Fuss = 164 Zoll zu nehmen war. Die Mittelstärke dieser 15 Stämme war = 8 Zoll, also die Abstandszahl = $\frac{164}{8} = 20{,}2$, und nach der sächsischen Bestandestafel der Stammgrund pro Acker = 133 □Fuss.

Der Nachbarstreifen ergab 128, und ein dritter 129

□Fuss, so dass ziemlich sicher der Stammgrund dieses Bestandesortes $= \frac{129 + 128 + 133}{3} = 130$ □Fuss.

2. Beispiel. (Nach der doppelten Streifenprobe.) An demselben Orte. Länge des Streifens = 150 Fuss; Breite = der doppelten zu ziemlich 13 Fuss geschätzten Standseite, also = 26 Fuss. Stammzahl des Streifens = 25. Es soll aber $\frac{150 \cdot 4}{25} = 24$ mit der gewählten Streifenbreite 26 übereinstimmen. Als man diese deshalb auf 25 verringerte, fiel ein Stamm weg; und hatte man also $\frac{150 \cdot 4}{24} = 25$, also = der gewählten Breite 25 Fuss (oder 300 Zoll). Die beiden hierauf gemessenen Mittelstämme hatten 7 und 8 Zoll Stärke; es folgt daraus die Abstandszahl $= \frac{300}{7 + 8} = 20$, und also laut Bestandestafel die sächsische Stammgrundzahl 135 □Fuss (pro Acker).

3. Beispiel. (Nach dem dreifachen Abstandsstreifen.) Im Brandholze bei Grillenburg, einem im sehr hohen Alter befindlichen Fichtenbestande von grosser Dichtheit. Um das in ihm vorkommende Maximum kennen zu lernen, ward an der besten Stelle desselben ein Streifen von 150 Fuss Länge und (da man die mittlere Standseite zu 12 Fuss angesprochen hatte) 36 Fuss Breite abgesteckt, auf welchem man 29 Stämme zählte. Da nun beim dreifachen Streifen der Quotient $\frac{150 \cdot 9}{29} = 47$ mit der Breite 36 übereinstimmen muss, so folgt, dass die gewählte Breite 36 viel zu klein war. Als man sie dann = 42 nahm, und dabei noch 3 Stämme hinzufielen, hatte man den Quotienten $\frac{150 \times 9}{32} = 42\,{}^1/_5$, so dass 42 Fuss (=504 Zoll) als die 3fache Standseite dieses Bestandesortes anzusehen war. Die Wahl der Mittelstärke dieser Probe war in sofern schwierig, als Stärken von 8 bis 24 Zoll darin vorkamen. Wir nahmen daher 4 Klassen an: 9, 12, 18 und 24 Zoll, und schätzten ihre Zahl beziehlich in dem Verhältnisse: 1, 2, 3, 1, wonach die Stärke im Durchschnitt zu $\frac{9 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 24}{7} = 16$ Zoll und also die Abstandszahl $= \frac{504}{3{,}16} = 10{,}5$ wurde.

Und der **Stammgrund** sonach (indem der doppelte Abstand 21,0 gesucht wird) = 123 × 4 = 492 □Fuss.
Und das Stammgrundverhältniss = 492 : 69000 = 0,492 : 69 = 0,0071 oder 71 Zehntausendtel.

1. **Zusatz.** Die hierauf erfolgte **Auszählung der Probe** ergab auf der 150 × 42 = 6300 □Fuss grossen Fläche 45,8 □Fuss Stammgrund oder ein Stammgrundverhältniss 45,8 : 6300 = 0,0073, was bei der ausserordentlichen Ungleichförmigkeit des Ortes immerhin als mit dem **geschätzten** Werthe 71 sehr harmonirend zu bezeichnen ist.

2. **Zusatz.** Wären noch 5 Stämme à 17 Zoll mehr darin gewesen, die einigen Lücken und dem Schlusse gemäss gar wohl noch Platz gehabt hätten, so würde der Stammgrund der Probe = 45,8 + 5 Kr_{17} = 53,7 □Fuss und γ = 53,7 : 6300 = 0,0085 geworden sein.

3. **Zusatz.** Eine an demselben Orte ausgezählte Rechtecksprobe von 105 Fuss Länge und 50 Fuss Breite = 5250 □Fuss Fläche hielt trotz einiger Lücken 28 Stück von den Stärken 6, 8 (2 Stück), 10, 11, 12, 13 (5 Stück), 14, 15 (5 Stück), 16, 17 (2 Stück), 18, 19, 21 (4 Stück), 22, 24 Zoll, was nach der *Kr.*-Spalte einen Stammgrund von 38,4 □Fuss, eine mittlere Grundfläche von $\frac{38,4}{28} = 1,37$ und eine wahre Mittelstärke von 15,8 Zoll (s. *Kr.*-Spalte bei 137 der Mittelskala), während das arithmetische Mittel aller Durchmesser nur 15,3 Zoll, giebt.

Die wahre Abstandszahl dieser ausgezählten Probe ist also

$$= \frac{\sqrt{\text{Standraum}}}{\text{Mittelstärke}} = \frac{\sqrt{5250 : 28}}{15,8} = \frac{\sqrt{188}}{15,8}$$

$$= \frac{13,7 \text{ Fuss}}{15,8 \text{ Zoll}} = \frac{164,4}{15,8} = 10,4;$$ dazu der Stammgrund pro Acker (= dem 4fachen zum Abstande 20,8) = 125 × 4 = 500 □Fuss; γ = 0,0073. Also mit oben vollkommen übereinstimmend.

§. 540. **Die Ocularmethode.** Die Dichtheit eines Holzbestandes durch blosse Augenschätzung in einer genügend sicheren Ziffer anzugeben, würde eine ziemlich schwierige Kunst sein, wenn diese Ziffer unmittelbar den wenig anschaulichen Stammgrund oder das eben so wenig anschauliche Stammgrundverhältniss bezeichnen sollte. Wer nicht sehr viele forstliche Erfahrungen hat, möchte kaum

im Stande sein, eine brauchbare Ziffer anzugeben. Nehmen wir aber den Seite 674 begründeten Abstandsbegriff zum Dichtheitsmaassstabe, so kann man selbst ohne Vertrautheit mit dem Walde ein leidlicher Dichtheitsschätzer werden; denn sobald man nur das nöthige, leicht anzueignende Augenmaass hat, *um an dem betreffenden Bestandesorte die mittlere Entfernung* (parallel und rechtwinkelig zu irgend einer Linie gedacht, S. 677) *und die mittlere Stärke der Stämme einzuschätzen, hat man sofort durch Division von dieser in jene die Abstandszahl und durch Aufsuchen derselben in der Bestandestafel des Knechtes den Stammgrund pro Acker für den fraglichen Bestandesort.*

1. *Beispiel.* In einem Tannenbestande des Tharander Reviers schätzten die Studirenden die (|| und ⊥ gedachte) Entfernung der Stämme zu 5 Schritt à 3 Fuss, und die Stammgrundstärke im Mittel zu $^2/_3$ Fuss; und hiernach die Abstandszahl zu $15 : {^2/_3} = 22^1/_2$ oder den Stammgrund pro sächs. Acker laut Bestandestäfelchen 107 □Fuss. — (Die darauf erfolgende genaue Messung ergab das $a = 20{,}2$, und also das $G = 133$ □Fuss. — Der Hauptfehler war beim Schätzen der Stammstärke gemacht worden, welche reichlich $^3/_4$ Fuss war. *Immerhin würde aber jede andere Dichtheitsschätzung nach dem blossen Augenmaasse viel unsicherer gewesen sein.*)

2. *Beispiel.* In einem Buchenstangenorte taxirten wir die mittlere rechtseitige Entfernung zu 9 Fuss; die Stammstärke zu 5 Zoll; also den Abstand zu $\frac{9 \,.\, 12}{5} = 21{,}6$, wozu die sächs. Tafel 116 □Fuss pro Acker zeigt. — (Die Auszählung der Probe ergab $a = 22{,}3$; $G = 109$.)

§. 541. *Um Vieles sicherer aber wird diese Ocularschätzung, wenn man folgende Anweisung befolgt:*

Man übe sich, einen sicheren Schritt von runder Fuss- oder Zollzahl zu schreiten, z. B. einen Schritt von 30 Zollen; versehe sich mit 4 grell angestrichenen Stäbchen, schreite und stecke damit eine kleine Rechtecks- oder Streifenprobe (Seite 690) *ab, wähle darin nach dem Augenmaasse den Stamm der Mittelstärke, messe letzteren und leite dann die Abstands-*

zahl nach den bei der Mittelmethode angegebenen Vorschriften ab.

Zusatz. Besonders bequem erscheint hierbei der doppelte Abstandsstreifen. Macht man denselben nicht lang, so wird die Wahl des Mittelstammes um so leichter, und die verlangte doppelte Mittelstärke (S. 690) am einfachsten und sichersten erhalten, wenn man zwei Mittelstämme wählt, mit dem Bande den ersten misst, gar nicht erst abliest, sondern gleich den zweiten dazu misst und nun gleich den summarischen Durchmesser vom Bande abliest. Bei ungleichförmiger Beschaffenheit des Bestandes kann man diese einfache und schnelle Operation an verschiedenen Orten so oft wiederholen, bis man genug Werth zur Herausziehung eines brauchbaren Mittels erhalten hat.

Beispiel. (Doppelstreifen.) Die mittlere Standseite eines leidlich geschlossenen Fichtenbestandes ward zu drei Jägerschritten à 30 Zoll geschätzt; und ein Streifen von 40 dergleichen Schritten Länge und von $2 \times 3 = 6$ Schritt Breite abgegrenzt. Die Zählung ergab 32 Stämme; die gesteckte Breite ($= 6$) war also der Rechnungsbreite $\left(\frac{l}{n} = \frac{4 \cdot 40}{32}\right) = 5$ nicht gleich. Als richtig, zwischen 5 und 6 liegend, ward $5\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \cdot 30 = 165$ Zoll genommen, und da die Stärken zweier Mittelstämme zusammen 8 Zoll betrugen, die Abstandszahl $= \frac{165}{8} = 20{,}6$ gefunden, der nach der sächs. Bestandestafel ein Stammgrund von 48 □Fuss angehört.

Zusatz. Die Auszählung dieser flüchtig geschätzten Probe ergab nahe 50 □Fuss pro Acker.

NB. Weitere Beispiele siehe im folgenden Kapitel.

Siebenunddreissigstes Kapitel.

Der Waldmassenschätzer.

---

§. 542. Die bisher üblichen, praktisch bedeutsameren Methoden der Bestandesmassenschätzung pflegt man zu unter-

scheiden in: 1) die Auszählung; 2) die Proben- und 3) die Ocular-Schätzung.

Bei der Bestandes-Auszählung wird jeder Stamm des Bestandes in Brusthöhe gemessen, und gleichzeitig als Strich oder Punkt in die für die verschiedenen Stärkenklassen gemachten Rubriken eines „Zählbuches“ eingetragen; dann für jede an Zahl und Masse hervorragende Stärkenklasse, ingleichen für je zwei oder drei der in dieser Beziehung untergeordneteren, ein Musterbaum gefällt; jeder dieser Probebäume speciell kubirt; und der gefundene Inhalt mit der Zahl der Stämme, deren Repräsentanten er bildet, multiplicirt; worauf man schliesslich durch Summirung aller dieser Produkte den Inhalt des Bestandes allerdings sehr genau erhält.

[Weniger zu loben ist jene Bestandesauszählung, welche die Summe aller Stammgrundflächen mit der mittleren Scheitelhöhe und Formzahl oder auch wohl gleich mit der geschätzten mittleren „Richthöhe“ nach König multiplicirt; denn sie verwendet eine Sorgfalt auf den einen Faktor, welche durch die Oberflächlichkeit bei Schätzung des anderen wieder verdorben wird. Hat man jenen bis auf 3 Procent, diesen aber nur bis 10 Procent richtig, was bei nicht ganz gleichförmigen Beständen sehr leicht möglich ist, so hat man das Resultat trotz der speciellen Auszählung um 3 + 10 = 13 Procent (richtiger $= 3 + 10 + \frac{3.10}{100} = 13{,}3$ Procent) falsch.]

Bei der Probenschätzung dagegen wird nur ein Stück des Bestandes, je nach dessen Ausdehnung und Beschaffenheit, in der Grösse von $^1/_4$, $^1/_2$, 1 Joch, Acker, Morgen in voriger Weise speciell ausgezählt und daraus entweder auf den Holzvorrath des ganzen (dann der Fläche nach bekannten) Bestandes oder auf den der Waldflächeneinheit — auf die sogenannte Massenhaltigkeit — geschlossen.

Bei der Ocularschätzung aber durchstreift der Taxator den Bestand und nimmt dabei in Gedanken eine Menge Proben auf, deren Massenhaltigkeit oder „Bonität“ er nach dem Gesammteindrucke, den Höhe, Dichtheit und Schluss auf sein erfahrenes und geübtes Auge hervorbringen, anspricht und, theils bewusst, theils unbewusst den Process einer Durchschnittsrechnung im Kopfe durchmachend, daraus die mittlere Massenhaltigkeit (den Vorrath pro Joch, Acker, Morgen) nach praktischem Ermessen ableitet. Es ist dies logisch streng genommen also eigentlich auch eine Probenschätzung; denn wenn der Taxator sich der Vorgänge bei seiner Augenschätzung bewusst wird, wird er finden, dass er seine Ziffer über den durchschnittlichen Karakter eines Bestandes immerhin nur dadurch erlangt, dass er eine Menge Probeorte desselben ihrer

Bonität oder Massenhaltigkeit nach anspricht und daraus — rechnend oder instinktartig — einen Durchschnitt bildet.

§. 543. Die Bestandesauszählung mit Fällung von Musterbäumen ist indess selten statthaft, mindestens immer sehr aufhältlich und knauplich.

Die Schätzung nach speciell ausgezählten Proben aber hat ihrerseits, abgesehen von dem hier ebenfalls platzgreifenden, eben bemerkten Bedenken der Auszählung, nur Werth bei sehr gleichförmigen Beständen; denn ausserdem ist man nie sicher, dass die gewählte Probe ein richtiges Maass für die mittlere Bonität des ganzen Bestandes abgebe. Und sobald sie das nicht ist, wird auch die genaueste Ermittelung der Probe und selbst die Wahl mehrerer Proben ein Resultat liefern, dessen Unsicherheit zu der mühsamen und aufhältlichen Arbeit solcher Probenauszählung durchaus nicht im Verhältniss steht.

Dass ferner die bisherige Augenschätzung, auch wenn sie Erfahrungstafeln, wie z. B. die Cotta'schen Hülfstafeln für Forsttaxatoren, oder die König'schen Waldmassentafeln und dergleichen, mit zu Rathe zieht, nur von wohlerfahrenen und fortwährend in Uebung erhaltenen Forstleuten ausgeführt werden kann, wenn nur einigermaassen brauchbare Resultate erzielt werden sollen, ist jedem Sachverständigen bekannt. Ebenso, dass selbst der geübte Ocularschätzer trotz der Mitbenutzung von Erfahrungstafeln im Einzelnen vor Fehlern von mehr als 30 Procent sich nicht zu sichern vermag; so z. B. wenn er in ungewöhnlichen, hauptsächlich aber in bergichten Beständen schätzen muss. Kommen doch bei den in fortwährender Uebung begriffenen, durch eine forterbende Tradition und Empirie wohlgeschulten Taxatoren der Forstvermessungs- und Forsteinrichtungsanstalten dergleichen erhebliche Fehler nicht selten vor, und schätzte doch vor nicht langer Zeit ein sehr tüchtiges Mitglied der sächsischen Bureaus die Massenhaltigkeit eines 35jährigen sehr dichten Kiefernbestandes nach reiflichem Befragen der Cotta'schen Erfahrungstafeln auf 40 Normalklafter, während die Hauung das Doppelte ergab.

Zur Vertheidigung solcher kunstlosen und unvollkommenen Ocular-Schätzungsweise führt man zwar an, dass das summarische Resultat für ein ganzes Revier durchschnittlich immer auf etwa 5 Procent genau stimme. Für die technische Brauchbarkeit und absolute Güte einer Methode an sich entscheidet aber nicht sowohl das summarische Endresultat, sondern die Durchschnittsgrösse aller Fehler der Einzelresultate; und eine solche Schätzung der Holzbestände, die in abnormen Fällen Fehler von 50 Procent und im Durchschnitte eine Unsicherheit von 20 Procent bei den einzelnen Beständen kaum abzuhalten vermag, kann für eine nur einigermaassen feinere Wirth-

schaft und für einzelne Zwecke als ausreichend durchaus nicht erkannt werden, wenn man auch zugeben kann, dass eine genaue Massenschätzung behufs der Betriebs**regulirung** eben nicht wesentlich ist.

§. 544. Wer nun des Messknechts so leicht verständliche Formzahl- und Abstands-Tabelle oder vielmehr die darauf basirte Formhöhen- und Dichtheits-Schätzung, wie sie Kapitel 34 und Kapitel 36 lehrten, wohl begriffen hat, der ist dadurch in den Besitz eines Schätzungsgehülfen gelangt, welcher seinem Herrn nicht nur die oben karakterisirte specielle Auszählung sowie die dort erwähnte Probenschätzung wesentlich erleichtert, sondern ihn auch zu einem sicheren Ocularschätzer zu machen vermag, und zwar, was die Hauptsache ist, ohne dass derselbe den Kursus einer empirischen Schätzungsschule durchgemacht oder sonstige forstliche Erfahrungen zu haben braucht; obgleich letztere selbstredend seine Schätzungskunst nicht unbedeutend zu kultiviren geeignet sein werden.

Klassificiren wir analog dem vorigen Kapitel und wählen zur Form gleich den kurzen anweisenden Imperativ, so gestaltet sich des Knechtes Massentaxation zu folgenden Regeln:

§. 545. **Die genaue oder Auszählungs-Methode.**

Verfahre zu Anfang und zu Ende so, wie S. 696 bezugs der gewöhnlichen Bestandesauszählung angegeben ward. Anstatt aber die Musterbäume zu fällen, ermittle mit dem Knechte deren Grundstärke und Formhöhe, und daraus nach Kapitel 34 deren Masse.

§. 546. **Die Mittelmethode.**

Nach der Mittelmethode der Abstandsschätzung (S. 688 bis 690) miss an geeigneten, hinsichts der Stammstärken möglichst gleichförmigen und daher nicht zu grossen Probestellen (gleichviel ob nach der allgemeinen Rechtecks- oder einer Streifenprobe) die Abstandszahl und multiplicire den ihr zugehörigen Stammgrund oder die ihr zugehörige Bestandesmasse pro 1 Fuss Formhöhe (wie ihn das Bestandestäfelchen der rechten Oberecke oder das S. 681 u. s. w. befindliche angiebt) mit der nach Kapitel 34 eingeschätzten mittleren Formhöhe der Probe, wo dann dies Produkt die Bonität der fraglichen Bestandesstelle im Ausdruck der Massenhaltigkeit, d. h. den nach Kubikfussen ausgedrückten Holzvorrath pro Morgen, Joch, Tagwerk und dergleichen angiebt. (Vergleiche hierzu Anmerkung S. 680.)

1. Zusatz. Die mittlere Formhöhe = mittlere Scheitelhöhe × mittlere Formzahl der Probestelle kann auch als Scheitelhöhe × Formzahl des Mittelbaumes der Probe aufgefasst werden. Wenigstens muss, wenn letzterer richtig zu finden war, die nach S. 628 bis 634 ermittelte Formhöhe desselben mit der nach gleichen Regeln zu suchenden durchschnittlichen des betreffenden Ortes harmoniren.

2. Zusatz. Wenn der Bestand entschieden zweiwüchsig, d. h. deutlich aus herrschenden (starken und hohen) und unterdrückten (erheblich schwächeren und kürzeren) Stämmen gebildet ist, so thut man besser, erst jenen, den Hauptbestand, allein zu taxiren und zu thun, als wenn der Nebenbestand gar nicht vorhanden wäre, und bei Taxation des letzteren umgekehrt zu verfahren.

3. Zusatz. Um möglichst genau zu arbeiten, trachte man hauptsächlich danach, bei Messung der (in $^1/_3$ der mittleren Scheitelhöhe abzunehmenden) mittleren Stammstärke möglichst nahe an die Wahrheit zu kommen, was bei gleichförmigen kleinen Proben am besten zu erlangen ist.

4. Zusatz. Des Bestandes mittlere Massenhaltigkeit ergiebt sich natürlich aus dem (zusammengesetzten oder verhältnissmässigen) Durchschnitte aller genommenen Proben. Ist die Bonität der einen im Bestande doppelt so oft vorhanden, als die der anderen, so ist jene bei der Durchschnittsrechnung auch zwei Mal so oft als letztere zu nehmen.

§. 547. Die oberflächliche oder Ocularmethode.

a. Die begründete.

Uebe dich im Schreiten eines sicheren Schrittes von runder Länge ($2^1/_2$ oder 3 Fuss); desgleichen im Einschätzen von Höhen, dadurch, dass du in dem zu taxirenden Bestande mehrere an herrschenden, beherrschten und unterdrückten Stämmen (mittels ausgeschrittener Standlinie und nach dem abgekürzten Verfahren S. 636) mit dem Knechte beobachtest. Nimm hierauf an verschiedenen für die Bonität des Bestandes karakteristischen Orten kleine Rechtecks- oder Streifenproben (am besten Doppelstreifen, S. 690) nach Art der Mittelmethode, doch kurz und leicht hin, durch Abschreiten und durch freie Wahl des Mittelstammes nach praktischem Gefühle (mit Rücksicht auf die Seite 688 und 689 gegebenen Gesetze), um damit auf bekannte Weise die Abstandszahl (S. 690)

und mittlere Formhöhe, und mittels beider (S. 698) die Massenhaltigkeit der Proben und daraus die mittlere des Bestandes abzuleiten.

(Wo man, wie in Sachsen, für letztere die zweckmässige Einheit der Normalklafter (= 100 Kubikfuss Holzmasse) besitzt, lässt man vom Produkt aus Stammgrund und Formhöhe die beiden letzten Ziffern, wenn sie unter 50 sind, weg, oder nimmt statt ihrer, wenn sie über 50 sind, die drittletzte um 1 höher, z. B. bei 197 □Fuss Stammgrund und 25 Fuss Formhöhe, wo $M = 4925$ Kubikfuss, setzen wir 49 Normalklafter.)

b. Die summarische.

Verschaffe dir — dadurch, dass du von kleinen Proben nach der Auszählungs- oder Mittelmethode die Massenhaltigkeit hinreichend sicher erforschst und mittels karakteristischer Notizen in einem Erfahrungsbuche die gewonnenen Resultate möglichst treu in der inneren und äusseren Anschauung aufbewahrst — die nöthige Schule zur Bildung eines guten Augenmaasses fürs Ansprechen der Bestandesmassen und wende dies nach praktischem Gefühle als Maassstab an, wenn du den Bestand durchwanderst.

§. 548. Erfahrungsbeispiele aus dem Tharander Praktikum.

1. Beispiel. (Auszählungsmethode.)

Um die demnächst zu erwartenden Ergebnisse der Durchforstung eines Fichtenbestandes möglichst genau vorher zu bestimmen, wurde im betreffenden Bestande eine $\frac{1}{2}$ Acker grosse Probe abgesteckt. Die Auszählung der darauf enthaltenen, als eine einzige Klasse behandelten durchforstbaren oder Nebenbestandsstämme ergab die Anzahl zu 145, die mittlere Brusthöhenstärke zu 6 Zoll und die Scheitelhöhe des entsprechenden Mittelstammes zu 48 Fuss, und darauf hin die Grundstärke (bei $\frac{48}{20} = 2\frac{1}{2}$ Fuss Höhe) $6\frac{1}{2}$ Zoll. Die Form des Schaftes entsprach fast der Klasse IV, die der Krone kaum der Klasse III, so dass für die (oberirdische) Gesammtmasse die Baumklasse „reichlich III" oder die Formzahl 54 — 55 anzunehmen war. Wie gross hiernach die Durchforstungsmasse pro sächs. Acker?

Des Musterbaumes Formhöhe ist knapp $48 \times 5\frac{1}{2}$ Zehntel $= 4,8 \times 5\frac{1}{2} = 26$ Fuss; sein Inhalt also $Kr_{6\frac{1}{2}} \times 26 = 0,23 \times 26 = 6,0$ Kubikfuss. Demnach die

Masse pro Acker $= 2 \times 145 \times 6 = 1740$ Kubikfuss $= 17$ Normalklafter.

Zusatz. Die hierauf erfolgte Fällung und specielle Kubirung von 5 Probebäumen ergab 31,1 Kubikfuss, und diesem nach pro Acker $= 2 \,.\, 145 \,.\, \frac{31,1}{5} = 58 \times 31,1$ $= 1803$ Kubikfuss oder 18 Normalklafter.

2. Beispiel. (Halb Mittel-, halb Ocularmethode.)
Im Sommer 1852. Ein sehr geringer und ungleichförmiger Fichtenbestand im Breitengrunde. Nach den Cotta'schen Hülfstafeln für „Forsttaxatoren" unter Mithülfe eines anerkannt tüchtigen Ocularschätzers angesprochen zu 28 Normalklafter oder 2800 Kubikfuss oberirdischer Masse pro Acker.

Zur ersten Probe wählten wir den einfachen Abstandsstreifen von 144 Fuss abgeschrittener Länge, und da die Standseite 6 — 7 Fuss geschätzt ward, 6 Fuss Breite. Dabei hatte der Streifen 19 Stämme. Da aber die Rechnungsbreite $\frac{144}{19} = 7$ mit der faktischen Breite 6 nicht harmonirte, ward die Breite auf $6\frac{1}{2}$ Fuss erhöht. Dabei kamen 3 Stämme zum Streifen, dessen Rechnungsbreite $\frac{144}{22} = 6,6$ nun gut genug mit der wirklichen 6,5 stimmte. Sonach Standseite $= 6,6$ Fuss $= 79$ Zoll. — Der nach blossem Augenmasse gewählte Probebaum jener 22 Stämme hatte 5 Zoll Grundstärke und 21 Fuss Formhöhe; und sonach diese Probestreifen eine Massenhaltigkeit? — Die Abstandszahl ergiebt sich zu $\frac{79}{5} = 15,8$ und hierzu nach der sächs. Bestandestafel $2,17 \times 21 = 44\frac{1}{2}$ Normalklafter pro Acker. Also um die reichliche Hälfte der Ocularschätzung grösser!

Zur zweiten Probe ward nun wieder ein einfacher, den ersteren quer durchschneidender Abstandsstreifen genommen, wieder 48 Schritt à 3 Fuss oder 144 Fuss lang und gleich $6\frac{1}{2}$ Fuss breit; für den sich nach kurzer Regulirung die Breite 6,8 Fuss (wobei die Stammzahl 21, und $\frac{144}{21} = 6,8$ bis 6,9 gab) als mittlere Standseite herausstellte. Der Mittelstamm hatte 4,7 Zoll Grundstärke und 22 Fuss Formhöhe; sonach die Probe eine Massenhaltigkeit?

Da die Standseite = 6,8 Fuss = 81 Zoll, folgt die Abstandszahl $\frac{81}{4,7} = 17,4$, und laut sächs. Bestandestafel 179 Kubikfuss pro 1 Fuss Formhöhe, also $1,79 \times 22 = 39,4$ Normalklafter pro Acker.

Ein dritter Abstandsstreifen von 144 Fuss Länge ergab nach seiner Rectification $6^2/_3$ Fuss = 80 Zoll Breite (= Standseite), 5 Zoll mittlere Stammstärke und 20 Fuss mittlere Formhöhe; und also nach $\frac{80}{5} = 16$ Abstand an Masse $2,12 \times 20 = 42$ Normalklafter. Nach dem einfachen Durchschnitte ergab also unsere Schätzung $\frac{44 + 39 + 42}{3} = 42$ Normalklafter oder netto 50 Procent mehr als jene Ocularschätzung nach Cotta's Tafeln.

Zusatz. Der im September desselben Jahres bewirkte Abtrieb dieses Bestandes ergab etwas über 41 Normalklafter; eine Uebereinstimmung, die in Betracht der Ungleichförmigkeit des Bestandes allerdings wohl nicht der Methode zum alleinigen Verdienste angerechnet werden kann.

3. Beispiel. (Mittel- und Ocular-Methode.)
In einem etwas lichten Kiefernbestande. Nach vorheriger Höhenmessung einiger Stämme und Uebungen im Schreiten à 3 Fuss, wobei auch die mittlere Standseite = 3 Schritte = 9 Fuss geschätzt wurde, ward abgesteckt:

a. Ein Doppelstreifen, 56 Schritt (168 Fuss) lang und $3 \times 2 = 6$ Schritt (18 Fuss) breit. Derselbe enthielt 34 Stämme; so dass der bewusste Quotient $= \frac{168 \,.\, 4}{34}$ die Rechnungsbreite = 20 anstatt der abgesteckten Breite 18 gab. Die letztere ward deshalb in Gedanken um 1 Fuss vergrössert, wobei der Streifen einen Zuwachs von 2 Stämmen, sonach die Rechnungsbreite $\frac{168 \,.\, 4}{36} = 18^2/_3$ erhielt, die nahe genug der abgesteckten 19 gleichkommt; weshalb 18,8 Fuss (= 216 Zoll) als richtige Breite dieses Doppelstreifens oder als doppelte Standseite angenommen ward; wonach, da die Probe sehr zweiwüchsig, der eine Musterstamm 9, der andere 5 Zoll Stärke, ihre Summe also = 14, und folglich die Abstandszahl $\frac{216}{14} = 15,4$ war, die sächsische Tafel für

jeden Fuss Formhöhe 228 Kubikfuss Vorrath, und, da jene = 30 Fuss geschätzt ward, für die Massenhaltigkeit dieser Probe $2{,}28 \times 30 = 68$ Normalklafter gab.

b. Eine Rechtecksprobe, an einer lichteren und gleichförmigeren Stelle, 18 Schritt (54 Fuss) lang und 8 Schritt (24 Fuss) breit; 15 Stämme, geschätzt à $6^3/_4$ Zoll Stärke und 25 Fuss Formhöhe. Also Bonität?

$$\text{Standseite} = \sqrt{\frac{54 \times 24}{15}} = \sqrt{86^1/_2} = \frac{309}{9{,}27\ (3} = 9^1/_4$$
Fuss = 111 Zoll.

$$\text{Abstand} = \frac{111}{6^3/_4} = 16,$$ wozu die sächs. Bestandestafel 212 Kubikfuss zeigt.

Also Inhalt pro 1 Acker $= 2{,}12 \times 25 = 53{,}00$ Normalklafter.

Zusatz. Die hierauf erfolgte Auszählung der letzteren Probe ergab $55^1/_2$ Normalklafter pro Acker.

3. Beispiel. In einem 80—90jährigem Tannenbestande am Mauerhammer; nach bedeutender Vorentnahme; daher erheblich licht. Nach der Augenschätzung mit Hülfe von Bonitätstafeln die Masse geschätzt auf 45 Normalklafter; Mittelhöhe 50—55 Fuss; Formzahl fürs oberirdische Gesammtholz = 55 Hundertel (= $5^1/_2$ Zehntel); sonach Formhöhe = 5 bis 5,5 mal $5^1/_2$ = knapp 30 Fuss. Geschätzte mittlere Standseite = $3^1/_2$ Schritt reichlich, oder 11 Fuss; Stammstärke 8 Zoll; sonach Abstandszahl $= \frac{11 \times 12}{8} = 16^1/_2$; dazu, laut sächs. Bestandestafel, eine Massenhaltigkeit von $2{,}00 \times 30 = 60$ Klaftern gehört. Zu genauerer Erörterung ward dann abgeschritten:

a) Ein einfacher Abstandsstreifen von 72 Schritt (à 36 Zoll) Länge und $3^1/_2$ Schritt Breite, mit 20 Stämmen, à $8^1/_4$ Zoll Stärke. Da nun $\frac{72}{20} = 3^3/_5$ genau genug die gewählte Breite giebt, konnte man letztere als Standseite und also die Abstandszahl $= \frac{3^3/_5 \times 36 \text{ Zoll}}{8 \text{ Zoll}}$ = 16 nehmen; was bei 30 Fuss Formhöhe $2{,}12 \,.\, 30 =$ 63 Klafter giebt.

b) Ein dreifacher Abstandsstreifen, 40 Schritte lang und 11 Schritte (nämlich $3^1/_2 \times 3$) breit, zählte

29 Stämme. Im Falle der richtigen Breite müsste aber $\frac{40 . 9}{29} = 14$ ihr gleich sein. Deshalb ward die Breite 11 auf 12 erhöht, wodurch die Probe knapp 31 Stämme erhielt; und da $\frac{40 . 9}{31}$ ebenfalls 12 giebt, und drei gemessene Probestämme die summarische Stärke 25 Zoll hatten, erfolgt die Abstandszahl $= \frac{\text{Streifbreite}}{25}$ $= \frac{12 . 36 \text{ Zoll}}{25 \text{ Zoll}} = 17{,}2$; und da die Formhöhe wie früher $= 30$ Fuss war, eine Bonität von $1{,}83 \times 30 = 55$ Klafter.

c) Eine Rechtecksprobe, an einer der Stammstärke nach etwas schwächeren Stelle, von 24 Schritt Länge und 15 Schritt Breite hatte 30 Stämme à $7\frac{1}{2}$ Zoll Mittelstärke; also eine Standseite von $\sqrt{\frac{24 . 15}{30}} = \sqrt{12} =$ $3\frac{1}{2}$ Schritt $= 126$ Zoll, und eine Abstandszahl von $\frac{126}{7\frac{1}{2}}$ $= 17$, mit einer etwas geringeren, etwa 28 Fuss betragenden Formhöhe; also $1{,}87 \times 28 = 52$ Normalklafter Vorrath.

Da nun augenscheinlich der Karakter der 2ten Probe im Bestande etwa doppelt so oft vorkam als der der 1sten und 3ten, hatte man als durchschnittliche Massenhaltigkeit zu setzen: $\frac{63 + 2 . 55 + 52}{4} = 56$ Klafter, wonach also die erste, unbegründete Ocularschätzung von 45 Klaftern um das Viertel oder 25 Procent zu erhöhen wäre.

Zusatz. Eine Auszählung der 2ten Probe ergab die Massenhaltigkeit $57\frac{1}{4}$ Klafter.

Achtunddreissigstes Kapitel.

Der Waldzuwachsschätzer.

§. 549. Wer die im 36. Kapitel abgehandelte Zuwachsschätzung für den einzelnen Baum gehörig inne hat, findet die für den ganzen Bestand leicht von selbst; denn die Schlussfolgerung ist eine sehr einfache.

Ist nämlich ein Bestand gleichwüchsig, d. h. bezugs der Grösse seiner einzelnen Stämme hinreichend gleichförmig, so muss natürlich sein Quantitäts-, Qualitäts- und Werthszuwachs-Procent mit dem des einzelnen Baumes einerlei sein. Hat zum Beispiel der Probebaum eines gleichwüchsigen Bestandes, nach S. 651 oder 659 untersucht, 2 Proc. quantitativen- und 1 Proc. qualitativen Zuwachs, also 3 Procent Werthszuwachs, so nimmt auch der ganze Bestand jetzt jährlich um 2 Procent an Masse, und *wenn alle Stämme gleichmässig zu verwerthen sind*, um 3 Procent am Werthe zu.

Wäre von diesem Bestande mit 2 Procent Massenzuwachs jetzt und auch später $\frac{2}{3}$ der Masse nur als Brennholz und $\frac{1}{3}$ der Masse als Nutzholz verwerthbar, und wäre ausserdem 1 Procent Zuwachs wegen allgemeiner Steigerung der Holzpreise und noch eine separate Taxsteigerung für stärkeres Nutzholz anzunehmen, die auf den Nutzstamm nach Maassgabe seines Stärkenzuwachses $\frac{1}{2}$ Procent etwa betrüge, so fände sich das mittlere Werthszuwachsprocent nach der gewöhnlichen Durchschnittsrechnung selbstverständlich wie folgt:

2 Theile Masse haben $2 + 1 = 3$ Proc. Zuwachs an Werth
1 Theil „ hat $2 + 1 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ „ „ „ „

also durchschnittlich das Ganze $\frac{2 \times 3 + 1 \times 3\frac{1}{2}}{3} = \frac{9\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{6}$ Procent.

§. 550. Nicht minder selbstverständlich ist es, dass, wenn ein Bestand zwei- oder dreiwüchsig ist, etwa deutlich in einen herrschenden, beherrschten und unterdrückten Bestand zerfällt, oder aus verschieden zuwachsenden Holzarten gemischt ist, man dann den Massen- und den Werthszuwachs jeder Wuchsklasse für sich zu ermitteln hat. Will man dann noch das durchschnittliche Zuwachsprocent für die ganze Bestandesmasse haben, so hat man dann eben wieder den Massenvorrath der

einzelnen Wuchsklassen oder auch nur deren Verhältniss einzuschätzen und dann wieder nach der Durchschnittsrechnung das arithmetischen Mittel abzuleiten.

1. Beispiel. Hinsichts der Masse hatte der Nebenbestand eines durchforstbaren Fichtenortes 2 Procent, der Hauptbestand $3\frac{1}{2}$ Procent, hinsichts des Preises jener 0, dieser 1 Procent Zuwachs. Welche Mehrung an Werth haben jener und dieser, und wenn ersterer an Masse $\frac{1}{4}$ des letzteren beträgt, im Mittel beide zusammen?

Jener $2 + 0 = 2$ Proc.; dieser $3\frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}$ Proc.; zusammen durchschnittl. $\frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 4\frac{1}{2}}{5} = \frac{20}{5} = 4$ Proc.

2. Beispiel. Als man einen Bestand dieser Art durchforstete, stieg nach Verlauf von 2 Jahren das Massenzuwachsprocent wieder auf 4, also das Werthszuwachsprocent auf $4 + 1 = 5$. Wie verhält sich aber die nunmehrige absolute Grösse des Werthszuwachses zur früheren?

Bei der früheren war die Masse $1 + 4$ mit dem Zuwachse 4 Procent, also die Zuwachsgrösse $= 5 \times 0{,}04 = 0{,}2$ an Werth.

Beim durchforsteten ist die Masse 4 mit dem Zuwachse 5 Procent, oder dem gleichen Werthszuwachse $4 \times 0{,}05 = 0{,}2$.

Zusatz. Waren also erst für 500 Thlr. Holz darauf, so hatte der Bestand kurz vor der Durchforstung einen Werthszuwachs von $500 \times 0{,}04 = 20$ Thlr.; und nach der Entnahme von $\frac{1}{5}$ des Ganzen ($= 100$ Thlr.) einen dergleichen Zuwachs von $400 \times 0{,}05 = 20$ Thlr.; also mit den 4 Thlr. Zinsen der 100 Thlr. Vorentnahme, in Folge der Durchforstung, $20 + 4 = 24$ Thlr.; also einen um $\frac{1}{5}$ grösseren, als früher.

§. 551. Um das durchschnittliche laufende Massenzuwachsprocent der Holzbestände zu ermitteln, befolge man also die Regel:

Schätze die Holzmasse m_1, m_2, m_3 der vorhandenen Wuchsklassen (entweder absolut — etwa nach Klaftern — oder bloss relativ — in Verhältnisszahlen), ermittle an einem oder einigen Stämmen jeder dieser Klassen das Massenzuwachsprocent p_1, p_2, p_3 und nimm daraus das arithmetische Mittel als $p = \frac{p_1 \cdot m_1 + p_2 \cdot m_2 + p_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

1. Beispiel. In einem aus Birken und Kiefern gemischten Bestande, in dem sich die beiden genannten Holzarten der Masse nach wie 1 zu 3 verhielten, fand sich 3 Procent Massenzuwachs an den Birken und 4 Procent an den Kiefern; also durchschnittlich im Ganzen?

$$\frac{1 \,.\, 3 \text{ Procent} + 3 \,.\, 4 \text{ Procent}}{1 + 3} = \frac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Procent.}$$

§. 552. **Um den laufenden Holzzuwachs eines Bestandes in seiner absoluten Grösse zu finden, suche man erst das mittlere Zuwachsprocent nach voriger Regel und multiplicire damit den hundertsten Theil der ganzen Holzmasse.**

Beispiel. Am vorigen Bestande sei der Vorrath eingeschätzt zu 80 Klaftern pro Acker; so ist bei $3\frac{3}{4}$ Procent der laufende jährliche Holzzuwachs $= 0{,}8 \times 3\frac{3}{4} = 3{,}0$ Klafter.

§. 553. **Der Werthszuwachs irgend einer Wuchsklasse eines Bestandes** findet sich

a. im Procentsatze: wenn man zum quantitativen Zuwachsprocent des Probebaums dessen muthmaassliches qualitatives Zuwachsprocent addirt;

b. in der absoluten Grösse: wenn man den hundertsten Theil des Geldwerthes der fraglichen Klasse mit dem nach a. ermittelten Procente multiplicirt.

Beispiel. Die Birken im oben betrachteten Bestande seien als Nutzholz verwerthbar und haben als solches ausser dem Holzzuwachse von 3 Procent noch einen Qualitätszuwachs von $\frac{1}{2}$ Procent, und gegenwärtig pro Acker einen Werth von 50 Thlrn. Also ihr Zuwachs an Werth? $3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ Procent oder $0{,}5 \times 3{,}5 = 1{,}75$ oder $1\frac{3}{4}$ Thlr. pro Acker.

§. 554. **Der mittlere Werthszuwachs einer ganzen Bestandesmasse** endlich findet sich

a. im Procentsatze: wenn man die taxirten Werthe seiner verschiedenen Wuchsklassen mit ihren Werthszuwachsprocenten multiplicirt und in die Summe dieser Produkte mit der Summe der Werthe dividirt;

b. in der absoluten Grösse: wenn man den hundertsten Theil der letztgedachten Werthssumme mit dem nach a. gefundenen mittleren Procente multiplicirt.

Beispiel. Ein zweiwüchsiger Fichtenbestand hatte an Masse pro Acker 20 Klafter unterdrücktes Holz (à 3 Thlr.

Werth) mit 2 Procent Holz- und $^1/_4$ Procent Preiszuwachs; und 50 Klafter Hauptbestand (à 5 Thlr. durchschnittlichen Werth) mit 3 Procent Holzzuwachs und $^1/_2$ Procent Preiszuwachs. Um wieviel vermehrt sich jährlich der Werth pro Acker?

Nebenbestand = Kapital von 60 Thlr. mit $2^1/_4$ Proc. Zuwachs;
Hauptbestand = Kapital von 250 „ „ $3^1/_2$ „ „

Zusammen 310 Thlr. mit $\frac{2^1/_4 \cdot 60 + 3^1/_2 \cdot 250}{310} = 3^1/_4$ Proc.

oder $3{,}1 \times 3^1/_4 = 10$ Thlr. Werthszuwachs pro Acker.

Siebentes Buch.

Viehmesskunst

oder

der Messknecht als Mastknecht

zur Ermittelung vom

39) Viehgewicht im Allgemeinen.
40) Rindvieh-Lebend- und Schlacht-Gewicht.
41) Schweine-Lebend- und Schlacht-Gewicht.

Vorbemerkung.

In einem besonderen selbständigen Büchelchen, unter dem Titel:

»Der Messknecht als Mastknecht; ein einfaches und überraschend sicheres Verfahren, das Lebend- wie das Schlachtgewicht aller Thiere, namentlich des Rindviehs, aus dem gemessenen Brustumfange vollständiger und genauer als nach jeder der bisherigen Band- und Tabellen-Methoden aus der Tafel des Messknechts nach jedem beliebigen landüblichen Maasse und Gewichte abzuleiten«,

hat der Verfasser Aufschluss gegeben, wie sein mathematisches Aschenbrödelchen durch ein launiges Druckfehlermissgeschick, das ihn in der Gewinnliste der im Sommer 1852 in Dresden abgehaltenen sächsischen landwirthschaftlichen Thier- und Produktenschau mit bedeutungsvoller Ausdauer zehnmal zum »Mastknecht« stempelte, zu dem Namen und dem Berufe gekommen, den es sich in diesem siebenten Hauptstücke seiner Messkunst beigelegt, und hat durch eine grosse Zahl von Beispielen nachgewiesen, mit welcher Sicherheit es auch in diesem Gebiete zu arbeiten und mit welchem Grunde es sich, ausser zu einem mathematischen Factotum für Stube, Hof, Feld und Wald, auch noch zu einem solchen für den Stall zu empfehlen berechtigt ist.

Nicht nur, dass der Knecht alle die bisherigen Viehmessungsmethoden mit einschliesst, theilweise zugleich mit vereinfacht*), sondern nach seinen mathematischen und

---

*) Für das rheinländische Zollband und das Zollpfund z. B. ersetzt der Knecht:

1. Die Dombasle'sche Methode oder Tabelle für's Schlachtgewicht durch die einfache Regel: Miss nach Dombasle

Erfahrungssätzen und namentlich durch Einführung des Formzahlprincips es Jedem möglich macht, das Gewicht derjenigen Thierformen, deren Formklasse er durch Probewägung oder Ausschlachtung selbst zu ermitteln vermochte (S. 717), bei entsprechender Constanz derselben bis auf

---

den Brustumfang (zwischen den Vorderbeinen hindurch); suche die Hälfte desselben in der Sx-Spalte auf, multiplicire sie mit der beistehenden Inhaltszahl und wirf die letzte Ziffer weg. — Beispiel. Ein Ochse von 60 Zoll Brustumfang hat nach Dombasle's Band oder Tabelle? — $Sx_{30} \times 30 = 81\frac{1}{2} \times 30 = 2445$; also Schlachtgewicht $= 244$ Zollpfund. — Dombasle's Tabelle giebt 244 Pfund ebenfalls.

2. Die Strachwitz'sche Formel für's Lebendgewicht ersetzt der Knecht durch die viel kürzere Regel: Suche die halbe nach Strachwitz (hinter den Vorderbeinen) gemessene Umfangszahl in der Sx-Spalte auf, multiplicire die zugehörige Inhaltszahl mit des Thieres Länge (vom Widerrist bis Ende der Hinterbacken; WL, Fig. 471 S. 716) und mit 0,156. — Beispiel. Ein Rind von 88 Zoll Umfang und 60 Zoll Länge hat nach Strachwitz's Anweisung $88 . \frac{7}{22} \times 88 . \frac{7}{22} \times 60 \times 0{,}035 = 1646$ Pfund. Der Knecht rechnet, indem er $Sx_{44} = 176$ zeigt, viel kürzer $176 \times 60 \times 0{,}156 = 1646$ Pfund.

3. Die Quetelet'sche Regel verwandelt der Knecht kurz und bündig in die für alle Länder gleich passende: Nimm den Durchmesser des Brustumfangs nach Strachwitz's Methode mit dem schon vielfach erwähnten Messbande (S 245) in Zollen, die Länge (WL, Fig. a. S. 716) in Fussen, nimm zu jenem Durchmesser die Kreisfläche aus der Messknechtstafel in Quadratfussen und multiplicire sie mit der um ihr Zehntel vermehrten Länge und der Wasserdichtigkeitszahl der n-Tabelle (im unteren Mittelfeld). — Beispiel. Das vorige Rind von 88 Zoll Umfang und 60 Zoll oder 5 Fuss Länge hat nach Professor Segnitz's für preussische Maasse bewirkter Vereinfachung der Quetelet'schen Regel an Gewicht in Handelspfunden: $88 \times 88 \times 60 : 299 = 1550$ Pfund. Nach dem Messknechte, dessen Band statt 88 Zoll Umfang 28 Zoll Durchmesser und hierzu mittels der Sx-Spalte die Kreisfläche $0{,}712 \times 6 = 4{,}272$ giebt, findet sich das Gewicht als $4{,}27 \times 5{,}5 \times 66$ Pfund $= 1550$ Pfund ebenfalls.

weniger als 1 Procent genau, und selbst bei mangelnder eigener Erfahrung über deren Formzahlen immer noch genauer als nach den alten Methoden zu messen*).

Da der Messknecht weder ein specifisch bloss forst- noch bloss landwirthschaftliches Buch und Instrument sein soll, können wir auch in diesem Buche wie im vorigen wiederum nur den technischen Kern desselben mittheilen und müssen und können uns hier um so kürzer fassen, als alle diejenigen, welche sich über Theorie und Praxis unserer Viehmesskunst vollständiger zu orientiren Ursache haben, auf das Eingangs genannte Werkchen zu verweisen sind.

Obgleich es indess schon jetzt für denjenigen, der sich mit einer Genauigkeit von etwa 5 Procent begnügen will, nicht nöthig wird, wenigstens nicht beim Rindvieh, selber die Formzahlen zu ermitteln, indem er die bereits beobachteten der nachfolgenden Tabellen anwendet; so ist es andererseits nach den bereits vorliegenden Erfahrungen nicht unwahrscheinlich, dass wir künftighin in Ermangelung von Probewägungen dem Viehstücke die ihm zukommende Formklasse nicht bloss aufzuschätzen brauchen, sondern

---

*) „Dem Messknechte gebührt das Verdienst, die Verschiedenheiten im Bau des Rindes bei der Gewichtsbestimmung durch das Messband zuerst in Betracht gezogen, daneben den Mechanismus in der Rechnung, welcher in den bisherigen Formeln meistens nicht unerheblich war, im höchsten Grade vereinfacht und endlich die Methoden dergestalt verallgemeinert zu haben, dass sie auf die Gewichtsbestimmung der übrigen Nutzthiere anwendbar geworden sind.“ (Dr. Henneberg. „Aus einem Berichte an den Centralausschuss der königl. Landwirthschaftsgesellschaft zu Hannover.“ In dessen Journal für Landwirthschaft 1854 S. 61.)

„Die Resultate bestätigen die Pressler'sche Methode durchaus.“ (Derselbe in demselben, Seite 68, bei Gelegenheit der Messung zweier mageren und zweier fetten Kühe der friesischen Rasse, wobei der Messknecht $1\frac{1}{2}$ Procent durchschnittlichen und $3\frac{1}{2}$ Procent grössten, die Quetelet'sche Formel 14 Procent grössten Fehler gab.)

mittels einer geeigneten Formmessung aufzumessen vermögen. Gelänge dies, so würde die Mastknechtspraxis eine Genauigkeit und Stetigkeit erlangen, die nichts mehr zu wünschen übrig liesse. Dazu gehören aber mehr Erfahrungen und Beobachtungen, als eines Menschen, als namentlich des Verfassers Zeit und Verhältnisse es erlauben; und deshalb wiederholt derselbe hier recht angelegentlich die in der Eingangs erwähnten Mastknechtsbroschüre S. 19 allen strebsamen Landwirthen und überhaupt allen denen, welche bei der Vervollkommnung der Viehtaxation irgend wie interessirt sind, an's Herz gelegte Bitte: Sich selbst so viel als möglich mit Ermittelungen von noch fehlenden oder etwa zu berichtigenden Formzahlen der oder jener Viehgattung oder Bauart, und wo möglich auch dabei mit der Untersuchung zu befassen, ob nicht durch Division des Brustumfangs in eine zweite, die Form möglichst markirende Dimension ein hinlänglich sicherer Zeiger für die Formzahl gewonnen werden könnte; wozu am Ende dieses siebenten Buches ein kurzes Reglement gegeben ist. Dass diese Bitte, wenigstens in Bezug auf ihre erste Hälfte, bereits Anklang gefunden, wie unter Anderem die vom Sekretär der königlich hannoverschen Landwirthschaftsgesellschaft, Herrn Dr. Henneberg, durch das Centralblatt dieser Gesellschaft bewirkten Mittheilungen und Anordnungen beweisen, findet dankbar hier hervorzuheben der Verfasser sich veranlasst.

Neununddreissigstes Kapitel.

Allgemeine Praxis.

§. 555. Gleichwie der Messknecht das Problem der Baum- und Wald-Schätzung hauptsächlich durch Anwendung eines mathematisch begründeten Formzahlprincips zum wissenschaftlichen und technischen Abschlusse zu bringen bemüht war, hat ein gleicher Gedanke ihn auch bei seiner Viehmesskunst geleitet und zu einer auf alle mit hinlänglicher Formkonstanz begabte Thiergeschlechter anwendbaren allgemeinen Methode geführt. Nach derselben *) besteht die Ermittelung des Gewichts g eines Thieres: 1) in der Messung des Brustumfanges u, und der Aufsuchung einer zugehörigen Messknechtszahl (Messknechtsprodukts) m, und 2) in der Feststellung einer Formzahl f, welche mit dem Messknechtsprodukte multiplicirt die Gewichtszahl hervorbringt. Die Berechnungsformel fürs Gewicht heisst also einfach $g = m \times f$.

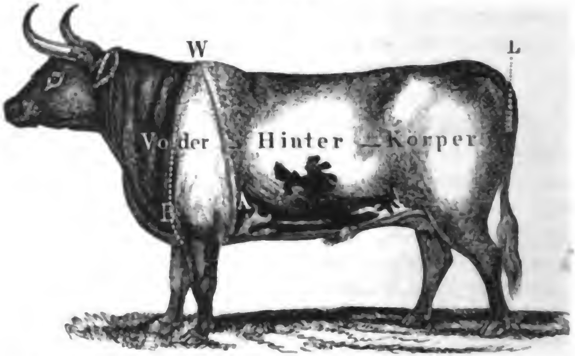
§. 556. Die Messung des Brustumfanges (u) anlangend, so geschieht diese mit einem gewöhnlichen landüblichen Zollbande (in den Meterstaaten nach Decimetern) und zwar wie folgt:

Man lege das Band über das Buggelenk oder den Widerrist W; ziehe es zwischen den beiden Vorderbeinen hindurch und in kürzester Linie oben auf dem Widerrist zusammen und notire die daselbst angezeigte Zollzahl. — Dabei muss das Thier eine ruhige, geradgestreckte und, wenigstens hinsichts der Vorderbeine (wo möglich auch der hinteren), eine gleiche Stellung beobachten (die Figuren S. 716 zeigen also nicht gerade die beste Stellung); das Band muss auf der einen Seite scharf hinter das Schulterblatt, auf der anderen recht gerade auf dasselbe zu liegen kommen und dabei gehörig gespannt sein, doch ohne einzuschneiden. S. Fig. 472 und 473 a. f. S

---

*) Siehe das S. 711 genannte Werkchen, Kap. 4.

Fig. 472.



Bei Rindern mit bedeutender Wamme ist die letztere breit zu legen, damit das Band zwischen den Beinen nicht hohl zu liegen kommt.

Um möglichst genaue Resultate zu erhalten, ist es erforderlich, mindestens zweimal zu messen; nämlich kreuzweise, d. h. wenn das Band beim ersten Male hinter dem linken und auf dem rechten Schulterblatt zu liegen kam, wie Fig. 472 zeigt, muss es beim anderen Male umgekehrt liegen, wie Fig. 473 verbildlicht. Das Mittel beider Resultate nimmt man für den richtigen Umfang, insofern beide Zahlen nicht zu sehr differirten. — Es ist zwar nicht nöthig, aber doch gut, wenn man einen Gehülfen hat, der jenseits des Messenden auf die ordnungsmässige Lage des Bandes Acht geben kann. Ein Fehler von 1 Zoll hat bei Rindern einen Fehler von 20—50 und mehr Pfunden zur Folge; je nachdem das Thier klein oder gross ist.

§. 557. Das Messknechtsprodukt (*m*).

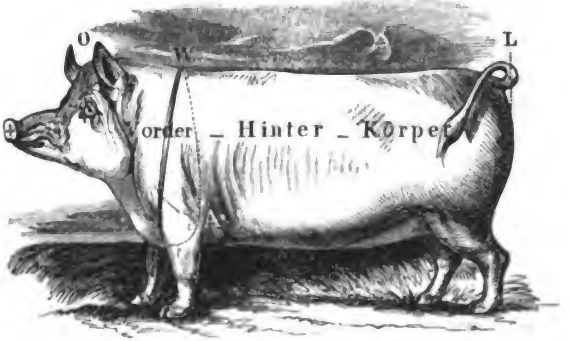
Die *Sx.*-Spalte (Kreis-**Sex**tanten-Spalte, für Duodecimalmaass), welche der Knecht schon zu so vielfachen Dienstleistungen abgerichtet hat*), muss ihm auch bei seiner Mastknechtspraxis behülflich sein.

Das erwähnte Messknechtsprodukt findet sich nämlich durch Befolgung der Regel:

Suche die Hälfte des nach vorigem Paragraphen gemessenen Brustumfanges in der *Sx.*-Spalte der Messknechtstafel auf und multiplicire sie

*) Vergleiche S. 89; 248; 253; 365; 386; 388; 402 u. s. w.

Fig. 473.



mit der beistehenden Zahl der Haupt- (oder 100)-Skala. (Für die Meterstaaten: Frankreich, Holland, Belgien, die den Umfang nach Decimetern messen sollen, wird der letztere nicht halbirt, sondern voll gelassen.)

1. Beispiel. Der volle Brustumfang u eines Rindes sei 80 Zoll, sonach sein Messknechtsprodukt m?
$Sx_{1/2u} = Sx_{40}$ zeigt auf 145; also $m = 145 . 40 = 5800$.
Genauer $Sx_{40} = 145,4 \times 40 = 5816$.

2. Beispiel. Ein Schwein hatte $62^1/_2$ Zoll Brustumfang; sein Messknechtsprodukt m?

$$Sx_{31^1/_4} = 89;\ m = 89 \times 31^1/_4 = \begin{array}{r l} 89 & \\ \hline 89 & (1 \\ 267 & (3 \\ 22 & (^1/_4 \\ \hline 2781. & \end{array}$$

§. 558. Die Formzahl.

Bezeichnet g das Lebend- oder das Schlachtgewicht, m das Messknechtsprodukt und f die Formzahl des Thieres, so ist (laut S. 715) $f . m = g$; also $f = \frac{g}{m}$ die Formzahl und zwar entweder des Lebend- oder des Schlachtgewichtes, je nachdem man jenes oder dieses in Betracht zieht.

Wer also in der Lage ist, durch Probewägung oder Ausschlachtung die Formzahl der ihm vorkommenden Rassen und Geschlechter selbst zu ermitteln, um diese Erfahrungszahlen bei seiner künftigen Viehmesskunst anzuwenden, was allerdings die sicherste Schule ist, erhält diese Zahlen einfach nach der Regel:

Formzahl = Gewicht dividirt durchs Messknechtsprodukt.

Geschieht die Ermittelung des Gewichts durch eine Viehwage, so ist's am besten, kurz vor der Fütterung zu wägen; geschieht dieselbe durchs Ausschlachten, so kann man sich doppelt belehren; erstens: über die Formzahl des Totalgewichts (wobei aber Blut, Urin und Futterbrei mit eingerechnet werden muss); und zweitens: über die Formzahl des Schlacht-Gewichts.

Beispiel. Nach Dr. Henneberg's (S. 713 angezogenen) Mittheilungen hatte ein 4jähriger Zuchtbulle holländischer Rasse 93 preussische Zoll Brustumfang und an Totalgewicht (durchs Ausschlachten ermittelt) nahe 1460 Zollpfund.

Es ist sonach halber Umfang $= 46\frac{1}{2}$; $Sx_{46\frac{1}{2}} = 196\frac{1}{2}$; Messknechtsprodukt $m = 196\frac{1}{2} \cdot 46\frac{1}{2} = 9137$; also Formzahl $= 1460 : 9137 = 0{,}16$ oder 16 Hundertel; d. h. das Lebendgewicht ist bei dem fraglichen Körperbaue 16 Procent des Messknechtsproduktes.

Wer nicht in dem Falle ist, seine anzuwendenden Formzahlen auf eigene Erfahrungen zu gründen, benutze die in den folgenden Kapiteln und Tabellen gegebenen Unterlagen, welche strebsame Messknechtsfreunde noch vervollständigen mögen*).

§. 559. Die Formzahl werde immer im Procentsatze ausgedrückt. War also der Körperbau des obigen Bullen ein mittlerer, so könnte man jetzt sagen: die mittlere Formzahl holländischer Bullen ist 16; oder: Mittelformige Bullen holländischer Rasse haben zur Formzahl 16 (für preussische Zoll und Zollpfunde).

Bei Anwendung eines anderen als des preussischen Maasses bekommt man natürlich auch eine andere Zahl. Obiger Bulle (s. vorigen Paragraph) ward in Hannover beobachtet; hatte demnach 100 (hannoversche) Zoll Umfang und nahe 1560 (hannoversche Handels-) Pfunde Gewicht; woraus sich, ähnlich wie dort, statt der preussischen Ziffer 16, die hannoversche Formzahl 14 berechnet.

Die nach dem rheinländischen Zollbande und dem halben Kilogramm (Zollpfunde) berechneten Formzahlen sind als Grundwerthe und zur Bildung der Formklassen an die Spitze derjenigen Tabelle gesetzt, welche die Formzahlen der anderen Länder mit jenen Grundwerthen vergleicht. (S. 722.)

§. 560. Wer da wünscht, sich für sein Maasssystem selbst den Reductionsfaktor gegenüber dem preussischen Grund-

*) Siehe das Reglement S. 736.

werthe zu berechnen, denke sich ein Thier von 100 rheinländischen Zoll Umfang und bestimme nach der Formzahl 1 sein Gewicht in Zollpfunden. Verwandelt man nun jenen Umfang und dieses Gewicht in die fraglichen Landesmaasse und berechnet nach obiger Regel daraus die Formzahl, so ist diese der Faktor, womit man den (preussischen) Grundwerth zu multipliciren hat, um die gewünschte Reduction zu bewirken. Gesetzt, ein Hannoveraner traute den hannoverschen Formzahlen der Tabelle S. 722 nicht recht, oder wollte die hannoversche Formzahl nicht aufs Zoll-, sondern aufs Handelspfund bezogen haben, womit muss er zu diesem Behufe die Grundwerthe multipliciren?

Ein Thier von 100 preussischen Zollen Umfang hat das Messknechtsprodukt $Sx_{50} \times 50 = 227\frac{1}{4} \times 50 = 11362$, und also bei der preussischen Formzahl 1 ein Gewicht von 11362 Zollpfund.

Laut a-Tabelle sind 319 preussische Zoll = 342 hannoverschen Zoll; oder 100 Zoll preussisch = 107 Zoll hannoversch;

laut h-Tabelle sind 1 Zollpfund = 1,07 Pfund hannoversch; also 11362 Zollpfund = 12157 hannoverschen Pfunden.

Dasselbe Thier, in Hannover gemessen, hätte also gegeben an Messknechtsprodukt: $Sx_{53\frac{1}{2}} \times 53\frac{1}{2} = 260\frac{1}{4} \times 53\frac{1}{2} = 13923$; und sonach an Formzahl $\frac{g}{m} = \frac{12157}{13923} = 0{,}873$. Dies heisst also: Die preussische Formzahl 1 entspricht einer hannoverschen 0,873; oder: Um die Formzahlen für's hannoversche Zollband und Handelspfund zu erhalten, multiplicire die Formklassenzahlen oder Grundwerthe mit 0,873.

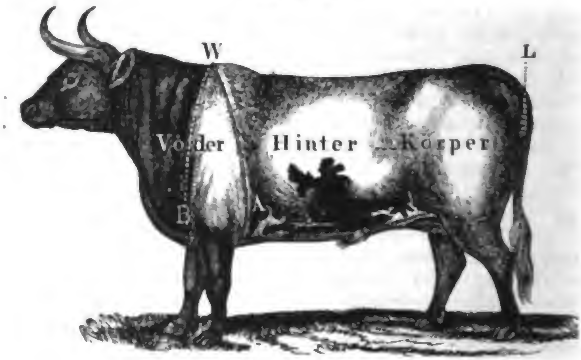
§. 561. Die Formzahl einer Thierart scheint weit weniger (beim Rindvieh fast gar nicht) vom Mastigkeitszustande als vom Körperbaue oder Knochengerüste abzuhängen. Bei zwei Rindern z. B. von gleichgrossem Brustumfange (etwa 100″) hat das zweite eine höhere Formzahl (ist schwerformiger); wenn 1) sein Hinterkörper länger, oder: 2) bei gleicher Länge breiter (massiger), oder: 3) bei gleicher Länge und Breite des Hinterkörpers die Brustfläche breiter oder runder ist (gleichwie ein Kreis von 100 Zoll Umfang mehr Inhalt hat, als eine Ellipse von gleicher Umfangsgrösse).

Wo alle drei Momente zusammen wirken, muss die Formzahl natürlich ein Maximum, im Gegentheil ein Minimum werden. Je kleiner und runder der Brustumfang, desto höher also, je grösser und schmäler derselbe, desto niedriger ist die Formklasse.

Vierzigstes Kapitel.

Der Mastknecht für Rindvieh.

Fig. 474.



1. Messung des Total- oder Lebendgewicht.

§. 562. Regel: Suche nach §. 556 des Thieres Brustumfang; dazu nach §. 557. das Messknechtsprodukt und multiplicire letzteres mit der dem Thiere zukommenden Formzahl. Von diesem Produkte hat man natürlich noch zwei Ziffern abzuschneiden, da die Formzahl ein Procentsatz ist (drei, dafern dieselbe mit einer Decimale in Anwendung gebracht wird). Dies Abschneiden kann auch gleich am Messknechtsprodukt vor der Multiplication mit der Formzahl vorgenommen werden.

§. 563. Die Sicherheit dieser Gewichtsmessung hängt also wesentlich von der Sicherheit ab, mit der man dem Rinde seine Formzahl aufzuschätzen (S. 718) oder aufzumessen (S. 717) vermag. Soweit des Verfassers Erfahrungen reichen, schwanken die (Grundwerthe der) Formzahlen der Kühe zwischen 20 und 25; die der Ochsen zwischen 18 und 23. Hieraus ist die Klassificirung und Tabelle ohne Rücksicht auf besondere Rassen entstanden, welche auf S. 722 und 723 aufgestellt sich findet.

§. 564. Aus dieser Tabelle ersehen wir erstens, dass der Bau der Ochsen um mehrere Klassen tiefer steht,

„leichtformiger" ist, als der der Kühe. Wenn das Verhältniss des weiblichen Baues zum männlichen bei allen Schlägen so, wie das vom Verfasser bei den Voigtländern gefundene, anzunehmen wäre, so würde allgemein die mittlere Formzahl der Ochsen immer drei Klassen niedriger als die der Kühe anzusetzen sein.

Eine solche Gleichförmigkeit des Baues, dass für einen bestimmten Schlag nur eine einzige Formklasse in Anwendung zu bringen wäre, kann nur bei den männlichen Thieren sehr konstanter Rassen vorkommen. Bei Kühen scheint allgemein mit den Jahren oder besser mit der Zahl der Kälber die Länge und Stärke des Hinterkörpers und in Folge dess die Formzahl zuzunehmen. Bis jetzt hat es sich ziemlich bestätigt, dass die zu einer Rasse gehörigen Kühe durch drei neben einander liegende Formklassen ganz wohl getroffen werden. Dasselbe scheint auch bei Ochsen von nicht gut konstanten Rassen oder nicht gleichmässiger Züchtung stattzufinden.

Bei den allerdings nicht rein gezüchteten 5 Voigtländer Ochsen zu Braunsdorf bewegten sich die Formzahlen von 19 bis 21; und bei den Allgauer Kühen desselben Stalles zwischen 22 bis 25, wobei aber zu bemerken, dass jene nur bei wenigen und sehr jungen, diese nur bei einigen alten, schon einige Monate trächtigen Kühen gefunden ward. Nahmen wir die mittlere Formklasse oder die Klasse der mittelformigen Allgauer Kühe jenes Stalles zu $23\frac{1}{2}$, die der leichtformigen zu $22\frac{1}{2}$ und der schwerformigen zu $24\frac{1}{2}$, so fanden wir das Gewicht durchschnittlich auf 1 Procent genau (s. S. 43 u. s. w. der in der Vorbemerkung citirten Broschüre).

Die grössere Leicht- oder Schwerformigkeit eines Stückes gegenüber der normalen Mittelformigkeit lernt das Auge sehr bald unterscheiden. Denn je länger und stärker der Hinterkörper im Verhältniss zum Brustumfange und namentlich je runder die Form des letzteren, desto grösser ist die Formzahl. Ein grosser und dabei schmaler Brustumfang bei kurzem und schwachem Hinterkörper muss also die kleinste Formzahl geben; gleichviel, ob das Thier im Allgemeinen sehr gross oder sehr klein sei.

§. 565. Zweitens ersehen wir aus vorstehendem Paragraphen und aus der Tabelle, dass, wenn wir in Ermangelung eigener Formzahlermittelung nicht immer in den bedenklichen Fall kommen wollen, zwischen 5 Klassen zu wählen, für die Ochsen und Kühe jeder karakteristischen Rasse die mittlere Formzahl festgestellt sein muss. Dann ist man, wenn noch feiner gearbeitet und die leichtere und schwerere Formigkeit gegenüber der mittleren eingeschätzt werden soll, nur um eine Klasse unsicher; und wird im Durchschnitte einen Fehler von mehr als 1 Procent kaum begehen können.

§. 566. Formklassen und Formzahlen fürs Rindvieh-Totalgewicht.

(In gedrängterer Form und im Grundwerthe auch auf der Messknechtstafel im Felde „Viehmesskunst".)

Ochsen.

Mittelform.

Preussen (Grundwerth) Anhalt, Dänemark, England, Mecklenburg-Strelitz, Schweden u. Norwegen	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Baden, Nassau, Schweiz	22,7	24,2	25,7	27,2	28,7	30,2	31,7	33,2	34,7	36,2	37,7	39,3	40,8
Baiern, Hannover	12,1	12,9	13,7	14,5	15,3	16,1	16,9	17,7	18,6	19,3	20	20,8	21,7
Belgien, Frankreich, Holland	52,5	56	59,5	63	66,5	70	73,5	77	80	84	87,5	91	94,5
Braunschweig, Frankfurt a. M.	11,3	12,0	12,7	13,5	14,2	15	15,7	16,5	17,2	18	18,7	19,5	20,2
Bremen, Hessen-Cassel	11,6	12,4	13,2	14	14,7	15,5	16,2	17	17,8	18,5	19,3	20,1	20,9
Hamburg, Holstein, Schleswig	11,8	12,6	13,4	14,2	15	15,7	16,5	17,2	18	18,8	19,5	20,3	21,2
Hessen-Darmstadt	12,9	13,7	14,6	15,5	16,4	17,2	18	18,9	19,7	20,6	21,5	22,4	23,2
Lübeck, Mecklenburg-Schwerin	12,4	13,2	14,0	14,9	15,7	16,5	17,3	18,1	18,9	19,7	20,5	21,4	22,3

Oldenburg	12,6	13,4	14,2	15,1	16	16,8	17,6	18,5	19,3	20,2	21	21,8	22,6
Oesterreich	13,7	14,6	15,5	16,4	17,3	18,2	19,1	20	21	21,9	22,8	23,7	24,6
Polen	14,3	15,2	16,1	17	18	19	20	20,9	21,8	22,7	23,7	24,7	25,6
Russland	16,8	18	19,1	20,2	21,3	22,4	23,5	24,6	25,8	26,9	28	29,1	30,2
Sachsen (Dresden, Altenburg). . . .	11,2	11,9	12,6	13,3	14	14,7	15,4	16,1	16,9	17,6	18,3	19,1	19,9
„ (Weimar, Eisenach)	11,1	11,8	12,5	13,2	13,9	14,6	15,3	16	16,8	17,5	18,2	19	19,8
„ (Coburg, Meining., Hildburgh.)	13,9	14,7	15,5	16,4	17,3	18,2	19,1	20	20,9	21,8	22,7	23,7	24,6
Gotha	11,5	12,3	13,1	13,9	14,6	15,4	16,1	16,9	17,7	18,5	19,3	20,0	20,8
Preussen (Grundwerthe) . . . . Anhalt, Dänemark, England, Mecklenburg-Strelitz, Schweden u. Norwegen	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	Bullen (?).				Kühe.			Mittelform.					

Notiz. Die Gewichte: Innerhalb des Zollvereines, einschliesslich Hannover und Oldenburg, nach Zollpfunden oder halben Kilogrammen; in den Meterstaaten nach ganzen Kilogrammen, in den übrigen nach landüblichen Handelspfunden. Wenn nach letzteren auch in den Zollvereinsstaaten gewogen werden soll; multiplicire die Formzahl für Baiern mit 0,893, für alle übrigen mit 1,069.
Brustumfang: Nach Zollen und zur Hälfte; in den Meterstaaten nach Decimetern und ganz.

§. 567. Nach des Verfassers Versuchen in Verbindungen mit den von Dr. Fraas in München und Dr. Henneberg in Hannover mitgetheilten sind bis jetzt für folgende Rassen folgende Formzahlen beobachtete worden:

a. Kühe.

Rasse oder Schlag	Formklasse. Beobachtete	Formklasse. Abgeleit. mittlere.	Karakterist. Notizen.
Engl. Kurzhorn .	20½	21 (?)	Auf dem Gute des Herrn A. Smith in Hainsberg bei Tharand. — Jung, mässig bei Fleisch; feiner Knochenbau; bald nach dem Kalben. Der Verf.
Aishire	22½	22 (?)	Tharander Akademie-Gut. — Alt und mager, Formigkeit: Aehnlich der der Voigtländer, aber feiner im Knochenbau. D. Verf.
Voigtländer	22—23	23	Tharander Akademie-Gut. — Da mehrere Stücke tragend waren, ist es möglich, dass 22½ richtiger sei. D. Vf.
Holländer . . .	23½	22½ (?)	Hainsberg bei Tharand. Altes Vieh; daher wohl als schwerformige Art dieser Rasse zu betrachten. D. Vf.
Sächs. Landvieh .	23—25	24	In Hainsberg und Braunsdorf. D. Vf.
Allgauer . . .	22½—25	23½	Auf dem sächs. Staatsgute Braunsdorf. — Die Klasse 22½ für das sehr junge Vieh.
Friesische . . .	21½—22½	22	Mehrere Güter in Hannover. Mager und fett, 21½ für die mittelalten, 22½ für ein altes Stück. Dr. Henneberg.

b. Ochsen.

Rasse oder Schlag	Formklasse. Beobachtete	Formklasse. Abgeleit. mittlere.	Karakterist. Notizen.
Voigtländer . .	18—20	19	Braunsdorf. Arbeitsochsen; fast noch mager. Ziemlich verschieden im Baue. Der Verf.
Fränkische . . .	$17\frac{1}{2}$—19	18	In Hannover. Mastochsen. Von Michaelis bis Pfingsten mit Schlämpe gefüttert. Dr. Henneberg.

c. Bullen.

Rasse oder Schlag	Formklasse. Beobachtete	Formklasse. Abgeleit. mittlere.	Karakterist. Notizen.
Friesische . . .	16—$16\frac{1}{2}$	16	In Hannover. Dr. Henneberg.
Mürzthaler (verwandt d. Ungern)	20 (?)	—	In München. Dr. Fraas.

§. 568. Lehrbeispiele.

1. Eine alte (schwerformige) Allgauer Kuh hatte 84 sächsische Zoll Brustumfang; also wieviel Lebendgewicht?

   Die Formklasse laut §. 567 und 564 ist $24\frac{1}{2}$, also die sächsische Formzahl nach S. 722 = 18. Das Messknechtsprodukt $= Sx_{42}$. 42 = 160 . 42 = 6720; also das Gewicht = 67,20 × 18 = 1210 Zollpfund.

2. Ein ziemlich leichtformiger Ochse maass in Oesterreich 84 Zoll Umfang und hatte sonach an Lebendgewicht?

   Schätzt man ihm die Formklasse 18 auf, der laut S. 722 eine österreichische Formzahl knapp $16\frac{1}{2}$ entspricht, so hat man Gewicht = 67,20 × $16\frac{1}{2}$ knapp = 67 × $16\frac{1}{2}$ = 1106 österreichische Pfund.

§. 569. Erfahrungsbeispiele nach Beobachtungen des Verfassers, aus dem Tharander mathematischen Praktikum, bei Messungen an Kurzhorn, Aishire, Voigtländer, Holländer und Allgauer Kühen und Voigtländer Ochsen, vierundvierzig an Zahl, mit einem durchschnittlichen Fehler von noch nicht 1 Procent, finden sich nachgewiesen auf S. 43 bis 46 der vorn, S. 711, erwähnten Broschüre.

§. 570. Erfahrungsbeispiele nach Beobachtungen des Dr. Henneberg in Hannover (s. dessen „Journal für Landwirthschaft“).

Erste Reihe. Kühe. Vier Stück. Friesische Rasse. Alter: 6, 7, 8, 14 Jahre; davon die ersten zwei im mageren, die anderen zwei im fetten Zustande. Seit 12 Stunden kein Futter erhalten. Ihre Formzahlen für hannoversche Zoll- und Handelspfunde berechneten sich der Reihe nach zu 17,6; 18,1; 18,0 und 18,3, stiegen also ebenfalls mit dem Alter und unabhängig vom Mastzustande (vergl. S. 719). Ihr Mittel 18 entspricht der preussischen Formzahl (oder der Formklasse) 21. Und es fand sich bei Anwendung der Zahl 18:

Beim Stück.	Mastknechtsgewicht.	Wagengewicht.	Differenz in Procenten.
1	1047	1026	2 zu viel.
2	896	902	0,7 „
3	1194	1194	0 „
4	1086	1108	2 zu wenig.

Hätte man aber, wie es S. 721 vorschreibt, für das jüngere Stück die mittlere Formzahl 18 um etwa $\frac{1}{2}$ verringert, für das ältere um $\frac{1}{2}$ vermehrt, so würden die Fehler gewesen sein

bei Nro. 1 = 0,5 Proc.; bei Nro. 2 = 0,7 Proc.;
„ „ 3 = 0 „ ; „ „ 4 = 0,5 „ ; also durchschnittlich noch nicht $\frac{1}{2}$ Proc. Fehler.

Zweite Reihe. Ochsen. Acht Stück. Fränkische Rasse. Ueber $\frac{1}{2}$ Jahr lang mit Schlämpe gemästet. Durchschnittliche Formklasse (preussische Formzahl) $18\frac{1}{3}$. Ohne Einschätzung der Formigkeit oder nur mit der Formzahl $18\frac{1}{3}$ behandelt, ergab sich der grösste Fehler 4 Procent. (S. Journal für Landwirthschaft. 1854. S. 70.)

2. Messung des Schlachtgewichts.

§. 571. In der Anmerkung S. 712 ist an einem Beispiele gezeigt und in dem S. 711 erwähnten selbständigen Werkchen über den Mastknecht vollständig nachgewiesen, dass der Knecht das Schlachtgewicht, so wie es die Dombasleschen Messbänder und Tabellen ergeben, ebenfalls gleich aus dem Messknechtsprodukte findet, sobald man die halben Formzahlen der Klasse 20 anwendet.

Für Preussen, England etc. ist demnach diese Schlacht-

formzahl = 10; für's Königreich Sachsen $7\frac{1}{3}$. Will man also wissen, was Dombasle's Messband angiebt für ein Rind von 68 Zoll Umfang, in Preussen gemessen, so antwortet unser Mastknecht: $Sx_{34} . 34 = 105 . 34 = 3570$; also Schlachtgewicht = 357,0 Zollpfund. Und wenn die Messung sächs. Maass bedeutet: $Sx_{34} . 34 = 3570$; sonach Schlachtgewicht $= 35{,}70 \times 7\frac{1}{3} = 251$ Zollpfund. Schon durch diese Thatsache allein, dass die Gewichte der Dombasle'schen Methode einer einzigen Formklasse nur entsprechen, ist die Quelle der vielfach beobachteten fehlerhaften Angaben dieser Methode aufgeklärt.

§. 572. Wollte man dessenungeachtet das Schlachtgewicht gleich aus dem Messknechtsprodukte ableiten und dabei die Fehler des alten Messbandes vermeiden, so mache man es so:

Nach dem 1. Abschnitte dieses Kapitels gebe man dem Thiere seine Lebendgewichtsformzahl, und reducire diese, ehe man sie anwendet, nach den dem Mastzustande und der Auffassung des Schlachtgewichts entsprechenden, aus der Tabelle S. 728 ersichtlichen Procentzahlen*).

1. Beispiel. Dem obigen Rinde ward zugesprochen die Totalgewichtsklasse 20, also für preussische Zoll und Zollpfunde die Formzahl 20, und die Mastklasse: gut fett; also bei Einrechnung von Talg und Fett die Schlachtformzahl $20 \times 0{,}60 = 12$ (s. S. 728 dritte Spalte); folglich das Schlachtgewicht $= 35{,}70 . 12 = 428{,}4$ Pfund.

2. Beispiel. Nach Dr. Henneberg's Mittheilungen betrug bei jenen 4 Kühen, deren Lebendgewicht der Mastknecht trotz ihres ganz verschiedenen Mastzustandes nach ihrer gemeinschaftlichen Rasseformklasse 18 so genau ermittelte, (S. 726) bei

		vollständ. Schlachtgewicht	Schlachtformzahl
Nro. 1	mager.	41 Proc.;	8,4 (preuss.)
„ 2	„	36 „	7,7 „
„ 3	„	60 „	12,6 „
„ 4	„	$57\frac{1}{2}$ „	12,4 „

Das Dombasle'sche (nach der Formzahl 10 arbeitende Messband) würde sonach beim Stück Nro. 2 nahe 30 Procent und beim Stück Nro. 3 über 20 Procent falsch geschätzt haben!

---

*) Die Messknechtstafel sub 6 des Feldes Viehmesskunst giebt diese Schlachtgewichtsformzahlen (im Grundwerthe) für die mittlere Formklasse (20) der Ochsen.

§. 578. Das Schlachtgewicht wird daher viel zweckmässiger so gemessen, dass man erst das Lebendgewicht und daraus die beliebigen Sortengewichte an Fleisch, Talg, Haut etc. nach den erfahrungsmässig ziemlich gut zutreffenden Procentsätzen ableitet, welche nach v. Pabst's Rindviehzucht sind:

Rindvieh-Sortengewicht in Procentzahlen des Totalgewichtes.

(In gedrängter Form sub 7 des Feldes „Viehmesskunst" der Messknechtstafel).

	An Fleisch (4 Viertel).	An Talg und Nierenfett.	An Fleisch, Talg und Nierenfett zusammen.	An Haut in frischem Zustande.
Es hat:				
1) Mageres Vieh .	44 — 48	1 — 4	45 — 52	6 — 7
2) Fleischiges bis halbfettes Vieh	50 — 53	3 — 7	53 — 60	$5\frac{1}{2}$ — 7
3) Gut fettes Vieh .	52 — 54	6 — $8\frac{1}{2}$	58 — 62	5 — $6\frac{1}{2}$
4) Sehr fettes Vieh (engl. Mastung)	55 — 60	6 — 8	61 — 68	5 — $6\frac{1}{2}$
5) Hochfettes Vieh (vorzüglichste engl. Mastung) .	60 — 65	6 — 12	66 — 77	5 — 6

Beispiel. Ein nach sächsischer Auffassung vorzüglich gemästeter Landochse, der 3. Mastklasse angehörig, maass nach preuss. Bande (etwas knapp) 47 Zoll halben Brustumfang, hatte also an Messknechtsprodukt $47 \times 200 = 9400$; und demnach muthmaasslich

an Lebendgewicht (Formzahl 20) $= 94 \times 20 = 1880$ Pfund;

an Fleisch 52 bis 54 Proc. oder = 978 Pfund bis 1000 Pfund;

an Talg und Fett 7 Proc. oder $18{,}8 \times 7 = 131{,}6$ Pfd., znsammen 1110 Pfund bis 1130 Pfund.

(Bei Anwendung der Schlachtformzahl 10 dagegen an 4 Vierteln und Nierenfett $94 \times 10 = 940$ Pfund.)

Ausgeschlachtet gab dies Rind an Fleisch 998 Pfund, an Talg 101 Pfund, an Nierenfett 40 Pfund. Das Dombasle-

sche Messband hätte also circa 200 Pfund zu wenig ergeben; während der Mastknecht nahe genug an die Wirklichkeit kam.

3. Messung des Mastfortschrittes und der Wirkungen der Mastfuttermittel.

§. 574. In so fern es durch die bisherigen Erfahrungen bewiesen scheint, dass ein Thier durch's Fettwerden nicht aus der seinem Körperbaue zugehörigen (Lebendgewichts-) Formklasse herausgedrängt wird, vermag unser Mastknecht den relativen und selbst den absoluten Werth der verschiedenen Fütterungsmethoden mit einer Sicherheit zu bestimmen, welche der der Wage nicht viel nachgeben kann. Allein selbst wenn spätere umfänglichere Ermittelungen zeigen sollten, dass obiger Erfahrungssatz bei extremen Mastzuständen nicht mehr ganz zuträfe, würde doch die Vergleichung des Mastfortschrittes innerhalb dieser Extreme immerhin mit meist genügender Genauigkeit durch's Messband zu ermitteln sein.

§. 575. Denn um die Ergebnisse einer Mastung und ihres Fortschrittes vergleichend zu ermitteln, braucht man die Formzahl nicht auf das Genaueste zu wissen oder anzuwenden. Da es hier mehr auf die Beobachtung oder Vergleichung der Gewichtszunahme als auf die des absoluten Gewichtes selbst ankommt, thut man sogar besser, eine zwar möglichst annähernde, aber doch auch möglichst bequeme Formzahl, z. B. 20 oder 25 (Hundertel), d. h. $^1/_5$ oder $^1/_4$ zu nehmen. Durch zeitweilige Messung oder durch Berechnung nach dieser Formzahl wird man den Fortschritt oder die Zunahme des Gewichtes sehr gut und sicher beurtheilen können, wenn auch die genaue Ermittelung des wirklichen Gewichtes später die Anwendung der dem Viehstücke entsprechenden speciellen Formzahl erheischt.

Also, wenn auch alle umstehend aufgeführten Formzahlen unrichtig wären oder wenn man ihre Richtigkeit zu bezweifeln Ursache hätte, würde immerhin der Messknecht ein nicht zu verachtender Gehülfe bleiben, um den Fortschritt der Mastung in Zahlen zu veranschaulichen.

§. 576. 1. Beispiel.

Bei einem Mastungsversuche habe ein Ochse bei allmonatlicher Messung an halbem Brustumfange folgende Zahlen ergeben:

Anfangsstärke 40 Zoll; nach 1 Monat $40^1/_2$; nach 2 Monaten 41; nach 3 Monaten 42 Zoll.

Nach welchen Zahlen nahm die Gewichtsvermehrung zu?

Nimmt man die Formzahl 0,25 oder $\frac{1}{4}$, so hätte man:

Anfangsgewicht: $\frac{40 \times 145\frac{1}{2}}{4} = 1455$ Pfund;

			Zunahme:
Nach 1 Monat:	$\frac{40\frac{1}{2} \times 149}{4} = 1508$	„	53 Pfund
Nach 2 Monaten:	$\frac{41 \times 153}{4} = 1568$	„	60 „
Nach 3 „	$\frac{42 \times 160}{4} = 1680$	„	120 „

Und wünscht man die allmonatliche Zunahme im Procentsatze des jedesmaligen Anfangsgewichtes des Monats auszudrücken, was allerdings die anschaulichsten Zahlen giebt, so hätte man

a) für den ersten Monat: $1455 : 100 = 53 : p$;

die Zunahme $p = \frac{53 \times 100}{1455} = 3{,}64$ oder fast $3\frac{2}{3}$ Proc. des Lebendgew.

b) f. d. 2. Monat: $p = \frac{60 \times 500}{1508} = 3{,}97$ oder fast 4 Proc. des Lebendgew.

c) f. d. 3. Monat: $p = \frac{120 \times 100}{1568} = 7{,}6$ oder reichlich $7\frac{1}{2}$ Procent.

Und jene Zahlen 53, 60, 120 behalten als Verhältnisszahlen, desgleichen auch diese Procentsätze, ihre entsprechende Richtigkeit, wenn auch dem Rinde eine ganz andere Formzahl als die dabei gebrauchte in der Wirklichkeit zukäme.

§. 577. 2. Beispiel.

Durch einige Ausschlachtungen sei die Formzahl des Totalgewichtes für einen Viehschlag hinlänglich konstatirt und (für preuss. Maass) $= 20$ ($= \frac{1}{5}$) gefunden worden*). Vor Beginn der Mast maass das Stück an Brustumfang 80 Zoll; nach 30 Tagen 81; nach abermals 30 Tagen 81,8. Und als man von da ab eine andere Fütterungsart einführte, nach weiteren 30 Tagen 83 und abermals weiteren

---

*) Ein Stück z. B. habe vor dem Schlachten an Brustumfang gemessen $84\frac{1}{2}$ Zoll; also an halbem $42\frac{1}{4}$; dem das Messknechtsprodukt $m = Sx_{42\frac{1}{4}} \times 42\frac{1}{4} = 162 \times 42\frac{1}{4} = 6844$ entspricht. Fand sich nun sein Totalgewicht nach dem Schlachten (incl. Blut, Urin und Futterbrei) $g = 1369$ Pfd. so war seine Formzahl $f = \frac{g}{m} = \frac{1369}{6844} = 0{,}20$ oder im Procentsatze: 20, oder als Bruch: $\frac{1}{5}$.

30 Tagen $84^1/_2$. Um wieviel Pfund nahm das Thier in jedem dieser Zeiträume wirklich zu?

Totalgew. Zunahme

Anfangs $= Sx_{40} \times 40 \times {}^1/_5 = 145\,{}^1/_2 . 8 = 1164$ Pfd.

Zu Ende der 2. Fütterungsperiode

$= Sx_{40^1/_2} \times 40^1/_2 \times {}^1/_5 = \frac{149 . 40^1/_2}{5} = 1207$ „ 43 Pfd.

Zu Ende der 2. Fütterungsperiode

$= Sx_{40,9} \times 40,9 \times {}^1/_5 = 152 . 40,9 . {}^1/_5 = 1244$ „ 37 „

Zu Ende der 3. Fütterungsperiode

$= Sx_{41^1/_2} \times 41^1/_2 . {}^1/_5 = 156,5 . 41^1/_2 . {}^1/_5 = 1330$ „ 96 „

Zu Ende der 4. Fütterungsperiode

$= Sx_{42^1/_4} \times 42^1/_4 \times {}^1/_5 = 162,2 . 42^1/_4 . {}^1/_5 = 1370$ „ 40 „

Die erste Methode hatte also durchschnittlich pro Tag

$\frac{43 + 37}{60} = 1,3$ Pfund Lebendgewicht und die andere

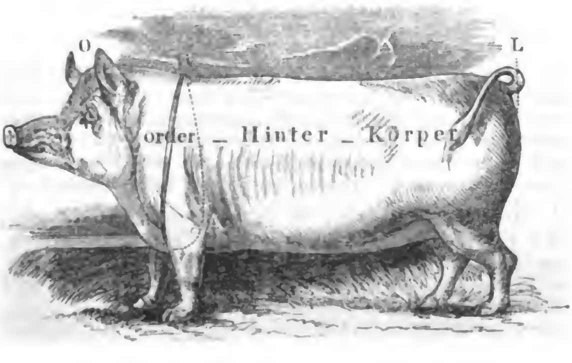
$\frac{96 + 40}{60} = 2,3$ Pfund Lebendgewicht erzeugt.

Einundvierzigstes Kapitel.

Der Mastknecht für Schweine.

1. Messung des Lebendgewichtes.

Fig. 475.



§. 578. Die Regeln zur Abnahme des Brustumfanges, des Messknechtsproduktes und des Gewichtes sind ganz dieselben, die bei der Rindviehschätzung zu beachten waren und S. 716 und 718 angegeben sind. Dasselbe gilt von dem Verfahren (S. 717), das man bei Bestimmung der Formzahl irgend einer Schweineform einzuschlagen hat.

1. Beispiel. (Autorität: Dr. Henneberg im Journal für Landwirthsch. 1854. S. 71.) Engl. Rasse; $1\frac{1}{2}$ Jahr; fett. Letzte Fütterung Abends vor dem Schlachttage. Brustumfang 57 hannov. Zoll (halber $28\frac{1}{2}$); Gewicht 459 hannov. Pfund. Also Formzahl?
Messknechtsprodukt $m = Sx_{28\frac{1}{2}} \times 28\frac{1}{2} = 73{,}8 \times 28\frac{1}{2}$
$= 2103$; Formzahl $= \frac{g}{m} = \frac{459}{2103} = 0{,}218$, d. h.
knapp 22.

Zusatz. Im Grundwerthe (s. S. 718) oder für rhein. Zoll und Zollpfunde hätte man laut a- und h-Tabelle des Knechtes: 57 hannov. Zoll = 53 preuss.; 459 hannov. Pfund = 429 Zollpfund; Messknechtsprodukt $= Sx_{26\frac{1}{2}} \times 26\frac{1}{2} = 63{,}8 \cdot 26\frac{1}{2} = 1690$; Formzahl $= \frac{429}{1690} = 0{,}254$, also knapp $25\frac{1}{2}$.

2. Beispiel. Für den ziemlich langen und krummrückigen Bau eines sächsischen Landschlages ward auf dem akademischen Gute zu Tharand die Formzahl = 27 (preuss. oder Grundwerth) ermittelt. Es soll der Mastknecht das Lebendgewicht eines dergleichen Stückes angeben, das im Brustumfange $37\frac{1}{2}$ Zoll maass?
Messknechtsprodukt $= Sx_{18\frac{3}{4}} \times 18\frac{3}{4} = 32 \times 18{,}7$
$= 5981$ Gewicht $= 5{,}98 \times 27 = 161$ Pfund.
Die Wage ergab 160 Pfund.

§. 579. Es darf nicht überraschen, dass die Gewichtsmessung der Schweine etwas schwieriger ist, als die des Rindviehs, und dass die Formzahlen grösseren Schwankungen unterworfen zu sein scheinen. Interessant ist es aber, dass sie sich nach den bisherigen Beobachtungen ebenfalls in denselben Grenzen 15 und 27 gehalten haben, als beim Rindvieh.

Die frühere Tabelle, S. 722 und 723, gilt sonach auch hier als Tabelle der Formzahlen und Formklassen für's Lebendgewicht der Schweine. Denken wir uns also dort die auf's Rindvieh sich beziehenden Ueberschriften hinweg, so kann ihre Wiederholung erspart werden.

NB. Die (Grundwerthe oder preuss. Ziffern der) Schweineformzahlen in dem Felde „Viehmesskunst“ der Messknechtstafel beziehen sich auf das Messknechtsprodukt nach dem ganzen Umfange, und sind daher nur $\frac{1}{8}$ $\left(\text{nämlich} = \frac{1^3}{2^3}\right)$ der obigen.

§. 580. Von Erfahrungszahlen über die Formklassen von Mastschweinen ist zur Zeit nur Folgendes ermittelt worden:

		Formklasse	
Yorkshire-Rasse,	(halbfett; jung)	$20\frac{1}{2}$	(Tharander akad. Gut; beobachtet vom Verfasser.)
Essex . . .	(fett; jung)	23	(Staatsgt. Braunsdorf; beobachtet vom Verfasser.)
Landschweine	(halbfett; jung)	27	(Tharander akad. Gut; beobachtet vom Verfasser.)
Calenberger Landrasse . . .	(fett; alte Sauen)	$15\frac{1}{2}$?	(Wenn diese 15 richtig ist, muss diese Rasse wohl eine sehr schmale längliche Brustfläche haben; mitgetheilt von Dr. Henneberg.)
„Englische Rasse“	(fett)	24	(Mitgetheilt v. Dr. Henneberg.)

§. 581. Erfahrungsbeispiele nach Beobachtungen des Verfassers.

Erste Reihe. Auf dem akad. Gute bei Tharand. Nro. 1. Yorkshire, mit $41\frac{3}{4}$ preuss. Zoll Brustumfang; Nro. 2. Yorkshire $40\frac{3}{4}$ preuss. Zoll Umfang; Nro. 3. Kreuzung von Yorkshire und Landschwein; mit jenen aber im Bau sehr ähnlich; $38\frac{1}{4}$ Zoll Brustumfang. Sonach ihr Lebendgewicht? — Nach obiger Formklasse $20\frac{1}{2}$, die zugleich fürs preuss. Zollband die Formzahl ist, folgt für das Gewicht von

Nro. 1. Messknechtsprodukt $= Sx_{20,9} \times 20,9 = 828$; Gewicht also $= 8,28 \times 20\frac{1}{2} = 170$ Pfund.

Nro. 2. Messknechtsprodukt $= Sx_{20,4} \times 20,4 = 771$; Gewicht also $= 7,71 \times 20\frac{1}{2} = 157$ Pfund.

Nro. 3. Messknechtsprodukt $= Sx_{19,1} \times 19,1 = 634$: Gewicht also $= 6,34 \times 20\frac{1}{2} = 130$ Pfund.

Die Wage ergab nach der Reihe 175, 150, 135 Pfund.

Zweite Reihe. Essex Schweine. Siehe die Mastknechtsbroschüre S. 75.

§. 582. Erfahrungsbeispiele nach Dr. Henneberg in Hannover (Journal für Landwirthschaft. 1854. Seite 72).

Aeltere Sauen der Landrasse im Fürstenthum Calenberg. Formklasse $15\frac{1}{2}$; hannoversche Formzahl also laut Tabelle $= 12{,}5$ für Zollpfund; dagegen für Handelspfund laut Nota derselben Tabelle $= 12{,}5 \times 1{,}07 = 13\frac{1}{2}$.

1. Achtjährige Sau; fett. (Formklasse $15\frac{1}{2}$.) Brustumfang 63 Zoll hannoversch. Gewicht in hannoverschen Handelspfunden?

   Messknechtsprodukt $= Sx_{31\frac{1}{2}} \times 31\frac{1}{2} = 90 \;.\; 31\frac{1}{2} = 2835$; Gewicht $= 28{,}35 \times 13\frac{1}{2} = 382$ Pfund. Auf der Wage 388 Pfund.
2. Eine dergleichen. Brustumfang 64 hannoversche Zoll. — Gewicht?

   Messknechtsprodukt. $Sx_{32} \times 32 = 93 \;.\; 32 = 2976$; Gewicht $= 29{,}76 \times 13\frac{1}{2} = 402$ Pfund. — Auf der Wage 405 Pfund.
3. Eine dritte dergleichen mit 68 Zoll Umfang?

   Messknechtsprodukt $= Sx_{34} \times 34 = 105 \;.\; 34 = 3570$; Gewicht $= 35{,}70 \times 13\frac{1}{2} = 482$ Pfund. Auf der Wage 429 Pfund; (welcher Differenz von 53 Pfund, wohl ein Messungsfehler zu Grunde liegen dürfte.)

2. Messung des Schlachtgewichtes.

§. 583. Beim Schweine ist unterm Schlachtgewicht das Gewicht des ausgeweideten Thieres, einschliesslich Kopf und Beine, zu verstehen. (An manchen Orten schliesst man die Vorderbeine davon aus.) Im Allgemeinen lässt sich annehmen, dass angefütterte, circa einjährige Schweine 73—75 Procent, ausgemästete, $1—1\frac{1}{2}$jährige 75 — 80 Procent des Lebendgewichts an Schlachtgewicht geben.

Dr. Henneberg (Journal für Landwirthschaft. 1854. Seite 79) folgert aus seinen Unterlagen, dass, weil der Procentsatz des Schlachtgewichtes bei Schweinen im halb- und ausgemästeten Zustande zwischen viel engeren Grenzen schwanke, als beim Rindvieh, der Mastknecht das Schlachtgewicht der Schweine unmittelbar hinlänglich genau anzugeben im Stande sei, sobald man nur die Formzahl des Totalgewichtes, die allerdings bekannt sein muss, durch Multiplication mit jenem Procentsatze auf die Schlachtgewichtsformzahl reducirt. Da es indess stets interessant ist, auch das Totalgewicht zu kennen, wird man immerhin besser thun, erst dieses zu bestimmen, und daraus mittels obiger Procentsätze das Schlachtgewicht abzuleiten.

§. 584. Erfahrungsbeispiele.

Die in §. 582 berechneten drei Calenberger Landschweine,

wenn man ihr Schlachtgewicht zu 78 Procent nimmt, hätten gemessen?

Nro. 1 an Schlachtgewicht 382 $\times$ 0,78 = 298 hannov. Pfd.
Nro. 2 „ „ „ 402 $\times$ 0,78 = 314 „ „
Nro. 3 „ „ „ 482 $\times$ 0,78 = 376 „ „
und ergaben auf der Wage nach der Reihe 326, 342, 352 Pfund.

3. Messung des Mastfortschrittes.

§. 585. Es ist dem vorigen Abschnitte gemäss selbstverständlich, dass der Mastknecht die Wirkungen der Futtermittel oder die Gewichts**zunahme** an einem und demselben Schweine mit grösserer Präcision angiebt, als das Total- und Schlachtgewicht verschiedener Thiere; denn die Formzahl kann sich bei demselben Stücke im ruhigen Verlaufe der Mast doch nicht wesentlich, wenigstens nicht sprungweise, verändern.

Beispiel. Der Brustumfang eines Schweines von der Formklasse 20 nahm im Verlaufe von 1 Monat von 64 auf 66 zu. Wieviel Pfund Lebend- und Schlachtgewicht hat also das Futter dieses Monats erzeugt?

Totalgew. anfangs $Sx_{32} \times 32 \times 0{,}20 = \frac{93 \,.\, 32}{5} = 595$ Pfund;

„ nach 1 Monat $Sx_{33} \times 33 \times 0{,}20 = \frac{99 \,.\, 33}{5} = 653$ Pfund.

Also Zunahme an Lebendgewicht: 58 Pfund; und, wenn man annimmt, dass das Schlachtgewicht 75 Procent oder $^3/_4$ betrage, dann Zunahme an Schlachtgewicht $58 \,.\, ^3/_4 = 43^1/_2$ Pfund.

§. 586. Es folge nun schliesslich hier noch das mehrfach schon erwähnte und der Beachtung empfohlene

Fig. 476.

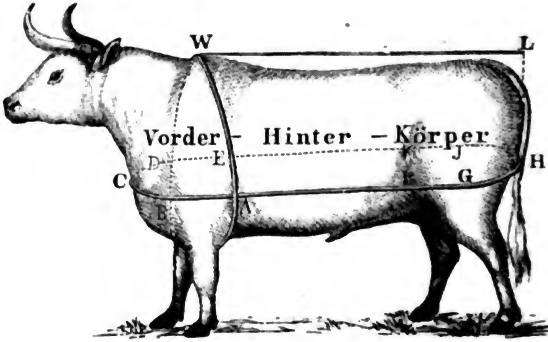
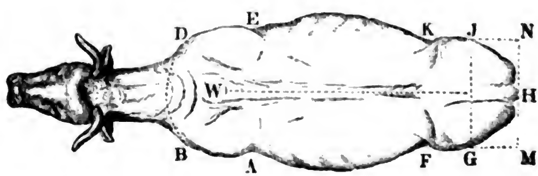


Fig. 477.



Reglement

für solche Freunde des Mastknechts, die demselben — durch weitere Beobachtungen über Formzahlen und namentlich über Formzahlmessung — zu noch mehr praktischer Bildung verhelfen wollen.

Es ist zu messen und anzugeben:

a. Der Brustumfang nach S. 716 und das zugehörende Messknechtsprodukt.

b. Der Längsumfang, indem das Band über die beiden Brustbeine *B* und *D*, dann am Ranzen hin und auf dem Schwanz bei *H* zusammen gezogen wird, wo *H* in kürzester Linie in der Mitte der Höhe der Hinterbacken zu

Fig. 478.

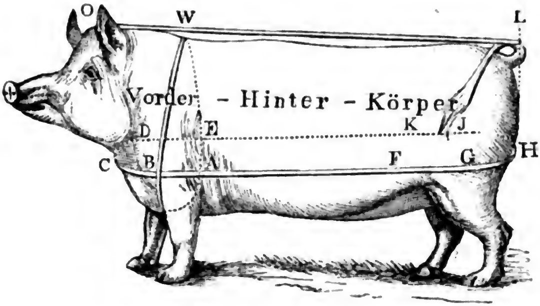
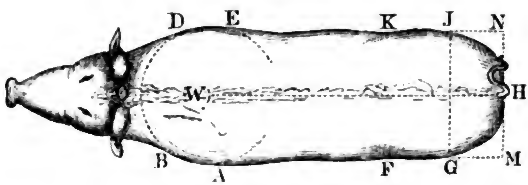


Fig. 479.



wählen, das Band also nicht streng horizontal zu ziehen ist.

c. Die Breite *BCD* von Brustbein zu Brustbein scharf um den Hals herum.

d. Der Horizontalumfang *ABCDE* des Brustkastens von der Hinterkante *A* des einen bis zur Hinterkante *E* des anderen Schulterblattes.

e. Die Rückenlänge vom Buggelenke *W* horizontal bis zum Ende *L* der Hinterbacken.

f. Die Breite *JG* des Hinterviertels, schwierig zu messen; am besten, wenn man sich gerade hinter das Thier stellt, und einmal die Breite *HM* und dann *HN* misst, indem man *GM* und *JN* möglichst parallel mit dem Rückgrate einvisirt. Wenn das Band von einem Gehülfen gehalten

wird, kann MN auf einmal einvisirt werden; doch muss man sich dabei möglichst entfernt vom Thiere aufstellen.

g. Der Horizontalumfang GHJ von Keulenmitte zu Keulenmitte.

h. Der Horizontalumfang FHK des Hinterviertels, von der Dünnung oder Lendengrube F bis zur jenseitigen K.

i. Durch die Wage ermitteltes Gewicht; im Falle dies durchs Ausschlachten geschehen, Gewicht α) der vier Viertel; β) des Talgs und Nierenfettes; γ) der Totalmasse inclusive Blut, Urin und Futterbrei.

k. Angabe des gebrauchten Zolles und Gewichtes.

l. Zeit der letzten Futterung vor dem Wägen oder Schlachten.

m. Rasse, Geschlecht, Alter.

n. Mastungszustand nach den fünf Graden der Tabelle. S. 728.

o. Die Zahl von i dividirt durch das Messknechtsprodukt von a giebt die Formzahl; und es ist nun zu versuchen, welche Division mit a, ob die von a in b, oder von a in $c + e + f$ oder in $d + g$ oder in $d + h$ oder in $d + e + g$ solche Werthe giebt, die mit den Formzahlen in einer bestimmten Beziehung stehen, d. h. für jede verschiedene Formklasse dieselbe verschiedene Ziffer geben.

(Die Agronomische Zeitung des Herrn Dr. Hamm ist gern bereit, dergleichen Beiträge aufzunehmen. Auch wird der Verfasser, der schon dankbar sein wird, wenn ihm auch nur die nackten Grössen der Messung und Wägung ohne alle weitere Berechnung bekannt gegeben werden, sehr gern die Zurechtlegung, Berechnung und Veröffentlichung der ihm etwa mitzutheilenden Erfahrungen besorgen. Gelingt es aber, durch dergleichen Messungen und Vergleichungen einen Schlüssel für die Formzahl aufzufinden, dann würde die grosse Viehwage künftig ganz entbehrlich und würden Mastviehhandel, Schlächtergebot, Schlachtsteuern und Mastungsmethoden durch das Messband allein unter eine sichere mathematische Polizei gestellt sein; ein Ziel, das wohl der Mithülfe der Betheiligten werth sein dürfte.)

Kleiner Anhang

für

Leute

ohne algebraische Schule.

§. 1. Sobald aus gegebenen Grössen der Arithmetik und Geometrie andere im Wege der Rechnung gefunden, also aus bekannten Zahlen andere noch unbekannte abgeleitet werden sollen, hat dies stets nach gewissen, eigenthümlichen Gesetzen zu geschehen. Diese Gesetze aber und die ganzen Arbeiten bei ihrer Benutzung werden dadurch besonders kurz im Ausdrucke und anschaulich und übersichtlich, dass wir die fraglichen Grössen nicht durch Ziffern, sondern durch Buchstaben und überhaupt alle ihre Beziehungen, alle Operationen und Regeln möglichst symbolisch, durch kurze Zeichen, ausdrücken. Die Buchstaben werden in der Regel aus dem lateinischen, zum Theil auch aus dem griechischen Alphabete genommen. Da das letztere mit dem ersteren nicht ganz harmonirt (es ermangelt des *c*, *h* etc. und besitzt dafür andere, die jenem fehlen), so nimmt man für gewöhnlich an

α	(sprich	alfa)	als	gleichbedeutend		mit	*a*
β	(„	beta)	„	„	„	„	*b*
γ	(„	gamma)	„	„	„	„	*g* u. *c*
δ	(„	delta)	„	„	„	„	*d*
ε	(„	epsilon)	„	„	„	„	*e*
φ	(„	fi)	„	„	„	„	*f*
ι	(„	iota)	„	„	„	„	*i*
κ	(„	kappa)	„	„	„	„	*k*
λ	(„	lambda)	„	„	„	„	*l*
μ	(„	mi)	„	„	„	„	*m*
ν	(„	ni)	„	„	„	„	*n*
ο	(„	omicron)	„	„	„	„	*o*
π	(„	pi)	„	„	„	„	*p*
ψ	(„	psi)	„	„	„	„	*q*

ϱ	(sprich ro)	als	gleichbedeutend	mit			*r*
σ	(„ sigma)	„	„	„	„		*s*
τ	(„ tau)	„	„	„	„		*t*
ω	(„ omega)	„	„	„	„		*u*
ξ	(„ xi)	„	„	„	„		*x*
ζ	(„ zeta)	„	„	„	„		*z*

sowie Δ (Delta) statt D; Σ (Sigma) statt S.

§. 2. Manche Buchstaben haben eine ziemlich specielle Bedeutung erlangt; so π für die Zahl 3,141592, d. h. für das Verhältniss der Peripherie des Kreises zum Durchmesser; n für die Gliederzahl (*numerus*) irgend einer Reihe z. B. von Jahren; g in der Mechanik für die Beschleunigung der Schwerkraft (*gravitas*) etc. Wenn man eine und dieselbe in verschiedenen Werthen vorkommende Grössenart gern durch denselben Buchstaben bezeichnen will, so hilft man sich durch unten angehängte Zeigerzahlen (Indexe); wie z. B. d_1, d_2, d_3 etc. (sprich *d*erst, *d*zweit, *d*dritt, *d*viert . . .), welche Buchstaben etwa die Durchmesser der 1., 2., 3. Section eines Stammes bedeuten und ganz verschiedene Zahlenwerthe haben können.

Ausser, wo die Buchstaben Punkte einer Figur bezeichnen, hat man sich unter ihnen also stets beliebige oder entsprechende Zahlengrössen vorzustellen.

§. 3. Die Operationszeichen.

$a = b$ (sprich: *a* gleich *b*) bedeutet, dass der Gegenstand *a* (Zahl, Fläche, Körper) an Grösse von *b* nicht verschieden oder *b* mit *a* grössengleich ist.

$a \sim b$ (spr.: *a* ähnlich *b*) bedeutet, dass die Fläche oder der Körper *b* in allen seinen Abmessungen zu *a* proportionirlich, also mit *a* gestaltgleich oder ähnlich ist.

$a \cong b$ (spr.: *a* ähnlichgleich *b* oder *a* congruent mit *b*) bedeutet, dass die Fläche oder der Körper *b* an Grösse wie an Gestalt mit *a* ganz einerlei ist, so dass beide, genau an dieselbe Raumstelle (denselben Ort) gebracht, sich gegenseitig in allen Punkten ihrer Umgrenzung zudecken (congruiren).

$a + b$ (spr.: *a plus b*; gleichbedeutend mit $+ a + b$) zeigt: dass *a* und *b* im bejahenden (positiven) oder vermehrenden (additiven) Sinne vorhanden oder zu betrachten sind; wogegen bei

$a - b$ (spr.: *a minus b*; einerlei mit $+ a - b$, d. h. *plus a minus b*) die Grösse *b* gegenüber dem positiven *a* im verneinenden (negativen) oder vermindernden (subtractiven) Sinne sich verhält. (10 Vorwärts- *plus* 3 Rückwärts-Schritte schreibt sich nicht $10 + 3$, sondern $10 - 3$).

$a \times b$ oder $a \, . \, b$ oder kurz ab (spr.: a mal b oder a b) bedeutet, dass a mit b multiplicirt oder soviel mal zu sich selbst addirt gedacht wird, als b Einheiten enthält. Also wenn $a = 5$, $b = 3$, ist $ab = 5 \times 3 = 5 \, . \, 3 = 5 + 5 + 5 = 15$.

Bei einfachen Buchstabengrössen kann $\times$ oder . auch wegbleiben; und schreibt man kürzer $a\,b$ (sprich: $a\,b$, d. h. einfach jeden Buchstaben für sich) statt $a \, . \, b$. Bei Zifferngrössen würden aber arge Missverständnisse entstehen, indem man 53 nicht „5mal 3" sondern „dreiundfunfzig" lesen würde.

Wenn einer oder beide Faktoren mehrgliederig sind, wie z. B. in $(3\,a + 2\,b - c)\,m$ (sprich: drei a *plus* zwei b *minus* c, zusammen mal m), oder in $(mn - 3\,ab)(2\,m - bn)$ (sprich: mn *minus* drei ab zusammen mal 2 m *minus* bn), so hat man sie zur Vermeidung von Missverständnissen einzuklammern.

$a : b = \frac{a}{b}$ als Symbol der Division von b in a wird gelesen: a dividirt durch b oder a $b$tel; zugleich ist es aber auch Symbol des Verhältnisses von a zu b oder die Andeutung, dass die Grösse von a im Vergleiche oder Verhältnisse zu b, d. h. so ausgedrückt werden soll, als wenn b das Maass, (die Einheit) wäre.

Ist $a = 8$ und $b = 4$, so ist 8 dividirt durch $4 = 2$ und 8 im Verhältniss zur 4 das Doppelte, d. h. $= 2$, sobald die 4 als Vergleichseinheit gedacht wird.

Man kann daher sagen: das Verhältniss der Grösse 8 zur Grösse 4 ist $= {}^8/_4 = 2$.

Sobald Divisor oder Dividend in mehrgliedrigen Ausdrücken erscheinen, sind sie begreiflich ebenfalls in Klammern einzuschliessen, dafern man nicht die Bruchform wählt.

(Die Vorwerthsformel der einfachen Zinsrechnung lautet z. B. $k = K : (1 + en)$ oder $= \frac{K}{1 + en}$. Und ist das spätere Kapital $K = 100$, der Einheitszins $e = 0{,}03$, die Zahl n der Jahre $= 10$, so hat man als Vorwerth bei einfacher Verzinsung $k = \frac{100}{1 + 0{,}03 \, . \, 10} = \frac{100}{1 + 0{,}3} = \frac{100}{1{,}3} = \frac{1000}{13} = 76{,}9$ Thaler.)

§. 4. Statt $abc + abc + abc$ schreibt man kürzer $3\,abc$ und nennt die der Buchstabengrösse abc vorstehende Ziffer, welche sonach anzeigt, wie vielmal jene vorhanden oder zu nehmen ist, den Coëfficienten (Mitwirker, Mitmehrer).

Statt $15\,abbbcc$ schreibt man kürzer $5\,ab^3c^2$ (sprich:

5, a, b zur dritten. c zur zweiten) und nennt die kleine oben ausgesetzte (exponirte) Ziffer, welche anzeigt, wie vielmal eine Grösse als Faktor vorhanden oder zu nehmen ist, den Exponenten; eine dergleichen Exponentialgrösse aber eine Potenz, weil $b^3 = bbb$ die Grund- oder Wurzelgrösse b gleichsam in höherer Macht und Würde in sich begreift.

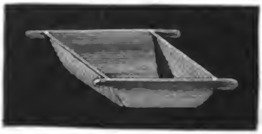
Wenn die Seite eines Quadrates $= a$ (z. B. $= 5$ Fuss), so ist sein Flächeninhalt $= a^2$ (nämlich $= 5^2 = 25$ Quadratfuss). Wenn die Seite eines Würfels (*Cubus*) $= a$, so ist sein Körperinhalt $= a^3$ ($= 5^3 = 125$ Kubikfuss.) In Folge dieser geometrischen Wahrheiten nennt man alle zweiten Potenzen auch Quadrate, alle dritten auch Würfel (Kubikzahlen).

Alle Grössen ohne beigeschriebenen Exponenten und Coëfficienten haben natürlich zu solchen die Eins. Es ist z. B. a soviel als $+ 1\,a^1$. Sobald ein mehrgliederiger Ausdruck als potenzirlich dargestellt werden soll, ist er in Klammern einzuschliessen. Es ist z. B. der 2jährige Nachwerth des Kapitales $k = K_2 = k\,(1 + e)^2$; der 3jährige $K_3 = k\ (1 + e)^3$; der $n$jährige $K_n = k\ (1 + e)^n$; (sprich: K mit (Index) n gleich $k$mal 1 *plus* e zur $n$ten.) Beim Kapital 100, beim Zinsfuss 3 (wo $e = 0{,}03$) und 5 Jahren ist $K_5 =$ $100\,(1 + 0{,}03)^5 = 100\ .\ 1{,}03^5 = 100 \times 1{,}03 \times 1{,}03 \times 1{,}03 \times 1{,}03 \times 1{,}03$.

§. 5. Jede Zahl kann man als eine 2te, 3te oder $n$te Potenz betrachten und demgemäss nach ihrer Grundzahl, d. h. nach ihrer zweiten, dritten, $n$ten Wurzel (*Radix*) forschen. So ist z. B. $\sqrt[2]{64}$ oder kürzer $\sqrt{64}$ (sprich: 2te oder Quadratwurzel aus 64) $= 8$, denn $8\ .\ 8 = 8^2 = 64$. $\sqrt[3]{64}$ (sprich: 3te Wurzel oder Kubikwurzel aus 64) $= 4$, denn $4^3 = 4\ .\ 4\ .\ 4 = 64$.

Das Geschäft des „Radicirens“ (Wurzelextrahirens) deutet man also dadurch an, dass man die zu radicirende Grösse (den „Radicanden“) unter das Zeichen $\sqrt{}$ setzt, welches ohne weiteren Exponenten eine Quadratwurzel, mit dem Exponenten 3 (als $\sqrt[3]{}$) eine Kubikwurzel bedeutet. — Die gewöhnliche Formel für die Berechnung des Raumes (Volumens) eines pyramidalen, parallel abgestumpften Körpers oder Kastens, z. B., dessen obere und untere Grundfläche g und G und lothrechte Höhe h, heisst laut S. 359 $V = \frac{h}{3}\,(G + g + \sqrt{G\,g})$; also

Fig. 480.



wenn $g = 9$ □Fuss, $G = 12$ □Fuss, $h = 6$ Fuss wäre, hätte man $V = \frac{6}{3}(12+9+\sqrt{12.9}) = 2(21+\sqrt{108})$ und weil nach Seite 39 und nach der Sx-Spalte

$$\sqrt{108} = \frac{3447}{10341}(3 \left.\begin{matrix} \\ \\ 2) \quad 5170 \end{matrix}\right\} = 10{,}4; \text{ folgt } V = 2(21+10{,}4) = 2 \times 31{,}4$$

$= 62{,}8$ Kubikfuss.

§. 6. Noch ist zu bemerken, dass solche Glieder eines Ausdrucks, welche gleiche Buchstaben und in den gleichen Buchstaben einerlei Exponenten haben, gleichnamige (homogene) genannt werden; wie denn z. B. in $3a^2b - 2ab^2 + a^2b - b^2 + 3ab^2$ das erste und dritte, zweite und fünfte Glied unter sich homogen, einander gegenüber aber heterogen sind.

§. 7. Es kann keinem Zweifel mehr unterworfen sein, wie man die Formelsprache, d. i. die algebraischen Ausdrücke, zu lesen und zu verstehen habe.

1) $(3a^2 - b^2 - 2ab) + (3a^2 + b^2 - ab)$ bedeutet, dass die zweite Klammergrösse zur ersten addirt werden soll; und ist sonach $+ 3a^2 - b^2 - 2ab + 3a^2 + b^2 - ab$.
2) $(3a^2 - b^2 - 2ab) - (3a^2 + b^2 - ab)$ bedeutet, dass die zweite Klammergrösse von der ersten abgezogen oder zur ersten im entgegengesetzten Sinne addirt werden soll, und ist also $= 3a^2 - b^2 - 2ab - 3a^2 - b^2 + ab$.
3) $2a^2(3a^2 - b^2 - 2ab)$ oder $(3a^2 - b^2 - 2ab)2a^2$ bedeutet, dass alle Glieder der Klammergrösse mit $2a^2$ multiplicirt werden sollen und ist
$$= 3a^2 . 2a^2 - b^2 . 2a^2 - 2ab . 2a^2.$$
4) $(3a^2 - b^2 - 2ab)(a^2 - b^2)$ bedeutet, dass alle Glieder der einen Klammergrösse mit jedem Gliede der anderen zu multipliciren sind; ist also
$= 3a^2(a^2 - b^2) - b^2(a^2 - b^2) - 2ab(a^2 - b^2)$ und in weiterer Auflösung $a^2 \times 3a^2 - b^2 \times 3a^2$, dazu $a^2 \times -b^2$ und $-b^2 \times -b^2$, dazu $a^2 \times -2ab$ und $-b^2 \times -2ab$.
5) $(3a^2 - b^2 - 2ab) : a^2$ oder $\frac{3a^2 - b^2 - 2ab}{a^2}$ bedeutet, dass jedes Glied der oberen oder ersteren dreigliedrigen Grösse durch a^2 zu dividiren sei, und ist also einerlei mit
$$3a^2 : a^2 - b^2 : a^2 - 2ab : a^2 \text{ oder } \frac{3a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{2ab}{a^2}.$$
6) $(3a^2 - b^2 - 2ab) : (a^2 - 2b^2)$ oder $\frac{3a^2 - b^2 - 2ab}{a^2 - 2b^2}$

(sprich: 3 a zur zweiten, *minus* b zur zweiten, *minus* 2 a b zusammen dividirt durch a Quadrat *minus* 2 b Quadrat) ist hiernach selbstverständlich.

7) $(3a^2 - 2ab)^2$ (sprich: $3a$ zur zweiten, *minus* 2 a b zusammen zur zweiten Potenz) bedeutet das Produkt $(3a^2 - 2ab)(3a^2 - 2ab)$.

8) $\sqrt{9a^2}$ (sprich: Quadratwurzel aus 9 a zur zweiten) bedeutet, dass man einen Werth suchen soll, der mit sich multiplicirt $9a^2$ erzeugt (hier $3a$, da $3a \times 3a = 9aa = 9a^2$).

9) $\sqrt[3]{8}$ (sprich: Kubikwurzel aus 8 bedeutet: die Zahl, die 3mal als Faktor gesetzt, den Radikanden 8 erzeugt (hier $= 2$, da $2.2.2 = 8$).

§. 8. Schreibt man die sub 1) des vorigen Paragraphen angedeutete Summe so, dass die gleichnamigen Glieder unter einander kommen, so hat man

$$\begin{array}{rl} 3a^2 - b^2 - 2ab, & \\ +3a^2 + b^2 - ab & \text{und sonach als} \\ \hline \text{Summa}\quad 6a^2 + 0 - 3ab = 6a^2 - 3ab. & \end{array}$$

Die **Addition algebraischer Grössen bewirkt man also dadurch, dass man die gleichnamigen als gleichbenannte Zahlen betrachtet und deren Coëfficienten nach Maassgabe ihrer Vorzeichen mit einander vereinigt.**

§. 9. Auf ganz ähnliche Weise folgt aus 2) des vorigen Paragraphen

$(3a^2 - b^2 - 2ab) - (3a^2 + b^2 - ab) = 3a^2 - b^2 - 2ab - 3a^2 - b^2 + ab$

die Regel der Subtraction: **Verändere alle Zeichen des Subtrahenten und verfahre dann nach der Regel der Addition**

$$\begin{array}{rr} & 3a^2 - b^2 - 2ab \\ & -3a^2 - b^2 + ab \\ \hline \text{Obiger Rest wäre sonach} = & 0 - 2b^2 - ab = -2b^2 - ab \\ & \text{oder } -(2b^2 + ab). \end{array}$$

§. 10. Aus 3) und 4) des §. 6 ersieht man, wie es vorkommen kann, dass positive und negative Glieder in einander multiplicirt und dividirt werden sollen.

Nun ist aber

$+5 \times +3 = +5 \times 3$ und bedeutet, dass der Multiplikand

$+5$ dreimal so gross ($+15$) zu denken oder zu machen sei; also ist $+5 \times +3 = +15$.

$+5 \times -3$ bedeutet, dass der positive Multiplikand 3mal so gross in entgegengesetzter Weise (also negativ) zu denken sei; so dass $+5 \times -3 = -15$ sein muss.

$-5 \times +3 = -5 \times 3$ bedeutet, dass der Multiplikand *minus* 5 in dreifacher Grösse, also als *minus* 15, zu nehmen sei; es ist also $-5 \times 3 = -15$.

-5×-3 bedeutet, dass derselbe Multiplikand in dreifacher Grösse (-15), aber in entgegengesetzter Weise, d. h. als $+15$ zu nehmen sei, also ist $-5 \times -3 = +15$; welche Wahrheiten man in der kurzen Regel ausspricht: **Bei der Multiplikation geben gleiche Zeichen *plus*, verschiedene *minus*. Dasselbe Gesetz gilt auch für die Division**; denn weil Quotient $\times$ Divisor immer den Dividenden erzeugen muss, kann

$+6 : -3$ nur $= -2$ (denn $-3 \times +2$ würde ja -6 geben)
$-6 : -3$ „ $= +2$ („ -3×-2 „ „ $+6$ „)
$-6 : +3$ „ $= -2$ („ $+3 \times +2$ „ „ $+6$ „)
sein.

§. 11. Das in 4) gefundene Produkt $3 . 2 . a^2 a^2 - 2 b^2 a^2 - 2 . 2 ab a^2$ kultivirter geschrieben, lautet $6 a^4 - 2 a^2 b^2 - 4 a^3 b$, was, mit der Aufgabe $(3 a^2 - b^2 - 2 ab) 2 a^2$ verglichen, zu der Regel führt:

Wenn der Multiplikator eingliedrig ist, so vermehre mit ihm alle Glieder des Multiplikanden dadurch, dass sein Koëfficient mit dem des Gliedes multiplicirt und seine Exponenten zu denen der gleichen Buchstaben dieses Gliedes addirt, die anderen Buchstaben ohne Zeichen hinter einander geschrieben werden.

Man hat demnach

$$-3 a^2 b \times -4 a c^3 = +12 a^3 b c^3; \quad (D - d)\, d = Dd - d^2.$$

§. 12. Kultivirt man auf ähnliche Weise das sub 5) §. 6 entwickelte Produkt $a^2 \times 3 a^2$, *plus* $-b^2 \times 3 a^2$ *plus* $a^2 \times -b^2$ *plus* $-b^2 \times -b^2$, *plus* $a^2 \times -2 ab$, *plus* $-b^2 \times -2 ab$, so erhalten wir für die Aufgabe

$$\left.\begin{matrix}(3 a^2 - b^2 - 2 ab) \\ (a^2 - b^2)\end{matrix}\right\} \text{als nächstes Resultat} \left\{\begin{matrix}3 a^4 - 3 a^2 b^2 - a^2 b^2 \\ + b^4 - 2 a^3 b + 2 ab^3\end{matrix}\right.$$

und als weiteres durch Summirung der gleichnamigen Glieder

$$3 a^4 - 4 a^2 b^2 + b^4 - 2 a^3 b + 2 ab^3,$$

und als allgemeine Regel:

Ist Multiplikand und Multiplikator mehrgliedrig, so multiplicire alle Glieder des Multiplikanden mit jedem Gliede des ersteren, und summire die etwa sich ergebenden homogenen Glieder der Produkte nach den Regeln der Addition.

§. 13. Es ist $8a^6 b^3 : 2a^4 b = \frac{8aaaaaabbb}{2aaaab} = 4aabb = 4a^2 b^2$, was man kürzer hat, wenn man so rechnet: $8a^6 b^3 : 2a^4 b = {}^8/_2\, a^{6-4} b^{3-1} = 4a^2 b^2$ d. h. (1) wenn man den Coëfficienten des Divisors in den des Dividenden dividirt und die Exponenten des ersteren von denen des anderen (in gleichen Buchstaben) abzieht. —

Sonach ist auch $= d^3 : d^5 = d^{3-5} = d^{-2}$ (sprich: *d* zur *minus* zweiten); aber $d^3 : d^5$ auch $= \frac{d^3}{d^3 d^2} = \frac{1}{d^2}$ also $d^{-2} = \frac{1}{d^2}$, worin, weil das auch von jeder anderen als der 2ten Potenz gelten muss, die Wahrheit liegt:

(2) Jede Minuspotenz ist = einem Bruche, der zum Zähler 1 und zum Nenner die Pluspotenz hat.

Der *n*jährige Vorwerth *k* des Kapitales *K*, nämlich: $\frac{K}{(1+e)^n}$, kann also auch geschrieben werden als $K(1+e)^{-n}$; (sprich: *K* mal 1 *plus* *e* zur *minus* *n*ten).

(3) Auch ist $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$, aber auch $a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1$; d. h. jede nullte Potenz ist immer = 1.

§. 14. Aus der Aufgabe 5 §. 6 ... $(3a^2 - b^2 - 2ab) : a^2$, ergiebt sich ferner als vorläufiger Quotient $\frac{3a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{2ab}{a^2}$; und wenn man in diesen Brüchen die gleichen Faktoren im Zähler und Nenner weglässt, gestaltet sich der Quotient als $3 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{a}$, oder auch nach den Wahrheiten des vorigen Paragraphen als

$$3a^2 : a^2 - b^2 : a^2 - 2ab : a^2 = 3a^0 - b^2 a^{-2} - 2a^{1-2} b = 3 - a^{-2} b^2 - 2a^{-1} b;$$

im Allgemeinen also nach der Regel:

Ist der Divisor eingliedrig, so dividirt man mit ihm unter Berücksichtigung von §. 10 und (1) (2) und (3) des vorigen Paragraphen jedes Glied des Dividenden; z. B.

$$(6a^2b^2 - 3ab^3 - 4b^4) : -2ab = -3ab + \frac{3}{2}b^2 + 2a^{-1}b^3$$

$$= -3ab + \frac{3}{2}b^2 + \frac{2b^3}{a}.$$

§. 15. Sobald man ein Produkt zweier mehrgliedriger Faktoren $(a+b+c)(m+n) = am+bm+cm+an+bn+cn$ durch den einen Faktor, z. B. $a+b+c$ dividirt, muss man den anderen $m+n$ erhalten. Gesetzt, wir kenneten letzteren nicht, so müsste seine Ableitung, d. i. die Division mit $a+b+c$, begreiflicher Weise sich praktisch so gestalten:

$$(am + bm + cm + an + bn + cn) : (a + b + c).$$

Das erste Glied des Dividenden durch das erste des Divisors dividirt, d. h. $am : a$ giebt m, und es muss nun $(a+b+c)m$ .... macht $am + bm + cm$ .... vom Dividend hinweggenommen werden; und bleibt sonach als Rest vom Dividend $an + bn + cn$. Wiederum erstes Glied an dividirt durch erstes Glied a giebt $\frac{an}{a} = n$ als neuen Quotienten; und es muss nun $n(a + b + c)$ vom Dividend wiederum hinweggenommen werden,

macht $-an \quad bn - cn$; und damit den
Rest 0, welcher zeigt, dass $m + n$ netto der gesuchte Quotient ist.

Wenn Dividend und Divisor vielgliedrige Exponentialausdrücke sind, ist es nöthig, beide nach den auf- oder absteigenden Potenzen eines Buchstabens zu ordnen, um die Division möglichst glatt zu machen.

Beispiel. Statt $(9a^2 - 4b^4) : (2b^2 + 3a)$ setzt man also besser $(9a^2 - 4b^4) : (3a + 2b^2)$ und rechnet: $\frac{9a^2}{3a} = 3a$ als erstes Glied des Quotienten,

und als erstes Produkt $9a^2 + 6ab^2$

als ersten Rest $-6ab^2 - 4b^4$; also $\frac{-6ab^2}{3a} = -2b^2$ als zweites Glied des Quotienten,

und als zweites Produkt $-6ab^2 - 4b^4$
als zweiten Rest 0, so dass also $3a - 2b^2$ der gesuchte Quotient ist.

§. 16. Das Erheben einer Grösse auf die 2te, 3te etc. Potenz mögen Anfänger in der Buchstabenrechnung, zumal wenn die Grösse eine mehrgliedrige ist, immer nach den gewöhnlichen Gesetzen der Multiplikation ausführen.

Diesen nach ist

1) für eingliedrige Ausdrücke, z. B. $\left(\frac{4a^2b^3}{c}\right)^3$ (sprich: 4 a zur zweiten, b zur dritten, getheilt durch c zusammen auf die dritte Potenz)

$$\frac{4a^2b^3}{c} \times \frac{4a^2b^3}{c} \times \frac{4a^2b^3}{c} \times = \frac{64a^6b^9}{c^3},$$

worin allerdings die kürzer arbeitende Regel liegt: Multiplicire die Exponenten aller im Ausdrucke enthaltenen Grössen mit dem Erhebungsexponenten.

Zum Beispiel: $\left(\frac{3a^2c}{g^3}\right)^2 = \frac{3^2a^4c^2}{g^6} = 9a^4c^2g^{-6}$.

2) Für einen zweigliedrigen Ausdruck,

z. B. $(a+b)$ folgt: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$
$=a^2+2ab+b^2$

oder $(a-b)$ „ $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$
$=a^2-2ab+b^2$

oder in Worten: Das Quadrat eines zweigliedrigen Ausdrucks besteht immer aus dem Quadrat des ersten, dem doppelten Produkte des ersten und zweiten, und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Aehnlichermaassen findet sich durch Multiplikation für die dritte Potenz des zweigliedrigen (binomischen) Ausdrucks $(a \pm b)$ die Formel $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, denn

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b + 3ab^2+b^3$$

und $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-3a^2b + 3ab^2-b^3$.

Eben so ist $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $(3^1/_7)^2 = \frac{22}{7} \cdot \frac{22}{7}$ $= \frac{484}{49} = 484:49 = 9{,}877\ldots$

Weil aber $(+a)^2 = a \times a = +a^2$, eben so wohl auch $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$, so folgt, dass a^2 eben sowohl aus $(+a)^2$ wie aus $(-a)^2$ entstanden, die Quadratwurzel aus einer positiven Grösse a^2, also eben so gut positiv als negativ $= \pm a$ (sprich *plus* oder *minus* a), aus einer negativen Grösse aber gar nicht möglich sein kann.

§. 17. Während beim Potenziren eines eingliedrigen Ausdrucks die Exponenten aller seiner Grössen mit dem Erhebungsexponenten zu multipliciren waren, muss begreiflich das Radiciren, — das Zurückführen eines Ausdrucks auf seine zweite, dritte, vierte Wurzel — im Entgegengesetzten, d. h. im Dividiren aller Exponenten des Radicanden durch den Wurzelexponenten, bestehen.

Denn war $\left(\frac{4a^2b^3}{c}\right)^3 = \frac{64a^6b^9}{c^3}$, so ist $\sqrt[3]{\frac{64a^6b^9}{c^3}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{4^3a^6b^9}{c^3}} = \frac{4^{3/3}a^{6/3}b^{9/3}}{c^{3/3}} = \frac{4^1a^2b^3}{c^1} = \frac{4a^2b^3}{c},$$

wie sich's gehört.

Also hat man auch $\sqrt[3]{g^2} = g^{2/3}$; denn in der That ist $g^{2/3} \times g^{2/3} \times g^{2/3} = g^{6/3} = g^2$, und man sieht, auf welche Weise gebrochene Exponenten entstehen können. Dergleichen Bruchpotenzen, wie z. B. $g^{2/3}$ (sprich g zur $^2/_3$ten) lassen sich, da wir uns nur ganze Potenzen vorzustellen vermögen, nur dadurch anschaulich machen, dass wir sie in Wurzelgrössen verwandeln, wobei sich $g^{2/3} = \sqrt[3]{g^2}$, d. h. als Kubikwurzel aus dem Quadrate g^2 gestaltet. Auch sieht man, dass man sich bei eingliedrigen Wurzelgrössen die Radicalzeichen vom Halse schaffen kann, indem mit dem Wurzelexponenten in die Radicandenexponenten dividirt wird; denn es ist immer $\sqrt[m]{6a^2} = 6^{1/m}a^{2/m}$.

Ferner ist $\sqrt{16a^6} = \sqrt{4^2a^6} = 4a^3$, und zwar sowohl $+4a^3$ als auch $-4a^3$; $\sqrt[3]{16a^6} = +16^{1/3}a^{6/3} = \sqrt[3]{16} \times a^2 = +2{,}5198\ldots a^2$.

Dieser letztere Decimalbruch 2,5198... giebt die Kubikwurzel aus 16 nur annäherungsweise; denn es giebt in der That keine Zahl, deren dritte Potenz netto = 16 ist. Solche Grössen, deren Wurzeln zu einem unendlichen Decimalbruche führen, also genau nicht angebbar sind, heissen irrationale. So ist $\sqrt{8}$ eine irrationale Wurzelgrösse und $= \pm 2{,}828\ldots$ aber $\sqrt[3]{8}$ eine rationale und $= 2$, denn $2^3 = 2.2.2.2. = 8$.

Zusatz. Da $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a^{1/2} : a^{1/2} = a^{1/2 + 1/2} = a$, so folgt: Quadratwurzelgrösse mit sich selbst multiplicirt (ebenso: jede Kubikwurzelgrösse auf die dritte Potenz erhoben) verliert ihr Wurzelzeichen, $(3\sqrt{2})^2 = 9 . 2 = 18$.

§. 18. Nach dem Gesetze der Multiplikation ist

$$(3a-5b-c)\,2m = 6am-10bm-2cm.$$

Denkt man sich nun den ersten Ausdruck weg, und nur den letzten rechts vom Gleichheitszeichen stehenden

$$6am-10bm-2cm$$

gegeben, so kann man denselben, da jedes Glied mit $2m$ multiplicirt erscheint, durch Division wieder verwandeln in

$$2m(3a-5b-c),$$ d. h.:

Wenn alle Glieder eines mehrgliedrigen Ausdrucks einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so kann man denselben aus allen Gliedern weglassen (indem man mit ihm in alle dividirt), den so vereinfachten Ausdruck in eine Klammer schliessen und den weggelassenen Faktor davor oder dahinter setzen, welche Operation man das Faktorenziehen nennt.

Aus $K=k+ken$ hat man $K=k(1+en)$.

So ist auch $G+\sqrt{Gg} = G^1+G^{1/2}g^{1/2}$

$$= G^{1/2}(G^{1/2}+g^{1/2}) = \sqrt{G}\,(\sqrt{G}+\sqrt{g})$$

$$a^2+4a^2+9a^2+16a^2+25a^2\ldots = a^2(1+4+9+16+25\ldots)$$

$$= a^2(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\ldots)$$

$= a^2 \times$ Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen.

§. 19. Jeder Ausdruck, der aus zwei durch das Gleichheitszeichen verbundenen Theilen besteht, wird eine Gleichung genannt. Vermöge des Verbindungszeichens folgt schon von selbst, dass der erste oder linke Theil der Gleichung dem zweiten oder rechten an Grösse oder Werth gleich sein muss. (Daher der von den arabischen Mathematikern gewählte Name: *Al-dje-bra*, d. h. Verbindung getrennter Theile.)

Bei Gleichungen wie $(d-1)^2 = d^2-2d+1$

oder $D^2+Dd = D\,(D+d)$

ist das ganz offenkundig; denn der 2te Theil ist hier nichts Anderes, als der nach den Regeln der Buchstabenrechnung umgeänderte erste. (Siehe §. 16 und §. 18.) Gleichungen solcher Art, wo der eine Theil nur eine Umgestaltung des anderen, im Grunde aber mit ihm einerlei (identisch) ist, heissen identische, und sind keine eigentlichen Gleichungen im algebraischen Sinne.

Bei den letzteren darf vielmehr der eine Theil aus dem anderen nicht herleitbar, es muss also jeder unabhängig sein, wie z. B. in $(d-1)^2 = D+d^2$.

Führt man hier das Quadrat des 1. Theiles aus, so hat

man auch $d^2 - 2d + 1 = D + d^2$
und addirt man dazu $-d^2 \qquad = \quad -d^2$,
so bleibt $-2d + 1 = D$ (1);
und wenn man dazu $-1 = -1$ addirt, und
das Resultat $-2d = D - 1$ durch -2
dividirt, erhält man auch $d = \frac{D-1}{-2} = \frac{1-D}{2}$ (2).

Im Falle (1) haben wir den Werth von D, im Falle (2) den von d durch die anderen Grössen der Gleichung bestimmt. Das geht immer, d. h. immer lässt sich der Werth irgend eines Buchstabens durch die anderen ausdrücken, sobald die Gleichung so beschaffen, dass der eine ihrer Gegensätze nicht aus dem anderen abgeleitet, die Gleichung also keine identische, sondern eine eigentliche oder algebraische ist. Man nennt derartige wohl auch Bestimmungsgleichungen.

Soll man es einer solchen gleich ansehen, welcher Buchstabenwerth aus ihr zu bestimmen, oder welche Grösse die „Unbekannte" ist, so giebt man letzterer gleich beim Ansatze der Gleichung einen der letzten Buchstaben des Alphabets, gewöhnlich das x.

§. 20. Jedwede Rechnungsaufgabe enthält bei näherer Untersuchung zwei gleichwerthige Gegensätze oder bildet einen Gleichgewichtssatz zwischen Leistung und Gegenleistung, was sich am anschaulichsten und schnellsten dadurch herausstellt, dass man die Grösse des fraglichen Resultates, die Unbekannte, sofort mit dem Buchstaben x belegt, dies x als Antwort betrachtet, und damit gleichsam wie mit einer Zahl oder einer Bekannten nach den Gesetzen der Buchstabenrechnung so operirt, wie es die Aufgabe haben will. Durch dies Verfahren (ein analytisches, das Unbekannte bekannt nehmend, und durch Zergliederung dieser Hypothese zum Bekannten, zur Gleichung, gelangend; daher der Name Analysis für die ganze algebraische Mathematik) auf Satz und Gegensatz der Aufgabe angewandt, bildet sich ganz von selbst eine Gleichung. Man nennt dies: die Gleichung konstruiren.

1. Beispiel. Eine Bestandesfläche von 20 Ackern soll in 3 solche Theile getheilt werden, dass der 1ste zum 2ten sich wie 4 : 5 verhält, und der 3te um 1 Acker kleiner als der 2te sei. Wie gross ist jede Parcelle zu nehmen? Construction. Macht man die erste $= x$ Acker, so ist weil 4 : 5 = erste: zweite und daraus zweite $= \frac{5 \times \text{erste}}{4}$ $= \frac{5x}{4}$, und die dritte $= \frac{5x}{4} - 1$; und da alle 3 zu-

sammen = 20, folgt die Gleichung

$$x + \frac{5x}{4} + \frac{5x}{4} - 1 = 20.$$

2. Beispiel. Welche Dimensionen muss man einem in Form eines Parallelogramms abzusteckenden Probeplatze geben, wenn er 300 □Ruthen gross und die Breite 10 Ruthen kleiner als die Länge sein soll?

Construction. Man nehme die Länge $= x$, also die Breite $= x-10$, so muss sein $x\ (x-10) = 300$

oder $x2 - 10x = 300$.

Zusatz. Letztere Gleichung, in welcher sich die Unbekannte bis zur zweiten Potenz versteigt, heisst auch vom 2ten Grade oder quadratisch, während die erste vom 1sten Grade oder einfach heisst.

§. 21. Sobald die in der Aufgabe liegende Gleichung konstruirt ist, so hat man gewonnenes Spiel; denn es lassen sich nun mit ihr nach den Gesetzen der Buchstabenrechnung solche Veränderungen vornehmen, dass die unbekannte Grösse (der Buchstabe x) mit dem Zeichen $+$ und dem Coëfficienten und Exponenten 1 („positiv, ohne Coëfficient und Exponent") in dem einen Theile der Gleichung allein zu stehen kommt; welche Operation man das Reduciren der Gleichung nennt.

1. Beispiel. Es bedeute der Buchstabe p das Zuwachsprocent eines Fonds und e den Einheitszuwachs, so gilt zwischen p und e die Gleichung $e = \frac{p}{100}$. Soll diese auf p reducirt werden, so hat man nur beide Theile mit 100 zu multipliciren um sofort zu erhalten

$$100\ e = p.$$

Uebersetzt: Der Einheitszuwachs $\times$ 100 giebt das Zuwachsprocent. — Findet sich also irgendwo und wie

$e = 0{,}035$, so hat man

$p = 0{,}035 \times 100 = 3{,}5 = 3\frac{1}{2}$.

2. Beispiel. Ein Fond k, der in jedem Jahre um p Procent seiner jetzigen Masse, also nach einem einfachen Zuwachs sich vermehrt, gelangt nach n Jahren auf die Summe $K = k\ (1 + en)$, wenn $e = \frac{p}{100}$ den Einheitszuwachs bedeutet. Diese auf Seite 46 und 47 begründete Gleichung der einfachen Zuwachsrechnung enthält 4 Buchstaben. Man soll nach und nach jeden davon als die gesuchte Grösse betrachten und die Gleichung demgemäss reduciren.

α. Gesucht der Nachwerth K.

Für diesen Fall ist die Formel schon reducirt und heisst (1) $K = k\,(1+en)$.

β. Gesucht der Vorwerth k.

Schreibt man die Gleichung so: $k\,(1+en) = K$ und dividirt jeden Theil durch $(1+en)$ so hat man sofort

(2) $k = \dfrac{K}{(1+en)}$.

γ. Gesucht die Zeit, die Zahl n der Jahre.

Aus $k\,(1+en) = K$ folgt durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation:

$$k+ken = K,$$

und wenn man, um das Glied k aus dem 1. Theile wegzuschaffen, links und rechts $-\ k$ zur Gleichung addirt, folgt:

$$ken = K-k;$$

und nun, um den Faktor ke wegzuschaffen, links und rechts mit ke dividirt:

$$n = \frac{K'-k}{ke}.$$

δ. Gesucht der Zinsfuss oder der Einheitszuwachs e.

Wie sub 3 folgt aus $k(1+en)=K$ durch Auflösung der Klammer: $k+ken=K$

und durch Transportirung der im linken Theile überflüssigen k, weiter $ken=K-k$, und nun durch Division mit kn

$$e = \frac{K-k}{kn},$$

oder weil $100\,e = p$, im Procentsatze:

$$100\,e = p = \frac{100(K-k)}{n\,.\,k}.$$

Man sieht, wie von den vier Grössen unserer Grundgleichung immer eine unbekannt sein und bestimmt werken kann, sobald die anderen drei bekannt sind.

Wenn z. B. ein Gut im Ankaufe (k) 10000 Thaler kostete und nach 5 ($= n$) Jahren mit (K) 12000 Thaler wieder verkauft wird, um den wievielten Theil des Anlagekapitals hat sich da jährlich sein Werth gesteigert?

Da nach (3) $e = \dfrac{K-k}{kn} = \dfrac{12000-10000}{10000\,.\,5} = \dfrac{2000}{50000}$

$$= \frac{1}{25} = 0{,}04$$

$$p = 100\,e = 4,$$

folgt die Antwort: Um 4 Hundertel oder 4 Procent des Kaufwerthes.

Hätte man sich nur die Grundformel $K = k\ (1 + en)$ gemerkt gehabt, so hätte man ebenfalls, durch sofortige Einsetzung der Werthe

$$12000 = 10000\ (1 + 5\ e)$$

oder $12 = 10\ (1 + 5\ e)$

und daraus $12 = 10 + 50\ e$ . . . . und durch Addition von -10 in links und rechts („Transportiren der 10"),

$2 = 50\ e$, ... folglich durch Division mit dem Coëfficient 50

$$0{,}04 = e;\ 4 = p.$$

§. 22. Das **Reduciren einer Gleichung des ersten Grades** besteht also, wie aus vorstehenden Beispielen zu ersehen, darin dass man die Unbekannte von allen mit ihr verbundenen Zahlen- und Buchstabengrössen befreit; indem man dabei auf die selbstverständliche Wahrheit baut: Wenn jeder Theil einer richtigen Gleichung um gleich viel oder auch gleich-viel-mal vergrössert oder verkleinert wird, erhält man eine richtige Gleichung wieder.

Oder: Eine Gleichung zu einer Gleichung addirt, oder eine Gleichung mit einer Gleichung multiplicirt, giebt immer wieder eine Gleichung.

1. Beispiel. Die aus der Frage 1 des §. 20 construirte Gleichung $x + \frac{5x}{4} + \frac{5x}{4} - 1 = 20$ zu reduciren. — Durch Addition hat man

$$\frac{14}{4}\,x - 1 = 20;$$

und wenn $+1 = +1$ hinzu addirt wird:

$$\frac{14}{4}\,x = 21;$$ also durch Division mit $\frac{14}{4}$

$$x = 21 \times \frac{4}{14} = 6.$$

Die 1ste Parcelle erhält also die Grösse 6 Acker; die 2te dann $= \frac{5x}{4} = \frac{5\ .\ 6}{4} = 7\frac{1}{2}$ Acker; die 3te $= \frac{5x}{4} - 1 = 7\frac{1}{2} - 1 = 6\frac{1}{2}$ Acker; macht Summa $6 + 7\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} = 20$ Acker.

2. Beispiel. Welche Höhe müsste man einem Dreiecke geben, das über einer Basis von 100 Ruthen mit einer Fläche von einem preussischen Morgen = 180 □Ruthen abgesteckt werden sollte?

Die Höhe x; so dass $\frac{100 \times x}{2} = 180$ als konstruirte Bestimmungsgleichung dieser Aufgabe erscheint; wo dann

$$100\, x = 180 \,.\, 2 \text{ folgt, und weiter:}$$

$$x = \frac{360}{100} = 3{,}6 \text{ Ruthen.}$$

§. 23. Wer die an sich bloss in logischem Denken bestehende Kunst besitzt, die Leistung und Gegenleistung einer Aufgabe algebraisch auszudrücken, d. h. die der letzteren innewohnende **Gleichung zu construiren** und wer dazu die auf Buchstabenrechnung beruhende Kunst versteht, die konstruirte **Gleichung zu reduciren**: der ist bei allen Arbeiten der Mathematik in ausserordentlichem Vortheile gegen den, der jene algebraische Fertigkeit nicht besitzt; denn er kann viel sicherer, einfacher, leichter und nach allgemeinen und kürzeren Sätzen arbeiten, während Letzterer weit mehr und weit umständlichere Specialregeln sich zu merken hat. Die Aneignung der mathematischen Formelsprache und der algebraischen oder Gleichungskunst ist daher nicht dringend genug Allen zu empfehlen, die von der Mathematik etwas mehr Nutzen zu ziehen wünschen, als ihnen die ganz gemeine und elementarste Mess- und Rechnungskunst zu gewähren vermag.

1. Oesterreich.

BESTANDSMASSE pro 1 Fuss FORMHÖHE

Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.
11	374	·4	252	·8	181	·2	137	·6	106	23	85,5
·2	360	·6	245	16	177	·4	134	·8	104	·5	82,0
·4	347	·8	238	·2	172	·6	131	21	103	24	78,7
·6	336	14	231	·4	168	·8	128	·2	101	·5	75,3
·8	325	·2	224	·6	164	19	125	·4	98,6	25	72,4
12	314	·4	218	·8	160	·2	122	·6	96,9	·5	69,4
·2	304	·6	212	17	156	·4	120	·8	95,2	26	66,8
·4	295	·8	206	·2	153	·6	118	22	93,6	·5	64,2
·6	286	15	201	·4	149	·8	115	·2	92,0	27	62,0
·8	275	·2	196	·6	146	20	113	·4	90,3	·5	59,8
13	268	·4	191	·8	143	·2	111	·6	88,7	28	57,5
·2	260	·6	186	18	140	·4	109	·8	87,1	29	53,8

2. Baiern. H. Darmstadt. Baden. *(Altenburg).* Schweiz.

BESTANDSMASSE pro 1 Fuss FORMHÖHE

Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.
11	259	·4	175	·8	126	·2	94,8	·6	74,0	23	59,4
·2	250	·6	170	16	123	·4	92,6	·8	72,6	·5	57,0
·4	242	·8	165	·2	120	·6	90,8	21	71,3	24	54,7
·6	233	14	160	·4	117	·8	88,8	·2	70,0	·5	52,3
·8	225	·2	156	·6	114	19	86,8	·4	68,7	25	50,3
12	218	·4	151	·8	111	·2	85,0	·6	67,4	·5	48,3
·2	211	·6	147	17	109	·4	83,2	·8	66,2	26	46,4
·4	204	·8	143	·2	106	·6	81,6	22	65,0	·5	44,6
·6	198	15	139	·4	104	·8	80,1	·2	63,8	27	43,0
·8	192	·2	136	·6	102	20	78,5	·4	62,7	·5	41,5
13	186	·4	132	·8	99,3	·2	76,9	·6	61,6	28	40,0
·2	180	·6	129	18	97,0	·4	75,4	·8	60,5	29	37,5

3. Sachsen.

BESTANDSMASSE pro 1 Fuss FORMHÖHE

Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.
11	448	·4	302	·8	217	·2	164	·6	127	23	102
·2	432	·6	293	16	212	·4	160	·8	125	·5	98,3
·4	417	·8	284	·2	207	·6	157	21	123	24	94,3
·6	403	14	276	·4	202	·8	153	·2	121	·5	90,2
·8	389	·2	269	·6	197	19	150	·4	118	25	86,8
12	376	·4	261	·8	192	·2	147	·6	116	·5	83,3
·2	364	·6	254	17	187	·4	144	·8	114	26	80,1
·4	353	·8	247	·2	183	·6	141	22	112	·5	76,9
·6	342	15	241	·4	179	·8	138	·2	110	27	74,3
·8	331	·2	235	·6	175	20	135	·4	108	·5	71,6
13	321	·4	228	·8	171	·2	133	·6	106	28	68,9
·2	311	·6	223	18	167	·4	130	·8	105	29	64,4

BESTANDSMASSE pro 1 Fuss FORMHÖHE

4. Würtemberg.

Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.
11	249	·4	168	·8	121	·2	91,1	·6	70,9	23	57,0
·2	240	·6	163	16	118	·4	89,0	·8	69,7	·5	54,7
·4	232	·8	158	·2	115	·6	87,2	21	68,5	24	52,5
·6	224	14	154	·4	112	·8	84,7	·2	67,3	·5	50,4
·8	217	·2	150	·6	110	19	83,5	·4	65,9	25	48,2
12	209	·4	145	·8	107	·2	81,8	·6	64,6	·5	46,4
·2	203	·6	141	17	104	·4	80,3	·8	63,4	26	44,6
·4	196	·8	138	·2	102	·6	78,4	22	62,3	·5	42,9
·6	190	15	134	·4	100	·8	76,9	·2	61,2	27	41,4
·8	184	·2	131	·6	97,4	20	75,4	·4	60,0	·5	39,9
13	179	·4	127	·8	95,3	·2	73,9	·6	59,0	28	38,6
·2	173	·6	124	18	93,2	·4	72,4	·8	58,0	29	35,9

BESTANDSMASSE pro 1 Fuss FORMHÖHE

5. Hannover. Braunschweig.

Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.
11	266	·4	179	·8	129	·2	97,1	·6	75,6	23	60,9
·2	256	·6	174	16	126	·4	95,0	·8	74,2	·5	58,3
·4	247	·8	169	·2	123	·6	93,0	21	73,1	24	56,0
·6	239	14	164	·4	120	·8	91,0	·2	71,7	·5	53,6
·8	231	·2	159	·6	117	19	89,1	·4	70,3	25	51,5
12	223	·4	155	·8	114	·2	87,3	·6	69,0	·5	49,5
·2	216	·6	151	17	111	·4	85,6	·8	67,7	26	47,6
·4	209	·8	147	·2	109	·6	83,9	22	66,6	·5	45,7
·6	203	15	143	·4	106	·8	82,2	·2	65,3	27	44,1
·8	196	·2	139	·6	104	20	80,5	·4	64,0	·5	42,5
13	190	·4	135	·8	102	·2	78,8	·6	63,0	28	41,0
·2	184	·6	132	18	99,4	·4	77,2	·8	62,0	29	38,2

BESTANDSMASSE pro 1 Fuss FORMHÖHE

6. Kur-Hessen.

Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.	Ab.	Cub.F.
11	191	·4	130	·8	92,9	·2	69,8	·6	54,4	23	43,7
·2	184	·6	126	16	90,6	·4	68,3	·8	53,4	·5	41,9
·4	178	·8	122	·2	88,5	·6	66,8	21	52,4	24	40,2
·6	171	14	118	·4	86,4	·8	65,4	·2	51,4	·5	38,6
·8	165	·2	114	·6	84,3	19	64,0	·4	50,4	25	37,0
12	160	·4	111	·8	82,2	·2	62,7	·6	49,5	·5	35,5
·2	155	·6	108	17	80,2	·4	61,4	·8	48,6	26	34,1
·4	150	·8	105	·2	78,4	·6	60,1	22	47,7	·5	32,9
·6	145	15	102	·4	76,6	·8	58,9	·2	46,9	27	31,7
·8	141	·2	100	·6	74,8	20	57,7	·4	46,1	·5	30,5
13	138	·4	97,7	·8	73,0	·2	56,6	·6	45,3	28	29,4
·2	134	·6	95,3	18	71,3	·4	55,5	·8	44,5	29	27,4